VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 31 ANUL XVI - APRILIE 2023

Cuprins

LEI 15 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601

SCLIPIREA MINȚII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XVI, NR XXX1, 2023

SM

Nr. 31

PROBLEME PROPUSE PROBLEME REZOLVATE

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Științe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " MESERII ȘI SERVICII ", BUZĂU

APRILIE 2023

SCLIPIREA MINȚII 31

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An XVI, Nr. XXXI, APRILIE 2023, BUZĂU

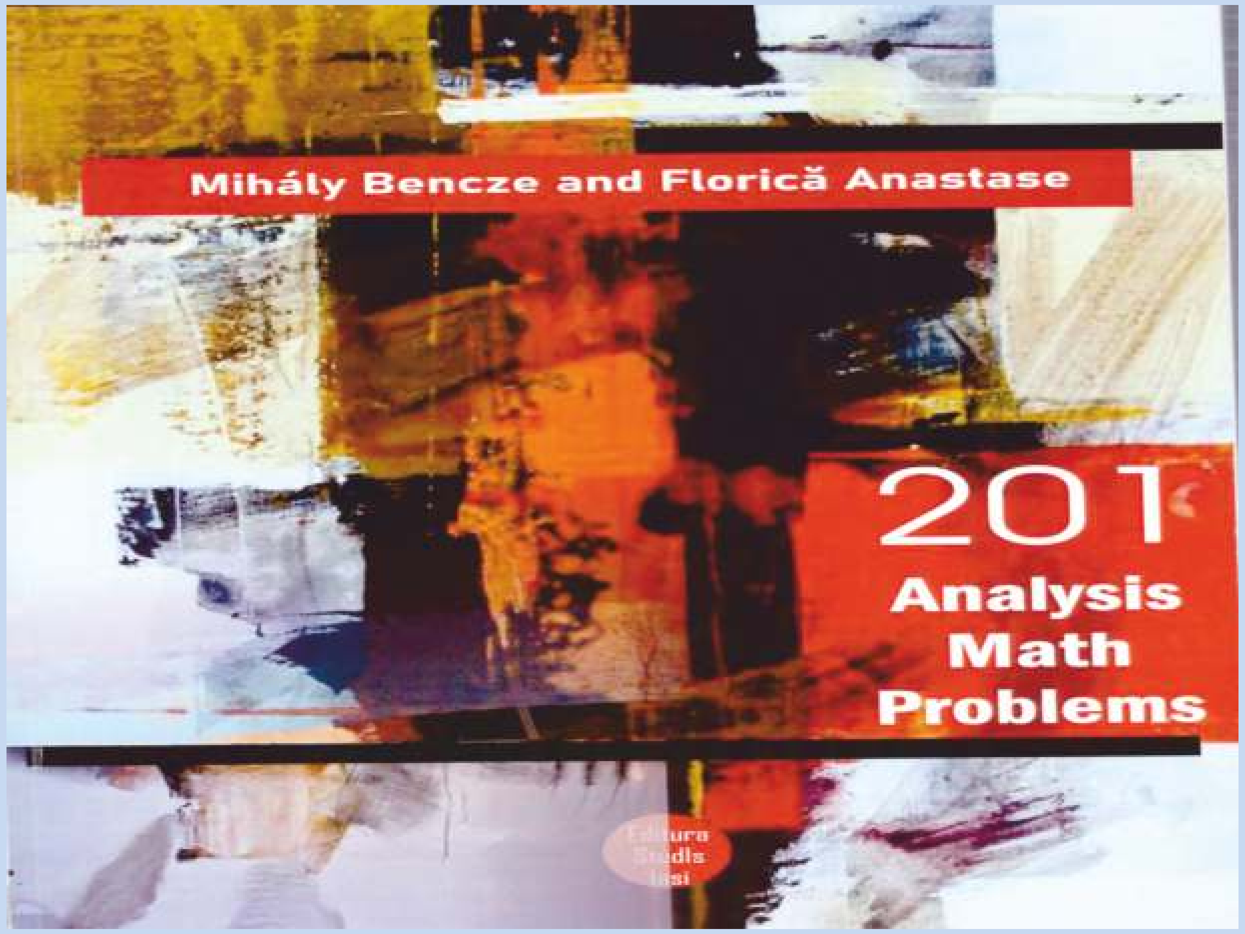
CUPRINS

GÂNDEȘTE CORECT

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph **Buzău, www.editgraph.ro**

APARIȚII EDITORIALE



O lucrare de excepție apărută la editura **STUDIS Publishing House, Iași** în anul 2022 este și cartea **„201 Analysis Math Problems”** a bine- cunoscuților profesori dr**. Mihály Bencze** și **Florică Anastase**, autori de altfel a numeroase lucrări și articole de specialitate și membri sau coordonatori a mai multor asociații și reviste de profil, precum și organizatori de concursuri naționale și internaționale.

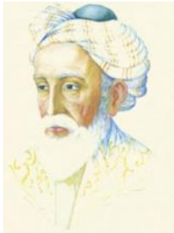
Însuși domnul profesor Gabriel T. Prăjitură de la Departamentul de matematică a Universității din Brockport, New York aduce un elogiu în prefața lucrării, insistând pe originalitatea problemelor care au fost propuse de autori în diverse reviste cum ar fi **Octogon Mathematical Magazine, Romanian Mathematical Magazine, Gazeta Matematică, Sclipirea Minții, Mate Info U- Pitești, Recreații matematice, Arhimede Mathematical Journal, SSMA, The Pentagon**, etc.

Problemele propuse în această lucrare reprezintă experiența mai multor ani de cercetare a autorilor privind rezolvarea problemelor de analiză matematică prin diverse metode și tehnici care sunt accesibile atât studenților de la facultățile de profil cât și elevilor și colegilor profesori din învățământul preuniversitar. Ele completează o serie de cunoștințe des întâlnite în scrierile de specialitate cu inegalități și alte noțiuni mai puțin cunoscute, care fac lucrarea deosebit de valoroasă și cu un nivel destul de ridicat al conținutului.

Există numeroase probleme cu proprietățile funcțiilor și a limitelor de funcții dar și cu inegalități integrale care pot face oricând obiectul unor subiecte pentru concursuri și examene deosebite.

În speranța că lucrarea poate constitui un studiu pentru studenți sau colegii profesori pentru activitatea lor de cercetare, vă recomandăm această carte deosebită, iar mai multe informați despre ea puteți găsi la domnul prof. **Florică Anastase** la e-mail: **anastaseflorica@gmail.com**

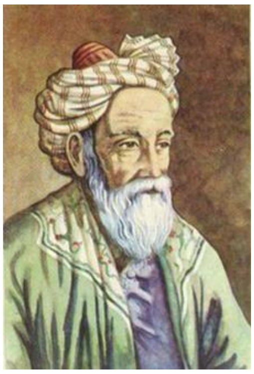
"Fiindcă nu știi ce te-așteaptă mâine, luptă să fii fericit astăzi."
Omar Khayyam



1. Istoria matematicii

Omar Khayyam – geniul

de Adrian Stan, Buzău



De origine persană, **Omar Khayyam** (18.05. 1048, Nișapur – 04.12.1131, Nișapur) este considerat unul din geniile lumii științifice, un om de știință vizionar ce și-a depășit cu mult timpul său și care a trăit într-o perioadă istorică tulbure, potrivnică oamenilor de știință, cea a extinderii turcilor selgiucizi asupra Iranului.

Încă de mic a beneficiat de învățăturile unui discipol de-al marelui medic Avicena, cu care a pătruns tainele medicinii dar și a matematicii și filozofiei dar a fost interesat mai mult de matematică și mai târziu a astrologiei și astronomiei în orașul Balhi din Afganistanul de azi.

La 20 de ani, Omar ajunge în Samarkand (oraș din Uzbekistanul de azi), centrul culturii și științei din acea perioadă și este primit de un prieten al tatălui său și anume guvernatorul orașului, care îl ajută să-și continue studiile. Astfel că, în decurs de doi ani scoate lucrarea **„Tratat privind demonstrarea unor probleme de algebră și echilibru"**, o lucrare revoluționară pentru acele timpuri în care apare o primă definiție a algebrei. El descoperea că ecuațiile algebrice cubice pot avea mai mult de o soluție, dar nu reușea să le găsească pe cele negative și pe cele duble, iar rezolvarea acestora o făcea prin metoda geometrică a intersecției conicelor- primul studiu de acest fel în rezolvarea ecuațiilor.

A rezolvat mai multe tipuri de ecuații cubice pe care le aducea prin transformări la ecuațiile unor conice pe care le reprezenta într-un sistem de axe iar punctele de intersecție dintre ele conduceau la soluțiile respective, abcisele fiind luate întotdeauna cele pozitive. Khayyam devine unul din precursorii lui Descartes în dezvoltarea geometriei analitice.

Noul sultan selgiucid al Persiei, Seljuk Malik Shah I, îl invită în 1073 pe Omar în capitala imperiului său, la Isfahan în Asia Centrală, prin intermediul prietenului său din copilărie, marele vizir Nizam al-Mulk, pentru a construi un observator astronomic și a realiza un calendar pentru calculul exact al unui an solar. Pentru aceasta i se pune la dispoziție resurse uriașe și își permite să formeze o echipă din mai mulți învățați ai vremii iar peste șase ani, în 1079, Omar Khayyam realizează cel mai exact calendar de până atunci care a rămas în vigoare până în 1925.

Astfel, **Khayyam** calculează că anul solar are 365,242190 de zile cu o eroare de o zi la 5000 de ani, întrecând celelalte calendare de până atunci și chiar precizia calendarului gregorian din 1582 care dădea o eroare de o zi la 3330 ani. Calendarul realizat de Omar purta numele de „Jaleli" sau „Maleki" , după numele sultanului Malik I, binefăcătorul lui Omar și a avut scopul de a lega cât mai exact începutul anului de echinocțiul de primăvară iar numărul de zile din lunile calendarului variau de la 29 la 32 și purtau nume după modelul calendarului vechi persan sau zoroastrian.

În 1077 scrie tratatul „**Comentarii privind dificultățile din introducerile la cărțile lui Euclid**" în care a demonstrat primele teoreme ale geometriilor lui Gauss, Lobachevsky, Rieman fiind departe de ideea unei geometrii neeuclidiene, dar bază de inspirație pentru matematicieni ca at Tusi, John Wallis, Girolamo Saccheri. Însă, în încercarea de a demonstra Postulatul al V-ea din cărțile lui Euclid, Omar face o prezentare detaliată a teoriei rapoartelor, începând cu o amplă expunere a teoriei dreptelor paralele într-un mod propriu privind rapoartele și mărimile incomensurabile, proporționalitatea și ordonarea rapoartelor. Axioma paralelelor a încercat să o deducă cu ajutorul principiului continuității în sensul că „mărimile se pot divide până la infinit, adică ele nu sunt alcătuite din cantități indivizibile". (1), pag 264. De aceea, Omar considera necesară introducerea unei unități divizibile și a unei noi categorii de numere care să corespundă oricăror rapoarte între mărimi așa zise „elemente improprii", adică numerele iraționale. Aceste concepte au fost mai bine clarificate peste 150 de ani când matematicianul at Tusi exprima toate rapoartele ca numere scrise aproximativ prin fracții.

Însă, după asasinarea sultanului și a altor susținători ai săi care erau în jurul sultanului, Omar este nevoit să părăsească capitala Isfahan și să se adăpostească la Bagdad, însă îl pune în imposibilitatea de-și continua cercetările în matematică, astronomie, filozofie, muzică și poezie. Mai mult, fundamentaliștii islamici îl acuză de erezie fiind astfel nevoit să se întoarcă în orașul său natal Nișapur, și să predea elevilor pentru a-și câștiga existența. Pentru o scurtă perioadă de timp, Omar a fost invitat la curtea sultanului Sanjar cel de-al treilea fiu al lui Malik I care devenise sultan și mutase capitala imperiului selgiucid la Merv, Turkmenistanul de astăzi.

Omar a scris chiar și un tratat despre combinatorică care s-a pierdut în care utiliza metoda coeficienților binomiali scriși sub forma triunghiului lui Pascal așa cum avea să fie scriși peste 500 de ani. De asemenea, a dezvoltat binomul $(a+b)^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\rangle 0$ cunoscând regulile calculului consecutiv al coeficienților și s-a ocupat și cu extragerea rădăcinii pătrate.

Întreaga lume l-a cunoscut prin poeziile sale, traduse și publicate de Edward FitzGerald în 1859 și astfel a devenit unul din cei mai faimoși poeți persani, renumit prin scrierea mai multor catrene, numite "rubaiyate"- strofe de patru versuri care rimează toate cu excepția celui de-al treilea., reprezentând frământările sale la problemele existențiale, a libertăților și a fericirii, degajau mult pesimism, fatalism, agnosticism, reprezentând o provocare pentru lumea islamică rigidă în care Omar devenea prima generație care trecuse la islam și în care nu de multe ori era acuzat de erezie, erezia sa fiind mai mult de indiferență față de religie punându-l pe Omar într-o lumină ateistă.

În domeniul muzicii a căutat o legătură dintre muzică și aritmetică realizând clasificări și relații între scalele și notele muzicale iar în filozofie a scris mai multe tratate: "On existence:, "The treatice on Transcendence in Existence", "The necessity of contradiction in the world, determinism and subsitence, …"

În memoria sa, în localitatea sa natală i s-a construit un mausoleu având ca decorațiuni exterioare versurile catrenelor sale.

În 2005, regizorul Kayvan Mashayekh a realizat filmul The keeper- The Legend of Omar Khayyam dspre viața marelui om de știință.

Bibliografie:

E. Kolman, A. P. Iușkevici. Istoria Matematicii în Evul Mediu, Editura Științifică. București. 1963

Adrian Stan. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015.

Măsura în orarul deschis

de Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Scrisoare de întâmpinare a Zilei Măsurii (Matematicii), 10-01-2023.
Acțiunea poartă coordonatele apariției matematicianului român Grigore Moisil (1906-1973).

1)Impulsul valorii.

Interacțiunea, mișcarea ne caracterizează după modelul oricăror forme ce trec, obiectiv, de la efect la cauză și invers, urmare a șirului de autotransformări, adică de dinamică a echilibrului varietăților de condiții ce sprijină, temporal, o structură.

O etapă a dezvoltării sociale are la bază resurse diferențiate care, în contextul luptei pentru existență, își etalează afirmarea cu soluții care de care mai ingenioase, pretendente la asumare și răspundere.

Aparținem cursurilor sociale ce construiesc și sprijină valori în concordanță cu natura și cu legile bunei conviețuiri, acțiuni ce ne fac actori ai propriei deveniri prin prisma cunoașterii științifice și a dezvoltării continue.

2)Grigore Moisil, reper și sens științific.

Locul onorat de apariția matematicianul roman Grigore Moisil conține secvențe pline de admirație adunate prin îmbrățișarea statutului de conectare la farmecul învățării, la optimizarea muncii cu dispozitive electrice :

Politehnica București

1) S-a născut la Tulcea (10-1-1906),
2) Străbunicul său a fost Grigore Moisil, paroh la Năsăud, vicar episcopal greco-catolic în ținutul Rodnei,
3) Tata, Constantin Moisil, profesor de istorie, arheolog, numismat, a îndeplinit funcția de Director al Cabinetului Numismtic al Academiei, membru de onoare al Academiei Române,
4) Mama, Elena, institutoare la Tulcea, directoarea școlii devenită azi Școala 74 "Ienăchiță Văcărescu" din București,
5) Sora, Florica Moisil, a fost mama profesoarei Zoe Petre, decan al Facultății de Istorie a Universității din București,
6) Fratele, George Moisil, profesor de fizică la Politehnica București,
7) Căsătorit cu Viorica (Constante) Moisil, sora artistului plastic Lena Constante.

Se dedică școlii prin știința măsura (matematica), unde refrenul zilei este al soluționării cu justificări teoretice agreate de specialiști și instituții dornice de eficiență:
1) Școala primară la București,
2) Studii liceale la Vaslui și București (1916-1922),
3) 1923, Facultatea de Matematică din Universitatea București,
4) 1924, Politehnica, secția construcții, București,
5) Cursuri simultane. Din 1929 parcurge doar Facultatea de Matematică,
6) 1929, susține teza de doctorat "Mecanica analitică a sistemelor continue", foarte apreciată.
7) 1930, pleacă la Paris și studiază la Sorbona,
8) 1931, susține examenul de docență cu lucrarea "Asupra unei clase de sisteme de ecuații cu derivate parțiale din fizica matematică",
9)1931-1932, cu bursa de studii Rockfeller studiază la Roma cu savantul Vito Volterra.

Universitatea București

Preocuparea sa științifică este apreciată la nivelul instituției și al țării, devenind criteriu de așezare în rândul factorilor care conduc și creează generații reprezentative în cercetarea științifică:

1) Întors în ţară. Profesor provizoriu la Universitatea din Iaşi,
2) Conferenţiar universitar (din 1935),
3) Profesor universitar (din 1939),
4) Locuieşte 10 ani în Iaşi, colaborează cu profesorul Alexandru Myller, conduce primul curs de algebră modernă din România, "Logica şi teoria demonstraţiei", realizează lucrări despre Logica matematicianului polonez Jan Lukasiewicz, scrie lucrări din domeniile mecanica, analiza matematică, geometrie, algebra, logica matematică,
5)Profesor universitar la Universitatea din Bucureşti (din 1941),
6) Publică lucrări în domeniul circuitelor electronice (1940-1950),
7) Ambasador al României la Ankara (1946-1948),
8) Pasionat de domeniul informaticii (1950), contribuie la instalarea primului calculator de construcţie românească la Institutul de Fizică Atomică (1957), ţine cursuri de logică matematică şi la alte Facultăţi, în afară de Universitatea Bucureşti, a avut ideea introducerii liceelor şi facultăţilor de informatică în România,
9) Membru al Academiei Române (din 1948), Membru al Academiei din Bologna, Membru al Institutului Internaţional de Filozofie, Laureat al Premiului de Stat al Republicii Populare Române, decorat cu „Ordinul Muncii" (1963), primeşte titlul „Om de Ştiinţă Emerit" prin Decret al Consiliului de Stat (1964), Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din România (din 21-12-1935), Membru titular al Academiei de Ştiinţe din România (din 3-6-1941), pleacă în călătorie de o lună şi jumătate în SUA şi Canada pentru conferinţe ştiinţifice, pe 21-5-1973 încetează din viaţă la Ottawa.

Academia Română

10) Societatea Internaţională a Inginerilor în Electronică (IEEE) i-a acordat distincţia rară „Computer Pioneer Award" (p.m.) în 1996.

3) Măsura noastră, Măsura tuturor.

Legată de acţiunea umană, măsura (matematica) a pornit de la înlesnirea relaţionării pe tema comerţului, aflarea suprafeţelor (ariilor), prevederea fenomenelor astronomice şi a altor operaţii inerente, fapt care a condus la optimizarea soluţiilor, deschizând şi calea preocupărilor teoretice prin iniţiatori şi renumiţi gânditori Pitagora, Euler, Neper, într-o enumerarea foarte laconică.

Conturarea acestei ştiinţe a ales dezvoltarea imaginii sale pe baza conlucrării şi competiţiei pe terenul afirmării moderne cu 3 tendinţe specifice :
1) studiul structurii (teoria numerelor, algebra elementară, algebra abstractă, spaţiul vectorial),
2) studiul spaţiului (geometria euclidiană, geometria neeuclidiană, teoria relaţiei (relativităţii), geometria diferenţială, geometria algebrică, teoria grupurilor, topologia),
3) studiul schimbărilor (măsurarea şi anticiparea (predicţia) modificării variabilelor în cazul ştiinţelor naturii, calculul diferenţial, numere complexe, statistica, probabilul).

Operând cu măsura mărimilor (număr, valoare), limbajul matematic, limbaj de referinţă, însoţeşte fiecare domeniu prin porţionarea specifică a raţionării, ajutând sectorul cu prelucrarea rapidă a datelor şi cu evoluţia optimă în contextul dezvoltării şi afirmării.

Referitor la numele ştiinţei, matematica, ţinând cont de originea greacă, mathema (studiu, ştiinţă), tike (dulap, listă), prin unire obţinându-se listă de cunoştinţe (o mare curiozitate pentru perioadele iniţiale) şi având în vedere că obiectul de studiu este numărul (măsura mărimilor) cu care se poate studia orice fenomen, se cade să oferim acestui demers legitimaţia măsura, îmbinând simplitatea cu profunzimea şi naturaleţea cu densitatea capitolelor sociale.

“Înțelepciunea este fiica experienței”
Leonardo da Vinci
(1452- 1519)

2. Articole și note matematice

Istoria (parțială) a unei inegalități

de Titu Zvonaru, Comănești

În G.M-B nr. 1/2023 a apărut următoarea inegalitate, propusă de Vasile Solovăstru:

Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive cu $a+b+c=1$, arătați că

$$\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}\geq\frac{1}{2}.$$

Pentru început, prezentăm două soluții.

Prima soluție: Deoarece $9b^2+1\geq 6b$ dar inegalitatea este cu sensul $"\geq"$, scriem inegalitatea din enunț sub forma

$$a-\frac{a}{1+9b^2}+b-\frac{b}{1+9c^2}+c-\frac{c}{1+9a^2}\leq 1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{9ab^2}{1+9b^2}+\frac{9bc^2}{1+9c^2}+\frac{9ca^2}{1+9a^2}\leq\frac{1}{2}.$$

Acum, folosind inegalitatea $9b^2+1\geq 6b$, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{9ab^2}{6b}+\frac{9bc^2}{6c}+\frac{9ca^2}{6a}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2,\text{ adevărat.}$$

Egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$.

A doua soluție: Vom folosi o inegalitate ajutătoare pentru a „sparge" inegalitatea dorită. Avem

$$\frac{a}{1+9b^2}\geq a\left(1-\frac{3b}{2}\right)\Leftrightarrow 3ab(3b-1)^2\geq 0.$$

Obținem $\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}\geq a+b+c-\frac{3}{2}(ab+bc+ca)\geq 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{2}$.

Apare o întrebare legitimă: care este legătură dintre condiția $a+b+c=1$ și acel coeficient egal cu 9; deoarece am văzut că egalitatea are loc dacă $a=\frac{1}{3}$, observăm că $9a^2=1$.

Pentru a lucra cu coeficienți mai mici, putem face substituțiile $a=\frac{x}{3},b=\frac{y}{3},c=\frac{z}{3}$. Obținem problema:

Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive cu $a+b+c=1$, arătați că

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}, \textbf{ (1).}$$

Inegalitatea (1) este una ciclică și arată foarte bine. De aceea e greu de crezut că este inedită. Și chiar nu este – exact sub această formă a fost propusă la Olimpiada din Bulgaria în anul 2003. Cel mai probabil că problema prezentată la început este o redescoperire, au trecut 20 de ani. Dar probleme care seamănă (poate prea mult) cu inegalitatea (1) au mai apărut, unele chiar în Gazeta Matematică:

1. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $x+y+z=\frac{3}{2}$, arătați că
$$\frac{x}{1+4y^2}+\frac{y}{1+4z^2}+\frac{z}{1+4x^2}\geq\frac{3}{4}.$$
2. Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive cu $a+b+c=18$, arătați că
$$\frac{a}{36+b^2}+\frac{b}{36+c^2}+\frac{c}{36+a^2}\geq\frac{1}{4}.$$
3. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=9$, arătați că
$$\frac{\sqrt{x}}{9+y}+\frac{\sqrt{y}}{9+z}+\frac{\sqrt{z}}{9+x}\geq\frac{1}{2}.$$
Problemele 1 și 3 au apărut în Gazeta Matematică (în anii 2016 și 2018); o altă „coincidență” – problemele 2 și 3 au fost propuse de același autor.

Asupra unor inegalități în triunghi

de D. M. Bătinețu-Giurgiu, București,
Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin și Neculai Stanciu, Buzău

Scopul acestei note este de a prezenta noi demonstrații pentru unele inegalități celebre în triunghi plecând de la o problemă din The American Mathematical Monthly (AMM).

Asociem unui triunghi ABC cu lungimile laturilor a,b,c, raza cercului înscris r, razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c, semiperimetrul p și aria S, triunghiul $A_1B_1C_1$ cu lungimile laturilor $a_1=\sqrt{a}, b_1=\sqrt{b}, c_1=\sqrt{c}$ și aria S_1 precum și triunghiul $A_2B_2C_2$ cu lungimile laturilor $a_2=\sqrt[4]{a}, b_2=\sqrt[4]{b}, c_2=\sqrt[4]{c}$ și aria S_2.

În AMM, Vol. 122, August-September 2015, pag. 700-701, *Mehmet Șahin*, Ankara University, Turkey, propune:

Problema 11857. Să se demonstreze că $S_1=\frac{1}{2}\sqrt{r(r_a+r_b+r_c)}$.

Soluția acestei probleme a fost dată de *Borislav Karaivanov* și *Tzvetalin S. Vassilev* în AMM, Vol. 124, May 2017, pag. 472-473.

O altă soluție. Cu formula lui *Heron* avem $16S_1^2=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$.

De asemenea $4r(r_a+r_b+r_c)=4\cdot\frac{S}{p}\left(\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)=\frac{4S^2}{p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=$
$$=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=(a-b+c)(a+b-c)+$$
$$+(b-a+c)(b+a-c)+(c-a+b)(c+a-b)=2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2.$$
Rezultă ușor concluzia.

Acum vom demonstra inegalitățile: $S_1\geq\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}$, (1) și $S_2\geq\frac{\sqrt[8]{27}}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{S}$, (2).

Demonstrația 1. $S_1=\frac{1}{2}\sqrt{r(r_a+r_b+r_c)}=\frac{1}{2}\sqrt{r(4R+r)}\overset{Doucet}{\geq}\frac{1}{2}\sqrt{r\cdot p\sqrt{3}}=$

$= \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{rp} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}$ și $S_2 \overset{(1)}{\geq} \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S_1} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}} = \frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{S} = \frac{\sqrt[8]{27}}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{S}$.

Demonstrația 2. $S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r(r_a + r_b + r_c)} = \frac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\sqrt[4]{(r_a + r_b + r_c)^2} \geq$

$\geq \frac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\sqrt[4]{3(r_ar_b + r_br_c + r_cr_a)} = \frac{1}{2}\sqrt{r}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{p^2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\cdot\sqrt{rp} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}$

O nouă demonstrație a inegalității lui Mitrinović, $p \geq 3\sqrt{3}r$.

$$2p = a + b + c = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \overset{Ionescu-Weitzenbock}{\geq} 4\sqrt{3}S_1 \overset{(1)}{\geq} 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{rp} \Leftrightarrow \sqrt{p} \geq \sqrt{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{r} \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt{3}r.$$

O nouă demonstrație a inegalității Ionescu – Weitzenböck, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

$$a^2 + b^2 + c^2 = a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 \overset{Goldner}{\geq} 16S_1^2 \overset{(1)}{\geq} 16\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}\right)^2 = 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot S = 4\sqrt{3}S.$$

O nouă demonstrație a inegalității lui Gordon, $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$.

$$ab + bc + ca = a_1^2b_1^2 + b_1^2c_1^2 + c_1^2a_1^2 \overset{Goldner}{\geq} 16S_1^2 \overset{(1)}{\geq} 16\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}\right)^2 = 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot S = 4\sqrt{3}S.$$

O nouă demonstrație a inegalității lui Tsintsifas, $\frac{x}{y+z}a^2 + \frac{y}{z+x}b^2 + \frac{z}{x+y}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$, $\forall x, y, z > 0$.

$$\sum\frac{x}{y+z}a^2 = \sum\frac{x}{y+z}a_1^4 = \sum\frac{x^2a_1^4}{xy+xz} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{(xa_1^2 + yb_1^2 + zc_1^2)^2}{2(xy+yz+zx)} \overset{Oppenheim}{\geq}$$

$$\overset{Oppenheim}{\geq} \frac{16(xy+yz+zx)S_1^2}{2(xy+yz+zx)} = 8S_1^2 \overset{(1)}{\geq} 8\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\sqrt{S}\right)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{4}S = 2\sqrt{3}S.$$

O soluție pentru o problemă din Crux Mathematicorum

de Marian Cucoaneș, Mărășești

În celebra revistă Crux Mathematicorum, numărul din martie (1995) a fost propusă (de către *Jun-Hua Huang* din China) - fără soluția autorului:

Problema 2029. Confirmați sau infirmați inegalitatea $\sum w_a w_b \geq 3\sqrt{3}F$, (1), unde w_a, w_b, w_c sunt bisectoarele interioare și F aria unui triunghi ABC.

În Crux Mathematicorum, numărul din martie (1996) este prezentată o singură soluție (trimisă de *Kee-Wai Lau* din Hong Kong). Aici vom prezenta o soluție mai simplă pentru inegalitatea (1).

$S=F=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $w_a=\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ și analoagele;

$\dfrac{w_a w_b}{4S}=\dfrac{4\sqrt{bcp(p-a)(acp(p-b)}}{4(b+c)(a+c)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\dfrac{\sqrt{abc^2p}}{(a+c)(b+c)\sqrt{p-c}}=$

$=\sqrt{\dfrac{c}{p-c}}\cdot\sqrt{\dfrac{pc}{(a+c(b+c)}}\cdot\sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+c)}}$. Notăm $x=\dfrac{a}{p-a},y=\dfrac{b}{p-b},z=\dfrac{c}{p-c}$,

$x,y,z>0$ și avem $xyz=x=y+z+2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=1\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{y}{y+2}+\dfrac{z}{z+2}=2$;

$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{x}{x+2},\dfrac{b}{a+c}=\dfrac{y}{y+2},\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{z}{z+2};\dfrac{pc}{(a+c)(b+c)}=\dfrac{x+y+2}{(x+2)(y+2)}$,

$\dfrac{pb}{(a+b)(b+c)}=\dfrac{x+z+2}{(x+2)(z+2)},\dfrac{pa}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{z+y+2}{(z+2)(y+2)};\dfrac{w_aw_b}{4S}=\dfrac{\sqrt{xyz}\cdot\sqrt{x+y+2}}{(x+2)(y+2)}$.

Cu aceste notații, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv astfel:

$$\sum\frac{\sqrt{xyz(x+y+2)}}{(x+2)(y+2)}\ge\frac{3\sqrt3}{4}\Leftrightarrow\sum(x+2)\sqrt{y+z+2}\ge\frac{3\sqrt3}{4}\cdot\frac{(x+2)(y+2)(z+2)}{\sqrt{xyz}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum(x+2)\sqrt{y+z+2}\right)^2\ge\frac{27}{16}\cdot\frac{(x+2)^2(y+2)^2(z+2)^2}{xyz},\ (2).$$

Fie $a,b,c,x,y,z>0$. Conform inegalității lui *Hölder* $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z})^2(ax^2+by^2+cz^2)\ge$

$$\ge\left(\sqrt[3]{(a\sqrt{x})^2ax^2}+\sqrt[3]{(b\sqrt{y})^2by^2}+\sqrt[3]{(c\sqrt{z})^2cz^2}\right)^3=(ax+by+cz)^3.$$

Atunci: $\left(\sum(z+2)\sqrt{x+y+2}\right)^2\left(\sum(z+2)(x+y+2)^2\right)\ge\left(\sum(z+2)(x+y+2)\right)^3$;

$\left(\sum(z+2)\sqrt{x+y+2}\right)^2\ge\dfrac{\left(\sum(z+2)(x+y+2)\right)^3}{\sum(z+2)(x+y+2)^2}$. Deci, pentru a demonstra (2) este suficient să

demonstrăm inegalitatea: $\dfrac{\left(\sum(z+2)(x+y+2)\right)^3}{\sum(z+2)(x+y+2)^2}\ge\dfrac{27}{16}\cdot\dfrac{(x+2)^2(y+2)^2(z+2)^2}{xyz}$, (3).

Din inegalitatea mediilor: $xyz=x+y+z+2\ge4\sqrt[4]{2xyz}\Leftrightarrow xyz\ge8$; $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}\ge3\sqrt[3]{8}=6$;

$xy+yz+zx\ge3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3\sqrt[3]{8^2}=12$. Deci, $xy+yz+zx\ge2(x+y+z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sum\dfrac{ab}{(p-a)(p-b)}\ge2\sum\dfrac{a}{p-a}$, unde notăm $\alpha=p-a,\beta=p-b,\gamma=p-c,(\alpha,\beta,\gamma>0)$

și avem $\sum\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}\right)\left(\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)\ge2\sum\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}\Leftrightarrow$ inegalitatea lui *Schur*.

Notăm: $A=x+y+z,B=xy+yz+zx$ și avem: $A,B>0,xyz=A+2$; $A\ge6;B\ge12;B\ge2A$;

$A^2\ge3B;\sum(x+2)(y+z+2)^2=\sum x\sum xy+4\left(\sum x\right)^2+4\sum xy+23\sum x+30=$

$=AB+4A^2+4B+23A+30$; $\sum(x+2)(y+z+2)=2(3A+B+6)$;

$\prod(x+2)=2\sum xy+5\sum x+10=5A+2B+10$. Folosind cele de mai sus, inegalitatea (3) se rescrie astfel: $\dfrac{(2(3A+B+6))^3}{AB+4A^2+4B+23A+30}\geq\dfrac{27(5A+2B+10)^2}{16(A+2)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 128(A+2)(3A+B+6)^3\geq 27(AB+4A^2+4B+23A+30)(5A+2B+10)^2.$$

Ultima inegalitate este adevărată, deoarece:

$$128(A+2)(3A+B+6)^3-27(AB+4A^2+4B+23A+30)(5A+2B+10)^2=$$
$$=756\cdot A^4+621\cdot A^3B+1323\cdot A^3+180\cdot A^2B^2-1404\cdot A^2B+20\cdot AB^3-10206\cdot A^2-1116\cdot AB^2-$$
$$-13068\cdot AB-176\cdot B^3-2952\cdot B^2-15552\cdot B-32508\cdot A-25704=$$
$$=(A-6)(756\cdot A^3+1503\cdot A^2+5196\cdot A+4284+20\cdot B^3+747\cdot B^2)+$$
$$+(A^2-3B)(180\cdot B^2+621\cdot AB+4356\cdot A)+(B-2A)(484\cdot B^2+968\cdot AB+2808)+$$
$$+(B-12)(532\cdot A^2+1530\cdot B)$$ și $A-6\geq 0; A^2-3B\geq 0; B-2A\geq 0; B-12\geq 0$.

Cea mai bună constantă pentru o inegalitate de tipul Țiu-Leuenberger

de **Marius Drăgan,** București și **Neculai Stanciu,** Buzău

În Revista Matematică și Fizică (R.M.F), Anul VI, nr. 5/1953, pag. 128 , ***Constantin-Ionescu-Țiu*** a propus problema:

847. *Să se arate că într-un triunghi oarecare avem*: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{R}$.

Leuenberger a publicat inegalitatea $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{\sqrt{3}}{R}$ în anul 1960 (vezi [1], pag. 54).

Acum, inegalitatea de mai sus se numește inegalitatea ***Țiu – Leuenberger*** (vezi[2]).

F. Leuenberger a demonstrat de asemenea inegalitatea $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2r}$.

Huang (1993), a propus următoarea problemă deschisă:

Găsiți cea mai mare constantă k astfel încât $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(k\cdot\dfrac{1}{R}+\dfrac{3-k}{2}\cdot\dfrac{1}{r}\right)$.

Shi, Sc. (1993), demonstrează $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r}\right)$.

Chen, J. (1993), dovedește $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{R}+\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{1}{r}\right)$.

Chen, Q. (1996), arată că $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{97}{77}\cdot\dfrac{1}{R}+\dfrac{67}{77}\cdot\dfrac{1}{r}\right)$.

În 2014, în *Journal of Inequalities and Applications* (a Springer Open Journal), ***Shan-He Wu și Yu-Ming Chu*** au obținut cea mai bună constantă $k=\sqrt[3]{2}$; i.e. au demonstrat că:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{R}+\frac{3-\sqrt[3]{2}}{2}\cdot\frac{1}{r}\right)$$

În această notă, vom găsi cea mai bună constantă k astfel încât inegalitatea

$p\le 2R+(3\sqrt{3}-4)r-k\cdot\frac{r}{R}(R-2r)$, (*), să fie adevărată în orice triunghi - cu notațiile obișnuite . Notăm $\frac{R}{r}=x\in[2,\infty)$. Din **inegalitatea lui *Blundon*** avem:

$$p\le\sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)^3}}\,.$$

Deci, $\sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)^3}}\le 2R+(3\sqrt{3}-4)r-k\cdot\frac{r}{R}(R-2r)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}}-2x\le 3\sqrt{3}-4-\frac{k(x-2)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x(x-2)^3}-x^2)+10x-1}{\sqrt{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}}+2x}\le 3\sqrt{3}-4-\frac{k(x-2)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{-4x(3x^2-6x+4)}{\sqrt{x(x-2)^3}+x^2}+10x-1}{\sqrt{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}}+2x}\le 3\sqrt{3}-4-\frac{k(x-2)}{x}$$

, iar pentru $x\to\infty$, obținem $1\le 3\sqrt{3}-4-k\Leftrightarrow k\le 3\sqrt{3}-5$. Vom demonstra că, $k=3\sqrt{3}-5$ este cea mai bună constantă pentru (*).

Teoremă. În orice triunghi ABC, cu notațiile obișnuite este adevărată inegalitatea:

$$p\le 2R+(3\sqrt{3}-4)r-(3\sqrt{3}-5)\cdot\frac{r}{R}(R-2r)\,.$$

Demonstrație. Folosind inegalitatea fundamentală a triunghiului – inegalitatea lui *Blundon* este suficient să demonstrăm

$$\sqrt{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}}\le 2x+3\sqrt{3}-4-\frac{x-2}{x}(3\sqrt{3}-5)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}}\le 2x^2+x+6\sqrt{3}-10$$

$$\Leftrightarrow 2x^4+10x^3-x^2+2x^2\sqrt{x(x-2)^3}\le 4x^4+x^2+(6\sqrt{3}-10)^2+4x^3+(24\sqrt{3}-40)x^2+(12\sqrt{3}-20)x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2\sqrt{x(x-2)^3}\le 2x^4-6x^3+(24\sqrt{3}-38)x^2+(12\sqrt{3}-20)x+(6\sqrt{3}-10)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\sqrt{x(x-2)^3}\le\left(x^3-x^2+(12\sqrt{3}-21)x+30\sqrt{3}-52\right)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2-2x}\le x^3-x^2+(12\sqrt{3}-21)x+30\sqrt{3}-52\,\Big|\;()^2$$

$$\Leftrightarrow (24\sqrt{3}-41)x^4+(36\sqrt{3}-62)x^3+(977-564\sqrt{3})x^2+(24\sqrt{3}-42)(30\sqrt{3}-52)x+$$

$+(30\sqrt{3}-52)^2\ge 0$, adevărată $\forall x\ge 2$. Din teorema de mai sus și $k\le 3\sqrt{3}-5$ avem

$$p\le 2R+(3\sqrt{3}-4)r-(3\sqrt{3}-5)\cdot\frac{r}{R}(R-2r)\le 2R+(3\sqrt{3}-4)r-k\cdot\frac{r}{R}(R-2r),$$

ceea ce demonstrează că, $k=3\sqrt{3}-5$ este cea mai bună constantă pentru inegalitatea (*).

Acest rezultat a fost stabilit prin altă metodă, în 2014 de *Shan-He Wu* și *Yu-Ming Chu* în *Journal of Inequalities and Applications* (a Springer Open Journal).

Bibliografie.

1. **O. Bottema et. all**, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.
2. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu**, *Asupra unor inegalități din Gazeta Matematică*, Sclipirea Minții, Nr. 30, 2022, 12-14.

Pornind de la o problemă de clasa a V-a

Daniel Văcaru, Pitești

Enunțul problemei la care facem referire este următorul:

Să se demonstreze că suma pătratelor a 5 numere naturale consecutive este multiplu de 5.

Problema a apărut în G.M.2/1960, iar autorul său este Eugen St.Iacob.

Am culese această problemă de pe site-ul d-lui profesor Ștefan Gatachiu, cu link-ul https://probsapt.blogspot.com/2023/01/gimnaziu-saptamana-2-16012023-22012023.html?m=1

Rezolvarea este simplă:

Fie $a; a+1. a+3; a+4,\ a\in\mathbb{N}$. Atunci găsim $a^2+(a+1)^2+(a+3)^2+(a+4)^2=$

$=a^2+(a^2+2a+1)+(a^2+6a+9)+(a^2+8a+16)=\ 5a^2+20a+30=5(a^2+4a+6)$.

Este clar că acest număr se divide prin 5. Să încercăm să generalizăm.

Fie *n* numere naturale consecutive. Este oare suma pătratelor lor un număr divizibil cu *n*?

Primul contraexemplu este pentru n=2. Avem: $1^2+2^2=1+4=5$ care nu este divizibil cu 2.

Să luăm acum un număr prim. El este de forma $6k+1$ sau $6k+5$.

Atunci $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+....+(a+n-1)^2=\ n\cdot a^2+2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\right)\cdot a+\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)=$

$=n\cdot a^2+2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot a+\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}=$

Să presupunem că n este număr prim de forma $n = 6k + 1$. Atunci ultimul termen este, de fapt, $\frac{6k(6k+1)(12k+1)}{6}=k\cdot(6k+1)\cdot(12k+1)$. Să considerăm acum că n este de forma $n = 6k + 5$. Atunci ultima fracție este $\frac{(6k+5)(6k+6)(12k+9)}{6}=(6k+5)\cdot(k+1)\cdot(12k+9)$

Așadar, propoziția este adevărată pentru orice număr prim. Poate cititorul va reuși să se ocupe de numerele pare.

Patru metode de rezolvare a unei probleme cu numere complexe

Ovidiu Țâțan, Rm. Sărat

Enunț: Fie $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ **cu proprietățile** $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$ **și** $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. **Să se calculeze** $|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|$.

Soluția 1 (algebrică):

Din $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\Rightarrow|z_1|^2=|z_2|^2=|z_3|^2=1\Rightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}=z_3\cdot\overline{z_3}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\overline{z_1}=\frac{1}{z_1},\overline{z_2}=\frac{1}{z_2},\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$. Cum $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1\Rightarrow z_1^2\cdot z_3+z_2^2\cdot z_3+z_3^2\cdot z_1=z_1\cdot z_2\cdot z_3\,(1)$. Din

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1\Rightarrow\overline{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}}=1\Rightarrow\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}}+\frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}}=1\Rightarrow\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow z_1\cdot z_3^2+z_2\cdot z_1^2+z_3\cdot z_2^2=z_1\cdot z_2\cdot z_3\,(2)$, Scăzând din (1) relația (2) și dând factori comuni convenabil, se obține: $(z_1-z_2)\cdot(z_2-z_3)\cdot(z_3-z_1)=0$, adică $z_1=z_2$ sau $z_1=z_3$ sau $z_2=z_3$.

Dacă $z_1=z_2\Rightarrow\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=0\Rightarrow z_1^2+z_3^2=0\Rightarrow z_3=i\cdot z_1$ sau $z_3=-i\cdot z_1$.

Atunci $|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|z_1+2\cdot z_1\pm 3i\cdot z_1|=|z_1\cdot(3\pm 3\cdot i)|=|z_1|\cdot|3\pm 3\cdot i|=3\sqrt{2}$.

Dacă $z_2=z_3\Rightarrow z_1=i\cdot z_2$ sau $z_1=-i\cdot z_2$ și atunci

$|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|5\cdot z_2\pm i\cdot z_2|=|z_2|\cdot|5\pm i|=\sqrt{26}$.

Dacă $z_3=z_1\Rightarrow z_2=i\cdot z_1$ sau $z_2=-i\cdot z_1$ și atunci

$|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|4\cdot z_1\pm 2\cdot i\cdot z_1|=|z_1|\cdot|4\pm 2\cdot i|=2\sqrt{5}$.

Soluția 2 (algebrică):

Notăm cu $a=\frac{z_1}{z_2},b=\frac{z_2}{z_3},c=\frac{z_3}{z_1}$. Rezultă că $a+b+c=1,a\cdot b\cdot c=1$ și

$|a|=|b|=|c|=1$ deoarece $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Obținem atunci faptul că $\overline{a}=\frac{1}{a},\overline{b}=\frac{1}{b},\overline{c}=\frac{1}{c}$.

Din $a+b+c=1\Rightarrow\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Rightarrow a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=a\cdot b\cdot c\Rightarrow a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=1$.

Atunci a,b,c sunt soluțiile ecuației cu necunoscuta t: $t^3-t^2+t-1=0$ cu soluțiile $t_1=1,t_2=i,t_3=-i$ și deci $a=1,b=i,c=-i$ și permutările acestora.

Rezultă că $\frac{z_1}{z_2}=1,\frac{z_2}{z_3}=i,\frac{z_3}{z_1}=-i$, adică

$z_2=z_1,z_3=-i\cdot z_1\Rightarrow\Rightarrow|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|3\cdot z_1-3\cdot i\cdot z_1|=3\sqrt{2}$.

Analizând și celelalte cazuri, se obțin și celelate rezultate de la Soluția 1.

Soluția 3 (folosind interpretarea geometrică a numerelor complexe)

Fie $a=\frac{z_1}{z_2},b=\frac{z_2}{z_3},c=\frac{z_3}{z_1}$. Cum $|a|=|b|=|c|=1$, putem considera ΔABC cu vârfurile A,B,C cu afixele a,b respectiv c înscris în cercul cu centrul în O cu afixul 0 și de rază 1. Relația din anuț se scrie $a+b+c=1$. Dar $a+b+c=h$ unde h este afixul ortocentrului ΔABC, deci $h=1$, adică ortocentrul triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului ABC, deci triunghiul ABC este dreptunghic. Rezultă atunci că una dintre laturile triunghiului este diametru în cercul circumscris.

Fie BC diametru, atunci b,c sunt diametral opuse și deci $b+c=0\Rightarrow a=1\Rightarrow z_1=z_2$ și

$z_3=i\cdot z_1$ sau $z_3=-i\cdot z_1$ și atunci $|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|z_1+2\cdot z_1\pm 3i\cdot z_1|=|z_1\cdot(3\pm 3\cdot i)|=|z_1|\cdot|3\pm 3\cdot i|=3\sqrt{2}$.

Studiind și celelalte situații care mai pot exista, se obțin aceleași rezultate ca și în cazul soluțiilor algebrice.

Soluția 4 (folosind scrierea sub formă trigonometrică a unui număr complex)

Fie $a,b,c\in[0,2\pi)$ astfel încât $z_1=\cos a+i\sin a, z_2=\cos b+i\sin b, z_3=\cos c+i\sin c$. Din

$$\frac{z_{1+}}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1\Rightarrow\cos(a-b)+i\sin(a-b)+\cos(b-c)+i\sin(b-c)+\cos(c-a)+i\sin(c-a)=1\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos(a-b)+\cos(b-c)+\cos(c-a)=1\\ \sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)=0\end{cases}$$

Cum $\sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)=-4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}$ obținem $\sin\frac{a-b}{2}=0$ sau $\sin\frac{b-c}{2}=0$ sau $\sin\frac{c-a}{2}=0$. Deoarece $a,b,c\in[0,2\pi)\Rightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$.

Dacă $a=b\Rightarrow\cos 0+\cos(b-c)+\cos(c-b)=1\Rightarrow\cos(b-c)=0\Rightarrow b-c=\frac{\pi}{2}$ sau $b-c=-\frac{\pi}{2}$.

Dacă $b-c=\frac{\pi}{2}\Rightarrow c=b-\frac{\pi}{2}\Rightarrow z_3=\cos\left(b-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(b-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow z_3=\sin b-i\cos b\Rightarrow$
$\Rightarrow z_3=-i\cdot(\cos b+i\sin b)\Rightarrow z_3=-i\cdot z_2$.

Dacă $b-c=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow z_3=i\cdot z_2$. Deoarece $a=b\Rightarrow z_2=z_1$ și deci $z_3=i\cdot z_1$ sau $z_3=-i\cdot z_1$ și se obține $|z_1+2\cdot z_2+3\cdot z_3|=|z_1+2\cdot z_1\pm 3i\cdot z_1|=|z_1\cdot(3\pm 3\cdot i)|=|z_1|\cdot|3\pm 3\cdot i|=3\sqrt{2}$.

Analog se procedează și în cazurile $b=c$ sau $c=a$ și se obțin aceleași rezultate de la soluțiile anterioare.

Bibliografie:
https://www.youtube.com/watch?v=RsIm-OFKQUI

Asupra unei inegalități geometrice

George-Florin Șerban, Brăila

În revista “**Romanian Mathematical Magazin**”, domnul profesor **Marin Chirciu**, publică următoarea problemă:

Să se demonstreze că în orice triunghi ΔABC are loc inegalitatea

$$(h_a+r_a)(h_b+r_b)(h_c+r_c)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2.$$

În cele ce urmează vom prezenta nouă metode de rezolvare și generalizarea, pentru această problemă. Pentru început, vom prezenta noțiunile teoretice aplicate.

Noțiuni teoretice. Fie ΔABC, atunci au loc următoarele formule, notațiile sunt cunoscute.

1) Inegalitatea lui Doucet $p\sqrt{3}\le 4R+r$. ; **2)** $\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^2(p^2+r^2+2Rr)}{2R}$.

3) Inegalitatea lui Gerretsen $16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. ; **4)Inegalitatea lui Euler,** $R\ge 2r$.

5) $h_a\le l_a\le m_a$. **6)Inegalitatea lui Leuenbergers** $\sum_{cyc}m_a\le 4R+r$. ; **7)** $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$.

8) $\prod_{cyc}(r_a+r_b)=4Rp^2$. ; **9)** $l_a^2\le r_br_c$. ; **10)Inegalitatea lui Blundon-Gerretsen** $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

11)inegalitatea lui Mitrinovic, $3\sqrt{3}r\le p\le\frac{3\sqrt{3}R}{2}$. ; **12)** $\sum_{cyc}h_a\le 4R+r$. ; **13)** $\sum_{cyc}r_a=4R+r$.

14) $\sum_{cyc}r_ar_b=p^2$. **15)** $\sum_{cyc}h_a=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$. ; **16)** $\prod_{cyc}(b+c)=2p(p^2+r^2+2Rr)$.

Metoda 1.

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\prod_{cyc}\left(\frac{2S}{a}+\frac{S}{p-a}\right)=S^3\prod_{cyc}\frac{2p-2a+a}{a(p-a)}=p^3r^3\,\frac{\prod_{cyc}(b+c)}{abc(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^3r^3\cdot 2p(p^2+r^2+2Rr)}{4Rrp\cdot pr^2}=\frac{p^2(p^2+r^2+2Rr)}{2R}\le\frac{(4R+r)^2(p^2+r^2+2Rr)}{6R},$$ din

inegalitatea lui Doucet $p\sqrt{3}\le 4R+r$. Aplicăm **inegalitatea lui Gerretsen** $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$,

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{(4R+r)^2(p^2+r^2+2Rr)}{6R}\le\frac{(4R+r)^2(4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr)}{6R}=\frac{(4R+r)^2(4R^2+6Rr+4r^2)}{6R}.$$ În

final este suficient să demonstrăm inegalitatea $\frac{(4R+r)^2(4R^2+6Rr+4r^2)}{6R}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Rezultă

$4R^2+6Rr+4r^2\le 8R^2,\ 4R^2-6Rr-4r^2\ge 0,\ (R-2r)(4R+2r)\ge 0,$ adevărat, deoarece din inegalitatea lui Euler, $R\ge 2r$ deci $R-2r\ge 0$ și $4R+2r>0$. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 2. Folosim **inegalitatea** $h_a\le m_a$, **inegalitatea mediilor** $M_g\le M_a$ **și inegalitatea lui Leuenbergers** $\sum_{cyc}m_a\le 4R+r$.

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\prod_{cyc}(m_a+r_a)\le\left(\frac{\sum_{cyc}m_a+\sum_{cyc}r_a}{3}\right)^3\le\left(\frac{4R+r+4R+r}{3}\right)^3,$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\left[\frac{2(4R+r)}{3}\right]^3=\frac{8(4R+r)^3}{27}.$$ Este suficient să demonstrăm inegalitatea

$\frac{8(4R+r)^3}{27}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Rezultă $8R+2r\le 9R,\ R\ge 2r,$ adevărat inegalitatea lui Euler. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 3. Folosim lema: $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$. Rezultă $h_a=\frac{2r_br_c}{r_b+r_c}$. În continuare folosim lema, inegalitatea mediilor, $M_h\le M_g$, **inegalitatea lui Cauchz-Schwarz și inegalitatea lui Doucet,**

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\prod_{cyc}\left(\frac{2r_br_c}{r_b+r_c}+r_a\right)\le\prod_{cyc}(\sqrt{r_br_c}+r_a)=\prod_{cyc}(\sqrt{r_b}\sqrt{r_c}+\sqrt{r_a}\sqrt{r_a})\le\prod_{cyc}\sqrt{(r_b+r_a)(r_c+r_a)},$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\prod_{cyc}\sqrt{(r_b+r_a)(r_c+r_a)}=\prod_{cyc}(r_a+r_b)=4Rp^2\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2.$$ Egalitate are loc dacă triunghiul

ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 4. $$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\prod_{cyc}\left(\frac{2S}{a}+\frac{S}{p-a}\right)=S^3\prod_{cyc}\frac{2p-2a+a}{a(p-a)}=\frac{p^3r^3\prod_{cyc}(b+c)}{\prod_{cyc}a\prod_{cyc}(p-a)}=\frac{p^3r^3\prod_{cyc}(b+c)}{4Rrp\cdot pr^2},$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^3r^3\prod_{cyc}(b+c)}{4Rrp\cdot pr^2}=\frac{p\prod_{cyc}(b+c)}{4R}.$$ În continuare folosim **inegalitatea mediilor** $M_g\le M_a$ **și inegalitatea lui Doucet,**

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p\prod_{cyc}(b+c)}{4R}\le\frac{p}{4R}\cdot\left(\frac{\sum_{cyc}(b+c)}{3}\right)^3=\frac{64p^4}{108R}=\frac{16p^4}{27R}\le\frac{16(4R+r)^4}{243R}.$$ Este suficient să demonstrăm inegalitatea $\frac{16(4R+r)^4}{243R}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Rezultă $4(4R+r)^2\le 81R^2$, $8R+2r\le 9R$, $R\ge 2r$, adevărat inegalitatea lui Euler. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 5. Folosim lema: $l_a^2\le r_b r_c$. În continuare folosim inegalitatea $h_a\le l_a$, lema, **inegalitatea lui Cauchy-Schwarz** și **inegalitatea lui Blundon-Gerretsen** $p^2\le\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\prod_{cyc}(l_a+r_a)\le\prod_{cyc}(\sqrt{r_b r_c}+r_a)=\prod_{cyc}(\sqrt{r_b}\sqrt{r_c}+\sqrt{r_a}\sqrt{r_a})\le\prod_{cyc}\sqrt{(r_b+r_a)(r_c+r_a)},$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\prod_{cyc}\sqrt{(r_b+r_a)(r_c+r_a)}=\prod_{cyc}(r_a+r_b)=4Rp^2\le p^2\le\frac{4R\cdot R(4R+r)^2}{2(2R-r)}=\frac{2R^2(4R+r)^2}{2R-r}.$$ Este suficient să demonstrăm inegalitatea $\frac{2R^2(4R+r)^2}{2R-r}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Rezultă $3R\le 4R-2r$, $R\ge 2r$, adevărat inegalitatea lui Euler. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 6.Aplicăm **inegalitatea mediilor** $M_g\le M_a$ **și inegalitatea lui Gerretsen**.

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\left(\frac{\sum_{cyc}h_a+\sum_{cyc}r_a}{3}\right)^3\le\left(\frac{\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}+4R+r}{3}\right)^3\le\left(\frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+4Rr+8R^2+2Rr}{6R}\right)^3,$$

$$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\left(\frac{12R^2+10Rr+4r^2}{6R}\right)^3=\frac{(6R^2+5Rr+2r^2)^2}{27R^3}.$$ Este suficient să demonstrăm inegalitatea $\frac{(6R^2+5Rr+2r^2)^2}{27R^3}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$, rezultă $\frac{R}{r}=x\ge 2$ și inegalitatea devine $36x^4(4x+1)^2\ge(6x^2+5x+2)^3$. Mai întâi demonstrăm inegalitatea $(4x+1)^2\ge\frac{9(6x^2+5x+2)}{4}$, $(\forall)x\ge 2$. Rezultă $64x^2+32x+4\ge 54x^2+45x+18$, $10x^2-13x-14\ge 0$, $(x-2)(10x+7)\ge 0$, adevărat $(\forall)x\ge 2$ deoarece $x-2\ge 0$ și $10x+7>0$. Apoi demonstrăm inegalitatea $36x^4\ge\frac{4(6x^2+5x+2)^2}{9}$, $(\forall)x\ge 2$. Rezultă $6x^2\ge\frac{2(6x^2+5x+2)}{3}$, $18x^2\ge 12x^2+10x+4$, $6x^2-10x-4\ge 0$, $(x-2)(6x+2)\ge 0$, adevărat $(\forall)x\ge 2$ deoarece $x-2\ge 0$ și $6x+2>0$. Înmulțim cele două inegalități și obținem inegalitatea cerută. $36x^4(4x+1)^2\ge\frac{9(6x^2+5x+2)}{4}\cdot\frac{4(6x^2+5x+2)^2}{9}=(6x^2+5x+2)^3$. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 7. Folosim lema $\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^2(p^2+r^2+2Rr)}{2R}$ iar apoi aplicăm **inegalitea lui Gerretsen**.

$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^2(p^2+r^2+2Rr)}{2R}\le\frac{(4R^2+4Rr+3r^2)(4R^2+4Rr+3r^2+r^2+2Rr)}{2R}$,

$\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{(4R^2+4Rr+3r^2)(4R^2+6Rr+4r^2)}{2R}=\frac{(4R^2+4Rr+3r^2)(2R^2+3Rr+2r^2)}{R}$. Este suficient să demonstrăm inegalitatea $\frac{(4R^2+4Rr+3r^2)(2R^2+3Rr+2r^2)}{R}\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Din inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$, rezultă $\frac{R}{r}=x\ge 2$ și inegalitatea devine $4x^2(4x+1)^2\ge 3(4x^2+4x+3)(2x^2+3x+2)$. Mai întâi demonstrăm inegalitatea $(4x+1)^2\ge 3(4x^2+4x+3),(\forall)x\ge 2$. Rezultă $16x^2+8x+1\ge 12x^2+12x+9$, $4x^2-4x-8\ge 0$, $(x-2)(4x+4)\ge 0$, adevărat $(\forall)x\ge 2$ deoarece $x-2\ge 0$ și $4x+4>0$. Apoi demonstrăm inegalitatea $4x^2\ge 2x^2+3x+2,(\forall)x\ge 2$. Rezultă $2x^2-3x-2\ge 0$, $(x-2)(2x+1)\ge 0$, adevărat $(\forall)x\ge 2$ deoarece $x-2\ge 0$ și $2x+1>0$. Înmulțim cele două inegalități și obținem inegalitatea cerută $4x^2(4x+1)^2\ge 3(4x^2+4x+3)(2x^2+3x+2)$. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 8.

Demonstrăm inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\prod_{cyc}(r_b+r_c)$. Rezultă

$\prod_{cyc}(h_a+r_a)=\frac{p^2(p^2+r^2+2Rr)}{2R}\le\prod_{cyc}(r_b+r_c)=4Rp^2$, $p^2+r^2+2Rr\le 8R^2$, $p^2\le 8R^2-2Rr-r^2$. Aplic ăm **inegalitatea lui Mitrinovic**, $p\le\frac{3\sqrt{3}R}{2}$. Rezultă $p^2\le\frac{27R^2}{4}$. Este suficient să arătăm că $\frac{27R^2}{4}\le 8R^2-2Rr-r^2$. Rezultă $32R^2-8Rr-4r^2\ge 27R^2$, $5R^2-8Rr-4r^2\ge 0$, $(R-2r)(5R+2r)\ge 0$, adevărat, deoarece din inegalitatea lui Euler, $R\ge 2r$ deci $R-2r\ge 0$ și $5R+2r>0$.

Folosim inegalitatea $(\sum_{cyc}x)^2\ge 3\sum_{cyc}xy$. Rezultă $1\le\frac{(\sum_{cyc}r_a)^2}{3\sum_{cyc}r_ar_b}=\frac{(4R+r)^2}{3p^2}$. Înmulțim cele două inegalități $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{(4R+r)^2}{3p^2}\cdot 4Rp^2=\frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(h_a+r_a)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Metoda 9 și **Generalizare.**

Generalizare. Să se demonstreze inegalitatea $(\lambda h_a+\mu r_a)(\lambda h_b+\mu r_b)(\lambda h_c+\mu r_c)\le\frac{4R}{3}(4R+r)^2$ pentru orice $\lambda,\mu>0$ cu $\lambda+\mu=2$.

Folosim lema $\sum_{cyc}h_a\le 4R+r$ și inegalitatea mediilor $M_g\le M_a$. Rezultă

$\prod_{cyc}(\lambda h_a+\mu r_a)\le\left(\frac{\lambda\sum_{cyc}h_a+\mu\sum_{cyc}r_a}{3}\right)^3\le\left[\frac{\lambda(4R+r)+\mu(4R+r)}{3}\right]^3=\left[\frac{(\lambda+\mu)(4R+r)}{3}\right]^3=\frac{8(4R+r)^3}{27}$.

Este suficient să arătăm că $\frac{8(4R+r)^3}{27} \le \frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Rezultă $8R+2r \le 9R,\ R \ge 2r,$ adevărat inegalitatea lui Euler. Egalitate are loc dacă triunghiul ΔABC este echilateral. În concluzie, are loc inegalitatea $\prod_{cyc}(\lambda h_a + \mu r_a) \le \frac{4R}{3}(4R+r)^2$. Pentru $\lambda = \mu = 1$ obținem $\prod_{cyc}(h_a + r_a) \le \frac{4R}{3}(4R+r)^2$.

Bibliografie.
[1]"Romanian Mathematical Magazin", Daniel Sitaru.
[2]„Inegalități cu linii importante în triunghi". Marin Chirciu. Editura Paralela 45.
[3]„Inegalități geometrice", vol 1-2.Marin Chirciu. Editura Paralela 45.
[4]„Inegalități trigonometrice", vol 1-2.Marin Chirciu. Editura Paralela 45.

profesor C.N.P. "D.P.Perpessicius", Brăila

About some problems from Mathematical Reflections 1/2023

Marin Chirciu , Pitești

J614. If $a,b,c>0$**,** $abc=1$ **then** $\sum \frac{a}{\sqrt{1+bc(b+c)}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$**.** **Mircea Becheanu, Canada**

Solution: Wee have $\sum \frac{a}{\sqrt{1+bc(b+c)}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sum \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b+c}{a}}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sum a\sqrt{a} \ge \frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{3}}.$$

We were considering the function $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x\sqrt{x}$.

We have $f(x)=x^{\frac{3}{2}},\ f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\ f''(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$. Because $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}>0 \Rightarrow f$ is a convex function. Using Jensen-s inequality we get:

$$f(a)+f(b)+f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \Leftrightarrow a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c} \ge 3\cdot\frac{a+b+c}{3}\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sum a\sqrt{a} \ge \frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{3}}$. Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Remark._ The problem can develop.

If $a,b,c>0$**,** $abc=1$ **and** $n\in\mathbf{N}, n\ge 2$ **then** $\sum \frac{a}{\sqrt[n]{1+bc(b+c)}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[n]{3}}$**.** **Marin Chirciu**

Solution: Wee have $\sum \frac{a}{\sqrt[n]{1+bc(b+c)}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[n]{3}} \Leftrightarrow \sum \frac{a}{\sqrt[n]{1+\frac{b+c}{a}}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[n]{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{a\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a+b+c}} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[n]{3}} \Leftrightarrow \sum a\sqrt[n]{a} \ge \frac{(a+b+c)\sqrt[n]{a+b+c}}{\sqrt[n]{3}}.$$

We were considering the function $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=x\sqrt[n]{x}$.

We have $f(x)=x^{\frac{n+1}{n}},\ f'(x)=\frac{n+1}{n}x^{\frac{1}{n}},\ f''(x)=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$.

Because $f''(x)=\frac{n+1}{n^2}x^{\frac{1-n}{n}}>0\Rightarrow f$ is a convex function. Using Jensen-s inequality we get:

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\Leftrightarrow a\sqrt[n]{a}+b\sqrt[n]{b}+c\sqrt[n]{c}\ge 3\cdot\frac{a+b+c}{3}\sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum a\sqrt[n]{a}\ge\frac{(a+b+c)\sqrt[n]{a+b+c}}{\sqrt[n]{3}}.$$ Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

J615. In ΔABC $\frac{m_bm_c}{(m_b+m_c)^2}\le\frac{2a^2+bc}{8a^2+(b+c)^2}$. **Nguyen Viet Hung, Vietnam**

<u>Solution:</u> **Lemma** In ΔABC $\frac{m_b^2+m_c^2}{m_bm_c}\ge\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}$.

<u>Proof.</u> Using $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ we have $m_b^2+m_c^2=\frac{4a^2+b^2+c^2}{4}$ and $4m_bm_c\le 2a^2+bc\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{m_b^2+m_c^2}{m_bm_c}\ge\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}$ .with equality for $b=c$.

Using **Lemma** $\frac{m_b^2+m_c^2}{m_bm_c}\ge\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}\Leftrightarrow\frac{m_b^2+m_c^2}{m_bm_c}+2\ge\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+bc}+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{(m_b+m_c)^2}{m_bm_c}\ge\frac{4a^2+(b+c)^2}{2a^2+bc}\Leftrightarrow\frac{m_bm_c}{(m_b+m_c)^2}\le\frac{2a^2+bc}{8a^2+(b+c)^2}$ .Equality occurs if and only if $b=c$.

J616. If $a,b,c>0$**,** $a+b+c=3$ **then** $\sum\frac{a(b+c)^2}{a+3}\le 3$**.** **Nguyen Viet Hung, Vietnam**

<u>Solution:</u> We have $\sum\frac{a(b+c)^2}{a+3}\le 3\Leftrightarrow\sum\frac{a(3-a)^2}{a+3}\le 3$.

We were considering the function $f:(0,3)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x(3-x)^2}{x+3}$. Using Tangent Line Method we have: $f(x)=\frac{x(3-x)^2}{x+3}$, $f'(x)=\frac{2x^3+3x^2-36x+27}{(x+3)^2}$, $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{-1}{4}$.

The equation of the tangent in $x_0=1$ is: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{-1}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{-x+5}{4}$.

We have $f(x)=\frac{x(3-x)^2}{x+3}\le\frac{-x+5}{4}\Leftrightarrow 4x^3-23x^2+34x-15\le 0\Leftrightarrow(x-1)^2(4x-15)\le 0$,

true because $(x-1)^2\ge 0$ and $(4x-15)<0$, for $0<x<3$. From $\frac{x(3-x)^2}{x+3}\le\frac{-x+5}{4}$, $0<x<3$, we get:

$\sum\frac{a(3-a)^2}{a+3}\le\sum\frac{-a+5}{4}=\frac{-\sum a+15}{4}=\frac{-3+15}{4}=3$. Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.

Remark. The problem can develop. **In** ΔABC $\sum\frac{\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}{r+r_a}\le\frac{1}{3r^3}$**.** **Marin Chirciu**

<u>Soluție</u>: **Lema.** If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then $\sum\frac{x(y+z)^2}{x+3}\le 3$.

See above. Using $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}\Leftrightarrow\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1\Leftrightarrow\frac{3r}{r_a}+\frac{3r}{r_b}+\frac{3r}{r_c}=3$.

With substitution $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ we have $x+y+z=3$. Using **Lema**

for $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ we get: $\sum\frac{\frac{3r}{r_a}\left(\frac{3r}{r_b}+\frac{3r}{r_c}\right)^2}{\frac{3r}{r_a}+3}\le 3\Leftrightarrow\sum\frac{\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2}{r+r_a}\le\frac{1}{3r^3}$.

Equality occurs if and only if triangle is equilateral.

Remark. The problem can develop. In ΔABC $\sum\frac{\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2}{r+h_a}\le\frac{1}{3r^3}$.

Soluție: See above and $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

J617. ΔABC **is equilateral if and only if** $2\left(a^2\cos A+b^2\cos B+c^2\cos C\right)=\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}$.

Mihaela Berindeanu, Romania

Solution: Lemma In ΔABC $2\left(a^2\cos A+b^2\cos B+c^2\cos C\right)\le\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}$.

Proof. $2\sum a^2\cos A\le\sqrt{3\sum a^4}\Leftrightarrow 4\left(\sum a^2\cos A\right)^2\le 3\sum a^4$.

Using $\sum a^2\cos A=\frac{r\left(3p^2-8R^2-6Rr-r^2\right)}{R}$ and $\sum a^4=2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]$,

the inequality is written:

$$4\cdot\frac{r^2\left(3p^2-8R^2-6Rr-r^2\right)^2}{R^2}\le 2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r^2\left(3p^2-8R^2-6Rr-r^2\right)^2\le R^2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2r^2\left(3p^2-8R^2-6Rr-r^2\right)^2\le R^2\left[p^2\left(p^2-6r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2\right]\Leftrightarrow$$

$$p^4\left(3R^2-18r^2\right)+p^2\left(-24R^3r+78R^2r^2+72Rr^3+12r^4\right)-r^2\left(80R^4+168R^3r+125R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\ge 0$$

$$p^2\left[3p^2\left(R^2-6r^2\right)+\left(-24R^3r+78R^2r^2+72Rr^3+12r^4\right)\right]\ge r^2\left(80R^4+168R^3r+125R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right).$$

We distinguish the cases:

Case1).If $\left(R^2-6r^2\right)\ge 0$, using Gerretsen Inequality $p^2\ge 16Rr-5r^2$, we get:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[3\left(16Rr-5r^2\right)\left(R^2-6r^2\right)+r\left(-24R^3+78R^2r+72Rr^2+12r^3\right)\right]\ge$$

$$\ge r^2\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(16R-5r\right)\left[3\left(16R-5r\right)\left(R^2-6r^2\right)+\left(-24R^3+78R^2r+72Rr^2+12r^3\right)\right]\ge$$

$$\ge\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 19R^4+45R^3r-242R^2r^2+168Rr^3-32r^4\ge 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(R-2r\right)\left(19R^3+83R^2r-76Rr^2+16r^3\right)\ge 0$,true Euler inequality $R\ge 2r$.

Case2).If $\left(R^2-6r^2\right)<0$, using Gerretsen Inequality $p^2\ge 4R^2+4Rr+3r^2$, we get:

$$\left(16Rr-5r^2\right)\left[3\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(R^2-6r^2\right)+r\left(-24R^3+78R^2r+72Rr^2+12r^3\right)\right]\ge$$

$\geq r^2\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$

$(16R-5r)\left[3\left(4R^2+4Rr+3r^2\right)\left(R^2-6r^2\right)+r\left(-24R^3+78R^2r+72Rr^2+12r^3\right)\right]\geq$

$\geq r\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$

$(16R-5r)\left(12R^4-12R^3r+15R^2r^2-42r^4\right)\geq r\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 192R^5-252R^4r+300R^3r^2-75R^2r^3-672Rr^4+210r^5\geq$

$\geq r\left(80R^4+168R^3r+101R^2r^2+24Rr^3+2r^4\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 48R^5-83R^4r+33R^3r^2-44R^2r^3-174Rr^4+52r^5\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (R-2r)\left(48R^4+13R^3r+59R^2r^2+74Rr^3-26r^4\right)\geq 0$,true Euler inequality $R\geq 2r$.

Equality occurs if and only if triangle is equilateral.

Using **Lema** we have: $2\left(a^2\cos A+b^2\cos B+c^2\cos C\right)\leq\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}$, with equality if and only if triangle is equilateral. The conclusion is immediate.

S615. In ΔABC $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}\geq\dfrac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-\dfrac{2r}{R}$. **Titu Zvonaru, Romania**

Solution: Wee have $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq\dfrac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-\dfrac{2r}{R}$.

Using $a^3+b^3+c^3=2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right), a^2+b^2+c^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right), ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$ and $abc=4Rrp$, the inequality is written:

$$\frac{2p\left(p^2-3r^2-6Rr\right)}{4Rrp}\geq\frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}-\frac{2r}{R}\Leftrightarrow\frac{p^2-3r^2-6Rr}{2Rr}+\frac{2r}{R}\geq\frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{p^2+r^2-6Rr}{2Rr}\geq\frac{8\left(p^2-r^2-4Rr\right)}{p^2+r^2+4Rr}\Leftrightarrow p^4+p^2\left(2r^2-18Rr\right)+r^2\left(40R^2+14Rr+r^2\right)\geq 0,\ (*).$$

Lemma In ΔABC $p^4\geq 2p^2r(10R-r)-r^2(4R+r)(16R+r)$.

Solution Using $r_a=\dfrac{S}{p-a}$ inequality $\sum\dfrac{1}{a^2r_a}\geq\dfrac{1}{2R}\sum\dfrac{1}{r_a^2}$ becomes equivalent:

$$\sum\frac{1}{a^2r_a}\geq\frac{1}{2R}\sum\frac{1}{r_a^2}\Leftrightarrow\sum\frac{1}{a^2\cdot\dfrac{S}{p-a}}\geq\frac{1}{2R}\sum\frac{1}{\left(\dfrac{S}{p-a}\right)^2}\Leftrightarrow\frac{1}{S}\sum\frac{p-a}{a^2}\geq\frac{1}{2RS^2}\sum(p-a)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{p-a}{a^2}\geq\frac{2}{abc}\sum(p-a)^2\Leftrightarrow\sum\frac{bc(p-a)}{a}\geq 2\sum(p-a)^2.$$ With Ravi substitutions

$a=y+z, b=z+x, c=x+y, x,y,z>0$, inequality becomes equivalent:

$$\sum\frac{x(x+y)(x+z)}{y+z}\geq 2\sum x^2\Leftrightarrow\sum\left[\frac{x(x+y)(x+z)}{y+z}-2x^2\right]\geq 0\Leftrightarrow\sum\frac{x(x-y)(x-z)}{y+z}\geq 0,$$ **(Schur Inequality extended).**

Note. Because inequalities:

$\sum\dfrac{1}{a^2r_a}\geq\dfrac{1}{2R}\sum\dfrac{1}{r_a^2}$, (1) și $p^2\left(p^2+2r^2-20Rr\right)+r^2(4R+r)(16R+r)\geq 0$, (2)

are equivalent and inequality (1) is true , then (2) is true. We get (2)

$\Leftrightarrow p^2\left(p^2+2r^2-20Rr\right)+r^2(4R+r)(16R+r)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^4+p^2\left(2r^2-20Rr\right)+r^2(4R+r)(16R+r)\geq 0\Leftrightarrow$

$p^2\left(p^2+2r^2-20Rr\right)+r^2(4R+r)(16R+r)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^4 \ge 2p^2 r(10R-r) - r^2(4R+r)(16R+r)$.

Equality occurs if and only if triangle is equilateral.
Using **Lemma** to demonstrate inequality (*).
It is enough to show that:

$$\underbrace{2p^2 r(10R-r) - r^2(4R+r)(16R+r)}_{Lema} + p^2\left(2r^2 - 18Rr\right) + r^2\left(40R^2 + 14Rr + r^2\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2\left(2r(10R-r) + 2r^2 - 18Rr\right) + r^2\left(40R^2 + 14Rr + r^2 - r^2(4R+r)(16R+r)\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p^2(2Rr) \ge r^2\left(24R^2 + 6Rr\right) \Leftrightarrow p^2 \ge 12Rr + 3r^2$, wich result from Gerretsen-s Inequality: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$.

It remains to show that: $16Rr - 5r^2 \ge 12Rr + 3r^2 \Leftrightarrow R \ge 2r$,(Euler-s inequality).
Equality occurs if and only if triangle is equilateral.

O615. If $a,b,c>0$**,** $a+b+c=3$ **then** $abc\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\le 3$**. Tran Tien Manh, Vietnam**

<u>Solution</u> Using AM-GM we have: $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc\le 1$.

It is enough to show that: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\le 3$, wich result from Holder-s Inequality:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sum\sqrt[3]{a\cdot 1\cdot 1}\le\sqrt[3]{\sum a\cdot\sum 1\cdot\sum 1}=\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3}=3.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.
<u>Remark</u>. The problem can develop.

If $a,b,c>0$**,** $a+b+c=3$ **then** $abc\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)\le 3$**.** **Marin Chirciu**

<u>Proof.</u> Using AM-GM we have: $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc\le 1$.

It is enough to show that: $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\le 3$, wich result from Holder-s Inequality:

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=\sum\sqrt[n]{a\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-1}}\le\sqrt[n]{\sum a\cdot\underbrace{\sum 1\cdot\ldots\cdot\sum 1}_{n-1}}=\sqrt[n]{3\cdot\underbrace{3\cdot\ldots\cdot 3}_{n-1}}=3.$$

Equality occurs if and only if $a=b=c=1$.
<u>Remark.</u> The problem can develop.

In ΔABC $\sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}}\le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2$**,** $n\in\mathbf{N}, n\ge 2$**.** **Marin Chirciu**

<u>Soluție</u>. Lemma_If $x,y,z>0$, $x+y+z=3$ then_ $xyz\left(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{z}\right)\le 3$.

<u>Proof.</u> Using AM-GM we have: $3=x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz\le 1$.

It is enough to show that: $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{z}\le 3$, wich result from Holder-s Inequality:

$$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{z}=\sum\sqrt[n]{x\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{n-1}}\le\sqrt[n]{\sum x\cdot\underbrace{\sum 1\cdot\ldots\cdot\sum 1}_{n-1}}=\sqrt[n]{3\cdot\underbrace{3\cdot\ldots\cdot 3}_{n-1}}=3.$$

Equality occurs if and only if $x=y=z=1$.

Using $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1 \Leftrightarrow \frac{3r}{r_a}+\frac{3r}{r_b}+\frac{3r}{r_c}=3.$

With substitution $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ we have $x+y+z=3$.

Using **Lema** for $(x,y,z)=\left(\frac{3r}{r_a},\frac{3r}{r_b},\frac{3r}{r_c}\right)$ we get: $\frac{3r}{r_a}\frac{3r}{r_b}\frac{3r}{r_c}\left(\sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}}\right)\le 3$

$$\Leftrightarrow \frac{27r^3}{r_a r_b r_c}\left(\sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}}\right)\le 3 \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}}\le\frac{r_a r_b r_c}{9r^3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}} \le \frac{rp^2}{9r^3} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}} \le \frac{p^2}{9r^2}, (1).$$

Using Mitrinovic inequality $p^2 \le \frac{27R^2}{4}$ we get: $\frac{p^2}{9r^2} \le \frac{\frac{27R^2}{4}}{9r^2} = \frac{3R^2}{4r^2} = 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2$,(2).

From (1) and (2) result $\sqrt[n]{\frac{3r}{r_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{r_c}} \le 3\left(\frac{R}{2r}\right)^2$.

Equality occurs if and only if triangle is equilateral.

Remark.

The problem can develop.

In ΔABC $\sqrt[n]{\frac{3r}{h_a}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{h_b}}+\sqrt[n]{\frac{3r}{h_c}} \le 3\left(\frac{R}{2r}\right), n \in \mathbf{N}, n \ge 2$.

Solution.: See above and $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

U615. **Evaluate** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\sin(\cos x))-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$. **Mircea Becheanu, Canada**

Solution : The indeterminancy is of form $\frac{0}{0}$ and we use Hospital rule.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\sin(\cos x))-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(\sin(\cos x))\cdot\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos x))\cdot\cos(\cos x)\cdot(\sin x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos x))}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos x))}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 1 \cdot 1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos x))}{\sin(\cos x)} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = \frac{-1}{2}.$$

Bibliography:

1. O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic, Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
2. TituAndreescu, University of Texas at Dallas, USA , Mathematical Reflections1/2023.
3. Mircea Becheanu,Canada, J614,U615, Mathematical Reflections 1/2023.
4. Nguyen Viet Hung, Vietnam, J615, J616, Mathematical Reflections 1/2023.
5. Mihaela Berindeanu, Romania, J617, Mathematical Reflections 1/2023.
6. Titu Zvonaru, Romania, S615, Mathematical Reflections 1/2023.
7. Tran Tien Manh, Vietnam, O615, Mathematical Reflections 1/2023.
8. Daniel Sitaru, RMM- 41, Summer Edition 2024.
9. Marin Chirciu, Inegalități algebrice2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.
10. Marin Chirciu, Inegalități geometrice 2, de la inițiere la performanță, Editura Paralela 45, Pitești, 2021.

Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești

O altă generalizare a problemei L 222 din Recreații Matematice 1/2012

de Gheorghe Ghiță, Buzău

Articolul prezintă o generalizare a inegalității: Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}^*_+$ și $m\in[1;\infty)$ atunci $a\left(\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}\right)+b\left(\frac{1}{c^m}+\frac{1}{a^m}\right)+c\left(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}\right)\ge\frac{2\cdot 3^m}{(a+b+c)^{m-1}}$. *Recreații Matematice-1/2013 de Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu, Buzău,* care, la rândul ei, este o generalizare a problemei L222: ***Pentru a, b, c numere reale pozitive, demonstrați inegalitatea*** $a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\ge\frac{18}{a+b+c}$. *Recreații Matematice-1/2012 de Florin Stănescu, Găești.*

Generalizarea este următoarea: **Dacă** $a,b,c\rangle 0;\ m\rangle 0,\ k,n\ge 0,$ **atunci** $a^k\left(\frac{b^n}{c^m}+\frac{c^n}{b^m}\right)+b^k\left(\frac{c^n}{a^m}+\frac{a^n}{c^m}\right)+c^k\left(\frac{a^n}{b^m}+\frac{b^n}{a^m}\right)\ge\frac{2\cdot 3^{m-n-k+1}}{(a+b+c)^{m-n-k}}$ **.** *Gheorghe Ghiță, Buzău*

Soluție. $\sum a^k\left(\frac{b^n}{c^m}+\frac{c^n}{b^m}\right)=\sum\frac{b^nc^k+b^kc^n}{a^m}\overset{MA-MG}{\ge}\sum\frac{2\sqrt{b^nc^kb^kc^n}}{a^m}=2\sum\frac{\sqrt{(bc)^{n+k}}}{a^m}\overset{MA-MG}{\ge}$

$$\ge 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\prod\frac{\sqrt{(bc)^{n+k}}}{a^m}}=6\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(abc)^{2(n+k)}}}{(abc)^m}}=6\cdot\sqrt[3]{\frac{(abc)^{n+k}}{(abc)^m}}=\frac{6}{\sqrt[3]{(abc)^{m-k-n}}}\overset{MA-MG}{\ge}\frac{2\cdot 3^{m-k-n+1}}{(a+b+c)^{m-k-n}}.$$

În prima inegalitate, egalitatea este realizată $\Leftrightarrow$ $b^nc^k=b^kc^n, c^na^k=c^ka^n$ și $a^nb^k=a^kb^n\Leftrightarrow$ $n=k$ sau $a=b=c,$ în a doua inegalitate are loc $\Leftrightarrow bc=ca=ab\Leftrightarrow a=b=c,$ iar în a treia inegalitate a mediilor $\Leftrightarrow a=b=c.$

Din generalizarea prezentată se obțin inegalități cunoscute.

1. Pentru $m=2,n=0,k=1$ sau pentru $m=2,n=1,k=0$ se obține inegalitatea din problema L222 din Recreații Matematice-1/2012 *de Florin Stănescu, Găești.*
2. Pentru $m\ge 1,n=0,k=1$ se obține inegalitatea din Recreații Matematice-1/2013 de Dumitru M. Bătinețu-Giurgiu și Neculai Stanciu, Buzău.
3. Pentru $m=n=k=1\Rightarrow$ $\sum a\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow$ $\sum\frac{a(b^2+c^2)}{bc}\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c).$
4. Pentru $k=m=1,n=0$ sau $m=n=1,k=0\Rightarrow$ $\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 6.$
5. Pentru $m=1,n=k=0\Rightarrow\sum\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{18}{a+b+c}\Leftrightarrow a+b+c\ge\frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$
6. Pentru $m=2,n=k=1\Rightarrow\sum a\left(\frac{b}{c^2}+\frac{c}{b^2}\right)=2\sum\frac{bc}{a^2}\ge 6\Leftrightarrow\sum\frac{bc}{a^2}\ge 3.$
7. Pentru $m=n=k=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\sum\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)=2\sum\frac{ab}{\sqrt{abc}}\ge 2\sqrt{3(a+b+c)}\Leftrightarrow$ $ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}.$

Bibliografie

1. Titu Zvonaru- *Câteva soluții la problema L222 din Recreații Matematice, nr. 1/2012,* Recreații Matematice, nr.2/2012, p.120-123.
2. *Recreații Matematice,* Nr.1/2013-*Problema L222 din nr.1/2012 revizitată,* nr.1/2013, Recreații Matematice p. 29-31.
3. Sclipirea Minții 2013-2022

Asupra unei inegalități date la A.P.M.O, 2004

D.M.Bătinețu-Giurgiu, București,
Nicolae Papacu, Slobozia, **Ionel Tudor,** Călugăreni

La **A.P:O.M, 2004** a fost propusă de către **HOJOO LEE** inegalitatea algebrică $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca),\ \forall a,b,c\rangle 0$, **(H. L).** O generalizare a acestei inegalități a fost dată de **ARKADY M. ALT** în Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, Nr. 1/Aprilie 2019, pag. 229: Dacă $x,y,z,t\rangle\ 0$, are loc inegalitatea $(x^2+t^2)(y^2+t^2)(z^2+t^2)\ge \frac{3}{4}\cdot t^4(x+y+z)^2$, **(A. A)**

Pentru $t=\sqrt{2}$, inegalitatea (A. A) devine $(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)\ge \frac{3}{4}\cdot 2^2(x+y+z)^2=$

$=3(x+y+z)^2\ge 3\cdot 3(xy+yz+zx)=9(xy+yz+zx)$, adică inegalitatea (H. L)

Ne propunem noi generalizări ale inegalităților (H. L) și (A. A)

1. Dacă $a,b,x,y\rangle\ 0$ **atunci:** $(a^2+x)(b^2+y)\ge \frac{3}{4}\cdot\left((a\sqrt{y}+b\sqrt{x})^2+xy\right)$ **(1)**

Demonstrație: (1) $\Leftrightarrow 4a^2b^2+4(a^2y+b^2x)+4xy\ge 3a^2y+3b^2x+6ab\sqrt{xy}+3xy \Leftrightarrow$ $(2ab-\sqrt{xy})^2+(a\sqrt{y}-b\sqrt{x})^2\ge 0$, evident și cu egalitate dacă și numai dacă $2ab=\sqrt{xy},\ a\sqrt{y}=b\sqrt{x}$.

Dacă $x=y=t^2$, ineg. (1) devine $(a^2+t^2)(b^2+t^2)\ge \frac{3}{4}\cdot t^2\left((a+b)^2+t^2\right)$ **(2)**

din care pentru $t=\sqrt{2}$, rezultă $(a^2+2)(b^2+2)\ge 3\left((a+b)^2+2\right)$ **(3)**

2) Dacă $a,b,x,y\rangle\ 0$ **atunci:** $(a^2+x)(b^2+y)\ge (a\sqrt{y}+b\sqrt{x})^2$ **(4)**

Demonstrație: (4) $\Leftrightarrow a^2b^2+a^2y+b^2x+xy\ge a^2y+b^2x+ab\sqrt{xy}\Leftrightarrow \left(ab-\sqrt{xy}\right)^2\ge 0$, adevărat, cu egalitate dacă și numai dacă $ab=\sqrt{xy}$.

Dacă în (4) considerăm $x=y=t^2\rangle\ 0\Rightarrow\ (a^2+t^2)(b^2+t^2)\ge t^2(a+b)^2$ **(5)**,
din care pentru $t=\sqrt{2}\Rightarrow (a^2+2)(b^2+t)\ge 2(a+b)^2$ **(6).**

3) Dacă $a,b,c,x,y,z\rangle\ 0$ **atunci:** $(a^2+x)(b^2+y)(c^2+z)\ge \frac{3}{4}\cdot\left(a\sqrt{yz}+b\sqrt{xz}+c\sqrt{xy}\right)^2$ **(7)**

Demonstrație: Într-adevăr, din (1) și din (4) rezultă: $(a^2+x)(b^2+y)(c^2+z)\ge \frac{3}{4}\cdot\left((a\sqrt{y}+b\sqrt{x})^2+xy\right)(c^2+z)\ge \frac{3}{4}\cdot\left((a\sqrt{y}+b\sqrt{x})\sqrt{z}+c\sqrt{xy}\right)^2=$ $=\frac{3}{4}\cdot\left(a\sqrt{yz}+b\sqrt{xz}+c\sqrt{xy}\right)$**.** Dacă în (7) luăm $x=y=z=t^2\Rightarrow$

$(a^2+t^2)(b^2+t^2)(c^2+t^2)\ge\frac{3}{4}\left(at^2+bt^2+ct^2\right)=\frac{3}{4}t^4\left(a+b+c\right)^2\ge\ \frac{9}{4}t^4\left(ab+bc+ca\right)$ **(8)**

Pentru $t=\sqrt{2}$ în (8) obținem: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$, adică ineg. **(H. L)**

Teorema 1.

Dacă $n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ **și** $t,a_n\in(0;\infty),\ k=\overline{1;n}$ **atunci**

$$\left(a_1^2+t\right)\cdot\left(a_2^2+t\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(a_n^2+t\right)\ge\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot t^{n-1}\cdot\left((a_1+a_2+\ldots..+a_n)^2+t\right)\qquad (*)$$

Demonstrație: Dacă în (1) luăm $x=y=t$ obținem

$(a^2+t^2)(b^2+t^2)\geq\frac{3}{4}\cdot t\left((a+b)^2+t\right)$. **(9).** Atunci, utilizând ineg. (9) în mod repetat obținem:

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^{\ 2}+t)=(a_1^{\ 2}+t)(a_2^{\ 2}+t)\cdot\prod_{k=3}^{n}(a_k^{\ 2}+t)\geq\frac{3}{4}t\left((a_1+a_2)^2+t\right)\cdot\prod_{k=3}^{n}(a_k^{\ 2}+t)\geq$$

$$\geq\frac{3}{4}t\cdot\frac{3}{4}\cdot t\left((a_1+a_2+a_3)^2+t\right)\cdot\prod_{k=4}^{n}(a_k^{\ 2}+t)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot t^2\left((a_1+a_2+a_3)^2+t\right)\cdot(a_4^{\ 2}+t)\cdot\prod_{k=5}^{n}(a_k^{\ 2}+t)\geq.........$$

$$\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot t^{n-2}\cdot\frac{3}{4}t\left((a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2+t\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot t^{n-1}\left((a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2+t\right),$$ rezultând inegalitatea (*).

Teorema 2.

Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ **și** $t,a_1,a_2,.....,a_n\in(0;\infty)$ **atunci**

$$\left(a_1^{\ 2}+t\right)\cdot\left(a_2^{\ 2}+t\right)\cdot......\cdot\left(a_n^{\ 2}+t\right)\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot t^{n-1}\cdot\left(a_1+a_2+.....+a_n\right)^2 \qquad \textbf{(**)}$$

Demonstrație: Conform inegalității (*) din teorema 1, avem succesiv:

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_k^{\ 2}+t)\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot t^{n-2}\left((a_1+a_2+...+a_{n-1})^2+t\right) \quad \textbf{(10)}$$ și atunci

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^{\ 2}+t)\geq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot t^{n-2}\left((a_1+a_2+...+a_{n-1})^2+t\right)\cdot(a_n^{\ 2}+t)\overset{(5)}{\geq}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\cdot t^{n-2}\cdot t\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2,$$ de aici rezultând inegalitatea (**).

Dacă în (**) luăm n = 3, atunci $\left(a_1^{\ 2}+t\right)\cdot\left(a_2^{\ 2}+t\right)\cdot\left(a_3^{\ 2}+t\right)\geq\frac{3}{4}\cdot t^2\cdot\left(a_1+a_2+a_3\right)^2$ **(11),** în care înlocuind $a_1=x\rangle 0,\ a_2=y\rangle 0,\ a_3=z\rangle 0,\ t=t^2\rangle 0$ rezultă inegalitatea **(A. A).**

Pentru $a_1=a\rangle 0,\ a_2=b\rangle 0,\ a_3=c\rangle 0,\ t=2$, în inegalitatea **(11),** obținem inegalitatea (H. L)

Bibliografie:

[1]. Octogon Mathematical Magazine, Vol. 27, No.1, Aprili. 2019.

O demonstrație fără cuvinte pentru rafinarea unei inegalități celebre

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca+\frac{1}{6}\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2$$

de Dorin Mărghidanu, Corabia

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(|a-b|^2+|b-c|^2+|c-a|^2\right)\overset{Bergstrom}{\geq}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2.$$

Observație: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca+\frac{1}{6}\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2\geq ab+bc+ca$

Deci, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca+\frac{1}{6}\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2$ este rafinarea celebrei inegalității

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

„ Mai bine să înțelegi bine puțin decât să înțelegi greșit tot.”
Anatole France
(1844- 1924)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1118. **a) Aflați fracția $\frac{a}{b}$ care este de 4 ori mai mare decât fracția $\frac{b}{a}$. b) Care este fracția $\frac{c}{d}$, având ca valoare $\frac{1}{9}$ din $\frac{d}{c}$? c) Precizați tipurile de fracții obținute.** **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

Rezolvare: a) $\frac{a}{b}=4\cdot\frac{b}{a}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$, $\frac{a}{b}=2=\frac{2}{1}$; b) $\frac{c}{d}=\frac{1}{9}\cdot\frac{d}{c}$, $\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{c}{d}=\frac{1}{3}$.
c) Supraunitară (a), subunitară (b).

G:1119. **Ce devine un dreptunghi cu mărimile L = lungime, l = lățime, dacă verifică relația** $0,(4)\cdot L+0,(3)\cdot l=0,(3)\cdot L+0,(4)\cdot l$? **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $\frac{4L}{9}+\frac{3l}{9}=\frac{3L}{9}+\frac{4l}{9}\Rightarrow 4L-3L=4l-3l\Rightarrow L=l$, așadar, devine un pătrat.

G:1120. **Demonstrați că dacă numerele naturale a, b, c verifică egalitatea $4a+23b=19c$, atunci numărul $(a+b)(b+c)(c+a)$ se divide cu 874.** **Nicolae Ivășchescu,** Canada

Rezolvare: Din $4a+23b=19c\,|+19a\Rightarrow 23a+23b=19c+19a\Leftrightarrow\ 23(a+b)=19(c+a)$. Deoarece 23 și 19 sunt prime între ele, atunci rezultă $23|(c+a)$ și $19|(a+b)$. **(1)**

Din $4a+23b=19c\,|+19b\Rightarrow 4a+42b=19(c+b)\Rightarrow\ 2(2a+21b)=19(c+b)$. Deoarece 2 și 19 sunt prime între ele, atunci rezultă $2|(c+b)$. **(2)**

Din (1) și (2) rezultă $2\cdot19\cdot23|(a+b)(b+c)(c+a)\Rightarrow 784|(a+b)(b+c)(c+a)$.

G:1121. **Determinați numerele $\overline{abcd}$, cu cifre distincte și b, c consecutive, pentru care** $\overline{aa}^2+b^2+c^2+d^2=2022$ **Nicolae Ivășchescu,** Canada

Rezolvare: Cel mai mare număr $\overline{aa}$ care se poate lua este pentru a = 4 deoarece $\overline{55}^2=3025\ \rangle\ 2022$.
Atunci, $44^2+b^2+c^2+d^2=2022\Rightarrow b^2+c^2+d^2=86$ cu soluțiile: $b=1,\ c=2,\ d=9$ și $b=6,\ c=7,\ d=1$. Alte situații nu mai pot apărea. Așadar, $\overline{abcd}\in\{4129;4671\}$.

G:1122. Există $n,k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât 29^n+1 să se dividă cu 29^k-1. **Călina Doina Cristina**, Craiova

Rezolvare: Fie $n\geq2$ Atunci $29^n+1=M_4+2$, iar pentru $k\geq2$, $29^k-1=M_4$. Dacă n = 1, $29^1+1=30$ nu se poate divide cu 29^k-1.
Dacă $k\geq2$, $29^k-1\rangle18$, ceea ce înseamnă că nu există $n,k\in\mathbb{N}^*$ ca să aibă loc relația din enunț.

G:1123. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $2(xy+ky-1)=x+k$ **unde k este un număr natural dat.** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Avem din relația din ipoteză că $(x+k)(2y-1)=2$. Obținem că $(x+k;2y-1)\in\{(1;2),(2;1)\}$. Convine doar $x=2-k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow k\in\{0;1;2\}$ și $y=1$. Așadar, soluția este $S=\{(2-k\ ;\ 1)|k\in\mathbb{N},k\in\{0;1;2\}\}$.

G:1124. Calculați $\left(\overline{xyzt}+\overline{mnuv}\right):5$ **dacă** $\overline{xn}+\overline{my}=81$ **și** $\overline{zv}+\overline{ut}=125$.

Elena Irina Nedelcu, Craiova

Rezolvare: $\begin{cases}10x+n+10m+y=81|\cdot 100\\10z+v+10u+t=125\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1000x+100n+1000m+100y=8100\\10z+v+10u+t=125\end{cases}$. Adunăm cele două relații și obținem: $(1000x+100y+10z+t)+(1000m+100n+10u+v)=8225\Leftrightarrow\overline{xyzt}+\overline{mnuv}=8225$ așadar, $\left(\overline{xyzt}+\overline{mnuv}\right):5=8225:5=1645$.

G:1125. Restul împărțirii unui număr la 8 este egal cu 7, iar al împărțirii la 9 este egal cu 3. Aflați restul împărțirii numărului la 72. **Elena Irina Nedelcu**, Craiova

Rezolvare: Fie n numărul dat. Atunci, conform datelor problemei obținem:

$\begin{cases}n=8c_1+7|\cdot 9\\n=9c_2+3|\cdot 8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9n=72c_1+63\\8n=72c_2+24\end{cases}$. Scăzând relațiile se obține $n=72(c_1-c_2)+39$ adică restul împărțirii lui n la 72 este 39.

G:1126. Să se arate că numărul $\overline{abc}$ **este divizibil cu 2, 9 și 11 știind că** $\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ **.**

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Din 100a+10b+c=11a+11b+11c, reducând termenii, se obține 89a=b+10c, sau 89a = cb. Obținem a = 1, cb =89, deci abc = 198, care este divizibil cu 2, 9 și 11.

G:1127. Se consideră suma $S=3+7+11+15+......+4039+4043$**. Arătați că numărul** $\frac{S}{7077}$**, este pătrat perfect.** **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Mărim cu 1 fiecare termen al sumei S și atunci obținem

$(3+1)+(7+1)+(11+1)+(15+1)+......+(4039+1)+(4043+1)=4+8+12+16+......+4040+4044$ $=4(1+2+3+4+....+1011)$. Așadar, $S=4(1+2+3+4+....+1011)-1011\cdot 1=$ $=4\cdot\frac{1011\cdot 1012}{2}-1011=1011\cdot 2024-1011=1011\cdot 2023$. $\frac{S}{7077}=\frac{1011\cdot 2023}{7\cdot 1011}=289=17^2$, c.c.t.d.

▪ Clasa a VI-a

G:1128. Fie N un număr format din cifrele 2, 3, 7 și 9. Fiecare cifră apare de 43 de ori. Poate fi N pătrat perfect? **Cătălina Stan**, Craiova

Rezolvare: Cum suma cifrelor lui N este egală cu $43\cdot(2+3+7+9)=43\cdot 21$ care este divizibilă cu 3 dar nu este divizibilă cu 9 atunci N nu poate fi pătrat perfect.

G:1129. Rezolvați ecuația $x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.......+\frac{1}{2021\cdot 2022}\right)=\frac{1}{2022}$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $x=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.......+\frac{1}{2021\cdot 2022}+\frac{1}{2022}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}+\frac{1}{2022}=1$.

G:1130. Există numerele întregi x și y astfel încât $9x^2-y^2+6y=2023$?

elevi **Carina Viespescu, Rareș Tudorașcu**, Craiova

Rezolvare: $9x^2+6y=y^2+2023$, 2023 dă restul 1 la împărțirea cu 3 rezultă y^2 trebuie să dea restul 2 la împărțirea cu 3 ceea ce e fals. Așadar, nu există.

$\boxed{\text{G:1131}}$. **Demonstrați că numărul** $A=\left[2(3)+3,(4)+4,(2)\right]\cdot\left[2,3(4)+3,4(2)+4,2(3)\right]$ **este pătrat perfect.**

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Din calcul direct obținem

$$A=\left[\frac{23-2}{9}+\frac{34-3}{9}+\frac{42-2}{9}\right]\cdot\left[\frac{234-23}{90}+\frac{342-34}{90}+\frac{423-42}{90}\right]=\left(\frac{21}{9}+\frac{31}{9}+\frac{38}{9}\right)\cdot\left(\frac{211}{90}+\frac{308}{90}+\frac{381}{90}\right)=$$

$$=\frac{90}{9}\cdot\frac{900}{90}=100$$

$\boxed{\text{G:1132}}$. **Să se determine numărul soluțiilor întregi ale ecuației** $pxy-x+pky=p+k$ **unde** $k\in\mathbb{Z}$ **și p este un număr natural prim.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată se scrie $(x+k)(py-1)=p$ și atunci avem situațiile: $(x+k;\,py-1)\in\{(p;1),(-p;-1),(1;p),(-1;-p)\}$ cu rezultatele:

$(x;y)\in\left\{(p-k;\frac{2}{p}),(-p-k;0),(1-k;\frac{p+1}{p}),(-k-1;\frac{1-p}{p})\right\}$. Cum p este prim și soluțiile trebuie să fie întregi rezultă pentru p=2 soluțiile sunt de forma $(2-k;1),\ (-2-k;0)\ cu\ k\in\mathbb{Z}$ iar pentru $p\geq 3$ soluția are forma $(-p-k;0),\quad cu\ k\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{G:1133}}$. **Să se arate că numărul** $\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}$ **este divizor al numărului** $n=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\underbrace{22....2}_{2022}$ **.**

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Numărul n se scrie succesiv:

$n=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\underbrace{22....2}_{2022}=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\underbrace{000...0}_{2022}+\underbrace{222...2}_{2022\ de\ 2}=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\cdot 10^{2022}+2\cdot\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\cdot\left(10^{2022}+2\right)$, deci

$n\,\vdots\,\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}$.

$\boxed{\text{G:1134}}$. **Arătați că numărul** $n=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\underbrace{22....2}_{2022}$ **se scrie ca produs a două numere consecutive.**

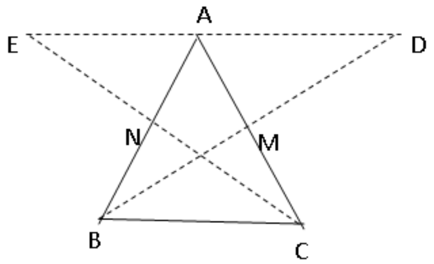
Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Cum $10^{2022}+2=3+\left(10^{2022}-1\right)=3+9\cdot\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}$ rezultă

$n=\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\cdot\left(3+9\cdot\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}\right)=\underbrace{333....3}_{2022\ de\ 3}+3^2\cdot\underbrace{111....1}_{2022\ de\ 1}^2=\underbrace{333....3}_{2022\ de\ 3}\cdot\left(1+\underbrace{333....3}_{2022\ de\ 3}\right)$ care este un produs de două numere consecutive

$\boxed{\text{G:1135}}$. **În triunghiul** ΔABC **isoscel cu AB=AC , M este mijlocul lui** $[AC]$**, N este mijlocul lui** $[AB]$**, D este simetricul lui B față de M, iar E este simetricul lui C față de N. Arătați că E, A, D sunt coliniare.**

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău



Rezolvare:

Patrulaterele BCDA și BCAE sunt paralelograme deoarece diagonalele se înjumătățesc, atunci $AD\parallel BC,\ AE\parallel BC$ și cum prin A se poate duce o singură paralelă la BC rezultă că E, A, D sunt coliniare.

G:1136. **În triunghiul ABC se consideră punctul I, centrul cercului înscris în triunghi. Știind că măsurile unghiurilor AIB, BIC, respectiv AIC sunt exprimate prin numere naturale consecutive, să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.**

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Punctul I este, evident, intersecția bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC. Din triunghiul AIB, avem $m(\sphericalangle AIB)=180^0-m(\frac{\sphericalangle A+\sphericalangle B}{2})=180^0-\frac{180^0-m(\sphericalangle C)}{2}=90^0+\frac{m(\sphericalangle C)}{2}$ și analoagele, $m(\sphericalangle BIC)=90^0+\frac{m(\sphericalangle A)}{2}$, $m(\sphericalangle AIC)=90^0+\frac{m(\sphericalangle B)}{2}$

Pentru simplitatea calculelor, notăm $x=90+\frac{C}{2}$, $x+1=90+\frac{A}{2}$, $x+2=90+\frac{B}{2}$. Atunci, $AIB+BIC+AIC=360\Rightarrow x+x+1+x+2=360\Rightarrow x=119.$

Prin înlocuire, obținem, $m(\sphericalangle C)=58^0$, $m(\sphericalangle A)=60^0$, $m(\sphericalangle B)=62^0$.

▪ Clasa a VII-a

G:1137. **Să se arate că există un număr natural *n* , astfel încât numărul** $2^{2018}+2^{2021}+2^n$ **să fie pătrat perfect.**

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Numărul $2^{2018}+2^{2021}+2^n=\left(2^{1009}\right)^2+2\cdot 2^{1009}\cdot 2^{1011}+2^{2022}+\left(2^n-2^{2022}\right)=$ $\left(2^{1009}+2^{1011}\right)^2+\left(2^n-2^{2022}\right)$ este pătrat perfect dacă $2^n-2^{2022}=0$ adică în cazul n = 2022.

G:1138. **Arătați că există** $x,y\in\mathbb{Z}$ **astfel încât** $(a^8-a^4+1)\cdot(b^8-b^4+1)=x^2+y^2,\ a,b\in\mathbb{Z}.$

Corina Ionescu, Gigi Zaharia, Craiova

Rezolvare: Folosind identitatea lui Lagrange $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$ se obține cerința din enunț. $(a^8-a^4+1)\cdot(b^8-b^4+1)=\left[(a^4-1)^2+(a^2)^2\right]\cdot\left[(b^4-1)^2+(b^2)^2\right]=$
$=\left[(a^4-1)(b^4-1)+a^2b^2\right]^2+\left[(a^4-1)\cdot b^2-(b^4-1)\cdot a^2\right]^2$, c.c.t.d

G:1139. **Fie** $a,b,c\in\mathbb{R}$. **Arătați că: a) Dacă** $a^2+ab+bc+ca\ \langle\ 0$ **atunci** $a^2\ \langle\ b^2+c^2$;
b) Dacă $b^2+c^2+ab+bc+ca\ \langle\ 0$ **atunci** $a^2\ \rangle\ b^2+c^2$;

Ilinca Sebastian, Pârșcoveni, Olt; **Chiriță Aurel**, Slatina

Rezolvare:

a) $a^2+ab+bc+ca\ \langle\ 0\big|\cdot 2\Rightarrow 2a^2+2ab+2bc+2ca\ \langle\ 0\Rightarrow a^2\le a^2+\left(a+b+c\right)^2\ \langle\ b^2+c^2\Rightarrow\ a^2\ \langle\ b^2+c^2$;

b) $b^2+c^2+ab+bc+ca\ \langle\ 0\big|\cdot 2\Rightarrow(a+b+c)^2+b^2+c^2-a^2\ \langle\ 0$.

Cum $a^2\le(a+b+c)^2+a^2\ \langle\ a^2-b^2-c^2+a^2\Rightarrow\ a^2\le 2a^2-b^2-c^2\Rightarrow b^2+c^2\ \langle\ a^2$.

G:1140. **Arătăți că există numerele naturale a, b, c, nenule și distincte pentru care** $a^2+b^2=c^2+2023$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Știm că $(3n-1)^2+(4n-4)^2-(5n-4)^2=2n+1$ identitate care se demonstrează relativ ușor utilizând formula $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Cum $2023=2\cdot 1011+1\Rightarrow n=1011$, deci

$(3\cdot 1011-1)^2+(4\cdot 1011-4)^2-(5\cdot 1011-4)^2=3032^2+4040^2-5051^2=2023$ rezultă că putem considera $a=3032,\ b=4040,\ c=5051$ sau $a=4040,\ b=3032,\ c=5051$.

G:1141. **Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor** $a=\sqrt{21+12\sqrt{3}}-\sqrt{31-12\sqrt{3}}$ **și** $b=\sqrt{31+12\sqrt{3}}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}$.

Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației

***Rezolvare*:** Avem

$$a=\sqrt{9+12\sqrt{3}+12}-\sqrt{4-12\sqrt{3}+27} \qquad b=\sqrt{4+12\sqrt{3}+27}-\sqrt{9-12\sqrt{3}+12}$$

$$a=\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(2-3\sqrt{3}\right)^2} \qquad b=\sqrt{\left(2+3\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$a=\left|3+2\sqrt{3}\right|-\left|2-3\sqrt{3}\right| \quad \text{și} \quad b=\left|2+3\sqrt{3}\right|-\left|3-2\sqrt{3}\right|$$

$$a=3+2\sqrt{3}-\left(3\sqrt{3}-2\right) \qquad b=2+3\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}-3\right)$$

$$a=5-\sqrt{3} \qquad b=5+\sqrt{3}.$$

Atunci $m_a=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ și $m_g=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{5^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{22}.$

G:1142. **Determinați numerele prime m și n pentru care** $\sqrt{n^{n+2}}+\sqrt{m^{m+3}}=629$.

Cristian Catană, Băilești, Dolj

***Rezolvare*:** Trebuie ca n+2 și m+3 să fie pare, atunci pentru **n=2** se obține $\sqrt{m^{m+3}}=629-4\Rightarrow m^{m+3}=5^8\Rightarrow m=5.$

G:1143. **Aflați primele 36 de zecimale ale numărului** $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{26}\right)^{40}$. **Sebastian Ilinca**, Pârscoveni, Olt

Rezolvare:

$$3\sqrt{3}-\sqrt{26}<\frac{1}{2^3}\Rightarrow\left(3\sqrt{3}-\sqrt{26}\right)^{40}<\left(\frac{1}{2^3}\right)^{40}=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{12}=\left(\frac{1}{1024}\right)^{12}<\left(\frac{1}{10^3}\right)^{12}=\frac{1}{10^{36}}=0,\underbrace{000...0}_{36\ de\ 0}1$$

G:1144. **Să se rezolve în** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **ecuația** $x^2+(p+1)x+qy+p=xy+qx+y$, **unde p și q sunt numere prime diferite.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

***Rezolvare*:** Din ecuația dată rezultă

$$y=\frac{x^2-qx+x+px+p}{x-q+1}=\frac{x(x-q+1)+p(x-q+1)+pq}{x-q+1}=x+p+\frac{pq}{x-q+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x-q+1)\,|\,pq.$$

De aici se obțin situațiile: $x-q+1\in\{1;-1;q;-q;p;-p;pq;-pq\}$. Rezultă:

$$(x;y)\in\left\{\begin{matrix}(q;pq+p+q),\ (q-2;-pq+p-q+2),\ (2q-1;2p+2q-1),\ (-1;-1),\\ (p+q-1;2p+2q-1),(-p+q-1;-1),(pq+q-1;pq+p+q),(-pq+q-1;-pq+p+q-2)\end{matrix}\right\}$$

G:1145. **Determinați numerele raționale a și b astfel încât** $|a|\sqrt{3}-\sqrt{5(b+2)^2}=\left|2\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right|$.

Simona Chiriță, Craiova

***Rezolvare*:** $|a|\sqrt{3}-|b+2|\sqrt{5}=4\sqrt{3}-2\sqrt{5}\Rightarrow$

$\left(|a|-4\right)\sqrt{3}=\left(|b+2|-2\right)\sqrt{5}\Rightarrow\ |a|-4=0$ și $|b+2|-2=0$. Obținem $a=\pm 4,\ b=0, b=-4$.

G:1146. **Se consideră 2 axe de numere, perpendiculare în O. Pe fiecare se deplasează uniform, în sens pozitiv, câte un corp, unul cu viteza 4 cm /s, al doilea cu 3 cm / s. Notăm cu A, C, pozițiile corpului cu**

viteză mare după 3, respectiv, 5 secunde. La fel, cu B, D, pozițiile corpului cu viteză mică, după aceleași intervale de timp. a) Aflați coordonatele mijloacelor pentru segmentele AB. CD. b) Dreptele AB, CD sunt paralele ?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: a) $OA = v \cdot t = 4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow A(12;0)$, $OC = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow C(20;0)$, $OB = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow B(0;9)$, $OD = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow D(0;15)$. Atunci, $M\left(\frac{12+0}{2};\frac{0+9}{2}\right) = M\left(6;4,5\right)$. Analog, $N\left(10;7,5\right)$.

b) Cum $\frac{12}{20} = \frac{9}{15} \Rightarrow AB \,||\, CD$

G:1147. Rezolvați triunghiul dreptunghic ABC cu $m\left(\sphericalangle A\right) = 90^0$ și BC = 100, laturile au valori numere naturale, iar unghiurile ascuțite sunt direct proporționale cu catetele opuse.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Considerăm numerele 60, 80, 100 ca fiind lungimile laturilor. Atunci,

$$\frac{m\left(\sphericalangle C\right)}{AB} = \frac{m\left(\sphericalangle B\right)}{AC} = \frac{90^0}{140} = \frac{9^0}{14} \Rightarrow m\left(\sphericalangle C\right) = \frac{60 \cdot 9^0}{14} = \frac{270^0}{7},\ m\left(\sphericalangle B\right) = \frac{360^0}{7}.$$

G:1148. În interiorul triunghiului echilateral ABC se consideră punctul P, apoi simetricele M, N și Q ale lui P față de laturile AB, BC, respectiv AC. Știind că PM+PN+PQ= $8\sqrt{3}$ cm, să se afle aria triunghiului ABC.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Notăm cu a latura triunghiului ABC și cu h_1, h_2, respectiv h_3 distanțele de la P la laturile AB, BC, respectiv AC. Atunci PM+PN+PQ=2(h_1+ h_2+ h_3)= =8$\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ h_1+ h_2+ h_3=4$\sqrt{3}$=h.
Utilizăm proprietatea: suma distanțelor de la un punct interior unui triunghi echilateral la laturile acestuia este constantă, anume egală cu înălțimea triunghiului. În continuare, avem:

$a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot 4\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ a=8, iar aria triunghiului este 16$\sqrt{3}$ cm^2.

▪ Clasa a VIII-a

G:1149. Arătați că oricare ar fi numărul natural *n*, numărul $n^6 + 3n^3 + 3$ nu este cub perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Pentru n=0, evident 3 nu este cub perfect.
Pentru $n \geq 1$, presupunem că $n^6 + 3n^3 + 3$ este cub perfect, adică și $n^3(n^6 + 3n^3 + 3)$ ar fi cub perfect.
Dar $n^3(n^6 + 3n^3 + 3) = n^9 + 3n^6 + 3n^3 + 1 - 1 = (n^3 + 1)^3 - 1$ nu este cub perfect deoarece două numere consecutive nu pot fi simultan cuburi perfecte, $(n^3 + 1)^3$ fiind cub perfect.

G:1150. Gospodarul unește prestigiul profesional cu farmecul naturii. Anual respectă tăierea coronară a pomilor. Aflați numărul pomilor din grădina sa , știind că este maximul expresiei $E = -4x^2 - 4x + 19$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: $E = -4x^2 - 4x + 19 = -(4x^2 + 4x + 1 - 20) = 20 - (2x+1)^2$. Diferența este maximă, când scăzătorul este minim. Pătratul minim este 0 iar maximul expresiei este 20.

G:1151. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = k$. Aflați cea mai mare valoare a expresiei $ab + bc + 2ac$.

Iulia Sanda, Calina Doina Cristina, Craiova

Rezolvare: $ab + bc + 2ac = b(a+c) + 2ac = \left(k - (a+c)\right)(a+c) + 2ac = k(a+c) - (a+c)^2 + 2ac =$

$= -\frac{k^2}{4} + ka - a^2 - \frac{k^2}{4} + kc - c^2 + \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4} - \left(a - \frac{k}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{k}{2}\right)^2 \le \frac{k^2}{2}$. Cea mai mare valoare este $\frac{k^2}{2}$ atinsă pentru $a = c = \frac{k}{2}$.

G:1152. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere pozitive astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = n$ arătați că $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + ... + \frac{1}{a_n+1} \ge \frac{n}{2}$.

eleva **Carina- Maria Viespescu**, Craiova

Rezolvare: Demonstrăm relația $\frac{1}{a+1} \ge \frac{5-a^2}{8}$, $\forall a \in \mathbb{R}_+$ cu egalitate pentru a = 1.

$8 \ge 5a + 5 - a^3 - a^2 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 5a + 3 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+3) \ge 0, \forall a \in [-3;\infty)$. Atunci,

$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + ... + \frac{1}{a_n+1} \ge \frac{5 \cdot n - (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}{8} = \frac{5n - n}{8} = \frac{4n}{8} = \frac{n}{2}$, c.c.t.d. Avem egalitate pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

G:1153. Dacă a, b, c, d sunt direct proporționale cu patru numere naturale consecutive mai mari sau egale cu 13, să se calculeze $\left[\frac{a^3 + b^3 + c^3}{d^3}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din ipoteză scriem $\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = \frac{c}{n+2} = \frac{d}{n+3} = k,\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 13$. Atunci,

$a = nk,\ b = (n+1)k,\ c = (n+2)k,\ d = (n+3)k$. Obținem: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{d^3} = \frac{3n^3 + 9n^2 + 15n + 9}{n^3 + 9n^2 + 27n + 27} \langle\ 3$.

Pentru $\frac{3n^3 + 9n^2 + 15n + 9}{n^3 + 9n^2 + 27n + 27} \ \ge\ 2$ se arată că $n^3 = n \cdot n^2 \ge 13 \cdot n^2 = 9n\ + 4n \cdot n \ge$

$\ge 9n^2 + 52n = 9n^2 + 39n + 13n\ \rangle\ 9n^2 + 39n + 45$. Rezultă $\left[\frac{a^3 + b^3 + c^3}{d^3}\right]$**=2.**

G:1154. Dacă $a, b, c\ \rangle\ 0$ și $n, k \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{ab}{na+kb} + \frac{bc}{nb+kc} + \frac{ca}{nc+ka} \le \frac{1}{n+k} \cdot (a+b+c)$

Marin Chirciu, Pitești

***Rezolvare*:** Fie $a, b, c\ \rangle\ 0$ **și** $n, k \in \mathbb{N}^*$. Folosim inegalitatea $\frac{ab}{na+kb} \le \frac{ka+nb}{(n+k)^2}$ adevărată din relația $nk(a-b)^2 \ge 0$, evident cu egalitate pentru $a = b$. Analog, se scrie pentru fiecare fracție și se însumează. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

G:1155. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că ecuația: $x^a + y^b = 2z^{ab}$ are o infinitate de soluții numere naturale nenule.

b) Arătați că ecuația: $x^a + y^b + z^c = 3t^{abc}$ are o infinitate de soluții numere naturale nenule.

Generalizare.

Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare:

a) Fie $z = k \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $x = k^b$ și $y = k^a$ sunt soluții.

b) Fie $t = k \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $x = k^{bc}$, $y = k^{ac}$ și $z = k^{ab}$ sunt soluții.

Generalizare: Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$ sunt date $(n \geq 2)$, ecuația $x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + ... + x_n^{a_n} = ny^{a_1 a_2 ... a_n}$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{N}^*$. Într-adevăr, dacă $y = k \in \mathbb{N}^*$ și $p = a_1 \cdot a_2 \cdot ..... \cdot a_n$ atunci soluțiile vor fi

$$x_1 = k^{\frac{p}{a_1}}, x_2 = k^{\frac{p}{a_2}}, ..., x_n = k^{\frac{p}{a_n}}.$$

G:1156. Suma tuturor muchiilor a două cuburi este 192 cm și suma ariilor totale este de 816 cm^2. Calculați volumul fiecărui cub. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

Fie a și b dimensiunile muchiilor cu $a \rangle b$. Suma muchiilor este 12 a + 12b = 192 iar suma ariilor este $6a^2 + 6b^2 = 816$ adică $6(a^2 + b^2) = 816 \Rightarrow a^2 + b^2 = 136$.

Cum $12(a+b) = 192 \Rightarrow a + b = 16 \Rightarrow a = 16 - b$, atunci prin înlocuire în relația de mai sus rezultă $(16-b)^2 + b^2 = 136$ cu soluțiile $b_1 = 10$ și $b_2 = 6$. Atunci, $a_1 = 6$ și $a_2 = 10$. Cum $a \rangle b \Rightarrow a = 10,\ b = 6$ iar volumele celor două cuburi sunt: $V_a = 10^3 = 1000\ cm^3$ și $V_b = 6^3 = 216\ cm^3$.

G:1157. Se consideră tetraedrul regulat VABC, V = vârf. O furnică pleacă din A și ajunge în V, mergând pe 2 fețe care nu includ muchia AV, pe drumul cel mai scurt. Aflați măsura unghiului diedru al celor 2 fețe. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

$VO \perp (ABC)$. Furnica merge pe traseul AM, MV unde M este mijlocul lui $[BC]$. Unghiul plan al diedrului este $\sphericalangle(VMO)$ .Dacă AB = a atunci

$$VM = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ OM = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ \cos(VMO) = \frac{OM}{VM} = \frac{1}{3} \Rightarrow m(\sphericalangle VMO) = \arccos\frac{1}{3}.$$

G:1158. Piramida patrulateră SABCD are toate muchiile congruente între ele. Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv SB și aria patrulaterului SAMN este egală cu 12$\sqrt{3}$ cm^2, să se afle suma tuturor muchiilor piramidei.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul SAB și $\frac{MN}{AS} = \frac{1}{2}$, atunci $\frac{A_{NMB}}{A_{SAB}} = \frac{1}{4}$. Cum $A_{SAMN}=12\sqrt{3}$ cm^2, rezultă $A_{SAB}=16\sqrt{3}$ cm^2. Din formula ariei triunghiului echilateral, se deduce SA=8 cm, iar suma cerută este 64 cm.

▪ Clasa a IX-a

L:950. Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ și numerele strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ care verifică inegalitatea $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq x_1 + x_2 + ... + x_n$. Arătați că $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + ... + \frac{1}{x_n^3}\right) \geq n^2$. În ce caz avem egalitate? **Radu Nicolae, Tigae Alina, Craiova**

Rezolvare: Utilizând inegalitatea lui Titu Andreescu se obține:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq \frac{\frac{1}{x_1^2}}{\frac{1}{x_1^3}} + \frac{\frac{1}{x_2^2}}{\frac{1}{x_2^3}} + ... + \frac{\frac{1}{x_n^2}}{\frac{1}{x_n^3}} \overset{T.A}{\geq} \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)^2}{\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + ... + \frac{1}{x_n^3}} \Rightarrow$$

$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+...+\frac{1}{x_n^3}\geq\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}$ care înmulțită cu inegalitatea din enunț ne dă :

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+...+\frac{1}{x_n^3}\right)\geq\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

În ultima inegalitate avem egalitate pentru $x_1=x_2=.....=x_n=x\rangle 0$ și revenind la inegalitatea din enunț avem $x\leq 1$.

L:951. Să se rezolve în R , ecuația $9x^2-192\sqrt[3]{9x^2}+1024=0$ **.** **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Ecuația dată se scrie $9x^2+2^9+2^9=3\cdot\sqrt[3]{9x^2\cdot 2^9\cdot 2^9}$. Conform inegalității mediilor putem scrie:

$\frac{9x^2+2^9+2^9}{3}\geq\sqrt[3]{9x^2\cdot 2^9\cdot 2^9}$ cu egalitate pentru $9x^2=2^9\rangle 0\Rightarrow x^2=\frac{2^9}{9}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Altfel. Notând $t=\sqrt[3]{9x^2}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ **,** ecuația devine

$t^3-192t+1024=0\Leftrightarrow(t-8)^2\cdot(t+16)=0\Rightarrow t=8\rangle 0, etc.$

L:952. Fie $p\in\mathbb{N}^*$ **. Să se arate că ecuațiile** $x^2+y^{4p+2}=z^4$ **și** $x^4+y^{4p+2}=z^2$ **au fiecare o infinitate de soluții numere naturale nenule**. **Emil C. Popa,** Sibiu

Rezolvare:

Considerăm identitatea $\left[\frac{n^{2p}(n^2-1)}{2}\right]^2+n^{4p+2}=\left[\frac{n^{2p}(n^2+1)}{2}\right]^2$, $n\in\mathbb{N}^*$. Este cunoscut faptul că ecuația $\frac{n^2+1}{2}=m^2\Leftrightarrow n^2-2m^2=-1$(ecuația lui Pell, negativă) are o infinitate de soluții numere naturale nenule. Cum $\frac{n^{2p}(n^2-1)}{2}\in\mathbb{N}^*,\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\neq 1$ rezultă că tripleta $(x,y,z)=\left(\frac{n^{2p}(n^2-1)}{2},\ n,\ n^p\cdot m\right)$ verifică prima ecuație din enunț. Apoi ecuația $\frac{n^2-1}{2}=q^2\Leftrightarrow n^2-2q^2=1$ (ecuație Pell pozitivă) are o infinitate de soluții numere naturale nenule. Cum $\frac{n^{2p}(n^2+1)}{2}\in\mathbb{N}^*$, rezultă că tripleta $(x,y,z)=\left(n^p\cdot q\ ,n\ ,\frac{n^{2p}(n^2+1)}{2}\right), n\in\mathbb{N}^*$ verifică a doua ecuație din enunț.

L:953. Fie $a,b,c,x,y,z\rangle 0$ **. Să se demonstreze inegalitatea** $\frac{9abc}{\sum a^2}\leq\sum\frac{a^3x+abc}{\sqrt{(a^2x+b^2)(a^2x+c^2)}}\leq\sum a$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Se utilizează inegalitatea mediilor

$$\sum\frac{a^3x+abc}{\sqrt{(a^2x+b^2)(a^2x+c^2)}}\geq\sum\frac{a^3x+abc}{\frac{a^2x+b^2+a^2x+c^2}{2}}=\sum a\frac{2a^2x+2bc}{2a^2x+b^2+c^2}\geq\sum a\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2}=2abc\sum\frac{1^2}{b^2+c^2}$$

deoarece $\frac{2a^2x+2bc}{2a^2x+b^2+c^2}\geq\frac{2bc}{b^2+c^2}\Leftrightarrow(b-c)^2\geq 0$.

Utilizăm inegalitatea lui Bergström: $2abc\sum\frac{1^2}{b^2+c^2}\geq 2abc\frac{9}{2\sum a^2}=\frac{9abc}{\sum a^2}$.

$$\sum \frac{a^3x+abc}{\sqrt{(a^2x+b^2)(a^2x+c^2)}} \overset{C-S}{\leq} \sum \frac{a^3x+abc}{a\sqrt{x}\cdot a\sqrt{x}+bc} = \sum a.$$

$\boxed{\text{L:954}}$. **Dacă** $a,b,c>0, a+b+c=3$ **și** $0\leq \lambda \leq 2$, **atunci** $\frac{a^2}{a^3+a+\lambda}+\frac{b^2}{b^3+b+\lambda}+\frac{c^2}{c^3+c+\lambda}\leq \frac{3}{\lambda+2}$.

Marin Chirciu, Pitești

***Rezolvare*: (clasa a XI-a)**

Fie $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$ $f(x)=\frac{x^2}{x^3+x+\lambda}$. Avem $f(1)=\frac{1}{\lambda+2}$, $f'(x)=\frac{-x^4+x^2+2\lambda x}{(x^3+x+\lambda)^2}$, $f'(1)=\frac{2\lambda}{(\lambda+2)^2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-\frac{1}{\lambda+2}=\frac{2\lambda}{(\lambda+2)^2}(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{2\lambda x+2-\lambda}{(\lambda+2)^2}$.

Se arată că : (*) $f(x)\leq \frac{2\lambda x+2-\lambda}{(\lambda+2)^2}$ adică

$2\lambda x^4+(2-\lambda)x^3-(\lambda^2+2\lambda+4)x^2+(2\lambda^2-\lambda+2)x-\lambda^2+2\lambda\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2\left[2\lambda x^2+(3\lambda+2)x+\lambda(2-\lambda)\right]\geq 0$, care rezultă din $(x-1)^2\geq 0$

cu egalitate pentru $x=1$ și condiția din ipoteză $0\leq\lambda\leq 2$, care asigură $\left[2\lambda x^2+(3\lambda+2)x+\lambda(2-\lambda)\right]>0$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț. Folosind (*) obținem:

$$LHS=\sum\frac{a^2}{a^3+a+\lambda}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{2\lambda a+2-\lambda}{(\lambda+2)^2}=\frac{2\lambda\sum a+3(2-\lambda)}{(\lambda+2)^2}=\frac{2\lambda\cdot 3+3(2-\lambda)}{(\lambda+2)^2}=\frac{3(\lambda+2)}{(\lambda+2)^2}=$$

$=\frac{3}{\lambda+2}=RHS$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

$\boxed{\text{L:955}}$. **Dacă** $x,y,z>0, x+y+z=3$, **atunci** $\sum\frac{1}{25x^2-20x+91}\leq\frac{1}{32}$. **Marin Chirciu,** Pitești

Rezolvare: (**clasa a XI-a**)

Fie $f:(0,3)\to\mathbf{R}$ $f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+\lambda}$ Avem $f(1)=\frac{1}{\lambda+1}$, $f'(x)=\frac{-10x+4}{(5x^2-4x+\lambda)^2}$, $f'(1)=\frac{-6}{(\lambda+1)^2}$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-\frac{1}{\lambda+1}=\frac{-6}{(\lambda+1)^2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{\lambda+7-6x}{(\lambda+1)^2}$.

Se arată că: $f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+\lambda}\leq\frac{\lambda+7-6x}{(\lambda+1)^2}\Leftrightarrow 30x^3-(5\lambda+59)x^2+(10\lambda+28)x+1-5\lambda\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(30x+1-5\lambda)\leq 0$, deoarece $0<x<3$ și $\lambda\geq\frac{91}{5}$, care asigură $(30x+1-5\lambda)<0$,

cu egalitate pentru $x=1$. Folosind rezultatul de mai sus rezultă

$$LHS=\sum\frac{1}{5x^2-4x+\lambda}\overset{Lema}{\leq}\sum\frac{\lambda+7-6x}{(\lambda+1)^2}=\frac{3(\lambda+7)-6\sum x}{(\lambda+1)^2}=\frac{3(\lambda+7)-6\cdot 3}{(\lambda+1)^2}=\frac{3}{\lambda+1}=RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$. Pentru $\lambda=\frac{91}{5}$ obținem $\sum\frac{1}{25x^2-20x+91}\leq\frac{1}{32}$.

$\boxed{\text{L:956}}$. **Determinați** $(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot(\sin\beta-\cos\beta)$ **în funcție de** $a=\sin(\alpha+\beta)$ și $b=\cos(\alpha-\beta)$.

Mihaela Stancele, Craiova

Rezolvare: $(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot(\sin\beta-\cos\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=$
$\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=b-a$.

L:957. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC are loc relația: $3R(s^2-r^2-4Rr)\geq(R+r)(r^2+4Rr+s^2)$. **Florică Anastase**, Lehliu – Gară

Rezolvare: Presupunem că $a\geq b\geq c$, atunci $\cos A\leq\cos B\leq\cos C$ și $\frac{1}{\sin A}\leq\frac{1}{\sin B}\leq\frac{1}{\sin C}$. Aplicând inegalitatea lui Cebâșev, obținem:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4F}=ctgA+ctgB+ctgC\geq\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{3}(1+\frac{r}{R})\left(\frac{2R}{a}+\frac{2R}{b}+\frac{2R}{c}\right)\geq\frac{2}{3}(R+r)\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right).$$

S-au folosit formulele: $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ și $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

De asemenea, cunoaștem că $a^2+b^2+c^2=2(s^2-r^2-4Rr)$ și $ab+bc+ac=r^2+4Rr+s^2$, atunci,

$$\frac{s^2-r^2-4Rr}{4F}\geq\frac{1}{3}(R+r)\frac{r^2+4Rr+s^2}{4RF}\Leftrightarrow 3R\left(s^2-r^2-4Rr\right)\geq(R+r)(r^2+4Rr+s^2).$$

Altă soluție: (**Titu Zvonaru**). $a^2+b^2+c^2=2(s^2-r^2-4Rr)$ și $ab+bc+ca=s^2+r^2+4Rr$. Deoarece $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, este suficient să arătăm că $\frac{3}{2}\geq\frac{R+r}{R}\Leftrightarrow R\geq 2r$.

L:958. Arătați că în orice triunghi ascuțit unghic ABC, există inegalitatea: $\left(1+\frac{a^2}{h_a^2}\cdot ctg^2A\right)\cdot\left(1+\frac{b^2}{h_b^2}\cdot ctg^2B\right)\cdot\left(1+\frac{c^2}{h_c^2}\cdot ctg^2C\right)\geq 3$. **D.M. Bătinețu- Giurgiu**, București

Rezolvare:

Se folosește inegalitatea $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+z^2\right)\geq\frac{3}{4}(x+y+z)^2,\ \forall x,y,z\rangle 0$ (Arkady Alt) în care se consideră notațiile: $x=\frac{a}{h_a}\cdot ctgA,\ y=\frac{b}{h_b}\cdot ctgB,\ z=\frac{c}{h_c}\cdot ctgC,$ astfel că se obține

$\prod_{cyc}\left(1+\frac{a^2}{h_a^2}\cdot ctg^2A\right)\geq\frac{3}{4}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{a}{h_a}\cdot ctgA\right)^2$ (1). Din (1) și identitatea lui C. Ionescu – Bujor: $\sum_{cyc}\frac{a}{h_a}\cdot ctgA=2$, se obține cerința din enunț.

L:959. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi a,b,c. Notăm cu m_a,s_a lungimile medianei , respectiv simedianei corespunzătoare laturii a, etc . Fie mulțimea $A=\{\sqrt{\frac{m_am_b}{s_as_b}},\sqrt{\frac{m_bm_c}{s_bs_c}},\sqrt{\frac{m_cm_a}{s_cs_a}}\}$.

Demonstrați că $\max A\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\geq\min A$. **Vasile Jiglău**, Arad

Rezolvare: a) Utilizăm $\frac{m_a}{s_a}=\frac{b^2+c^2}{2bc}$, etc (1) . Să demonstrăm următoarea :

Lemă : Cu notațiile de mai sus are loc : $\frac{m_am_b}{s_as_b}+\frac{m_bm_c}{s_bs_c}+\frac{m_cm_a}{s_cs_a}\geq 3\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{64a^2b^2c^2}$ (2)

Într-adevăr , cu formulele (1) avem : (2) $\Leftrightarrow 16\sum ab(a^2+c^2)(b^2+c^2)\geq 3(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ (3)

Cu substituțiile $x=p-a,y=p-b,z=p-c$ (3) devine echivalentă cu :

$$16\sum(y+z)(x+z)((y+z)^2+(x+y)^2)((x+z)^2+(x+y)^2)\geq 3(2x+y+z)^2(x+2y+z)^2(x+y+2z)^2$$

care devine, după efectuarea calculelor , echivalentă cu :

$4\sum x^6+28\sum x^5y+28\sum x^5z+9\sum x^4y^2+9\sum x^4z^2+42\sum x^4yz\geq$

$14\sum x^3y^3+42\sum x^3y^2z+42\sum x^3yz^2+66x^2y^2z^2$

Aceasta rezultă din însumarea următoarelor inegalități , consecințe imediate ale lemei lui Muirhead :

$4\sum x^6\geq 4\sum x^3y^3$; $10\sum x^5y\geq 10\sum x^3y^3$; $18\sum x^5y\geq 18\sum x^3y^2z$; $24\sum x^5z\geq 24\sum x^3y^2z$;

$42\sum x^4yz\geq 42\sum x^3yz^2$; $4\sum x^5y+9\sum x^4y^2+9\sum x^4z^2\geq 66x^2y^2z^2$

Din lemă rezultă : $3\max\{\frac{m_am_b}{s_as_b},\frac{m_bm_c}{s_bs_c},\frac{m_cm_a}{s_cs_a}\}\geq\frac{m_am_b}{s_as_b}+\frac{m_bm_c}{s_bs_c}+\frac{m_cm_a}{s_cs_a}\geq 3\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{64a^2b^2c^2}$

și de aici și prima inegalitate din enunțul problemei .

b) Putem presupune că laturile triunghiului verifică $c\geq b\geq a$ (4)

E suficient să demonstrăm că în aceste condiții are loc : $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\geq\sqrt{\frac{m_am_c}{s_as_c}}$ (5)

Cu formulele (1) , $(5)\Leftrightarrow(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\geq 16ac(a^2+b^2)(b^2+c^2)$, fapt care , ținând cont de (4) , rezultă imediat din identitatea

$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2-16ac(a^2+b^2)(b^2+c^2)=[\sum a(b-c)^2]^2+16ac(c-b)(b-a)(b^2+ac)\geq 0$

$\boxed{\text{L:960}}$. **Arătați că în orice triunghi ΔABC ascuțitunghic cu notațiile corespunzătoare, avem:** $\frac{9r}{\pi R}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}<\frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}\leq\frac{\pi^n+3(n-1)}{2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, **unde A, B, C sunt măsurile unghiurilor** $\sphericalangle A,\sphericalangle B,\sphericalangle C$.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Se demonstrează mai întâi relația $\frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}-\frac{3(n-1)}{2n}\leq\frac{A^n+B^n+C^n}{2n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. **(1)**

Pentru n =1 relația (1) este adevărată din $\frac{AB}{A+B}\leq\frac{A+B}{4}\Leftrightarrow(A-B)^2\geq 0$ și însumarea cu analoagele.

Pentru $n\geq 2$, avem: $\sum_{cyc}\frac{AB}{A+B}-\frac{3(n-1)}{2n}\leq\frac{A+B+C}{2}-\frac{3(n-1)}{2n}\overset{*}{\leq}\frac{A^n+B^n+C^n}{2n}$ unde

$(*)\Leftrightarrow A^n+B^n+C^n\geq n(A+B+C)-3(n-1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(A^n-nA+(n-1)\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$\sum_{cyc}\left((A^n-1)-n(A-1)\right)=\sum_{cyc}(A-1)\left(A^{n-1}+A^{n-2}+...+A+1-n\right)=$

$=\sum_{cyc}(A-1)^2\left(A^{n-2}+2A^{n-3}+3A^{n-4}+....+(n-2)A+(n-1)\right)\geq 0$, adevărată pentru orice $n\geq 2$.

Altfel, se putea folosi pentru (*) relația $A^n+n-1=A^n+1+1+...+1\geq nA$.

Relația (1) se rescrie astfel:

$\frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}-\frac{3(n-1)}{2n}\leq\frac{A^n+B^n+C^n}{2n}\leq\frac{(A+B+C)^n}{2n}=\frac{\pi^n}{2n}$, $n\in\mathbb{N}$. **(2)**

Aplicând inegalitatea mediilor și inegalitatea $x>\sin x,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{A^2B^2C^2}{(A+B)(B+C)(C+A)}}>3\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(\prod_{cyc}\sin A\right)^2}{\pi^3}}=\frac{3}{\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{S^2}{4R^4}}=\frac{3}{\pi R}\cdot\sqrt[3]{\frac{S^2}{4R}}.$$

Folosind inegalitatea $S^2\geq 27r^4$, avem:

$$\sum_{cyc}\frac{AB}{A+B}-\frac{3(n-1)}{2n}\ \rangle\ \frac{9r}{\pi R}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}-\frac{3(n-1)}{2n}\ . \qquad \textbf{(3)}$$

Din (2) și (3), rezultă $\frac{9r}{\pi R}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}-\frac{3(n-1)}{2n}\ \langle\ \frac{AB}{A+B}+\frac{BC}{B+C}+\frac{CA}{C+A}-\frac{3(n-1)}{2n}\le\frac{\pi^n}{2n}$, c.c.t.d..

▪ Clasa a X-a

$\boxed{\text{L:961}}$. **Fie $x,y,z\in\mathbb{R}^*_+$ astfel încât $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+2y+4z}\le 2$. Arătați că $\frac{x}{2}+y+2z\le 21$.**

elevă **Carina- Maria Viespescu**, Craiova

Rezolvare:

$x^2+y^2+z^2\le 2x+4y+8z \iff x^2-2x+y^2-4y+z^2-8z\le 0\iff$

$\iff(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\le 1^2+2^2+4^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 21$ (1) unde

$x-1=a,\ \ y-2=b,\ \ z-4=c$ .Trebuie să arătăm că $\frac{x}{2}+y+2z\le 21\iff\frac{a+1}{2}+b+2+2(c+4)\le 21$

$\frac{a+1+2(b+2)+4(x+4)}{2}\le 21$. Folosim relația (1) și inegalitatea C-B-S, rezultă:

$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+4^2)\ge(a+2b+4c)^2$. Dar $(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+4^2)\le 21\cdot 21\Rightarrow 21\ge a+2b+4c$.

$\boxed{\text{L:962}}$. **Fie $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{a+(a+1)i}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $z\in\mathbb{R}$.** **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: $z\in\mathbb{R}\iff \operatorname{Im} z=0\iff a+a\sqrt{3}+1=0\Rightarrow a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\text{L:963}}$. **Fie ecuația $z^2+z+1=0$ cu rădăcinile z_1,z_2 Să se arate că**

$\frac{(1-z_1^{\ 2})(1-z_2^{\ 2})+(1+z_1^{\ 2})(1+z_2^{\ 2})}{z_1z_2}\in\mathbb{R}$. **Gheorghe Dărstaru**, Buzău

Rezolvare: Observăm că $z_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ cu $|z_1|=|z_2|=1$. Atunci,

$$\frac{\overline{(1-z_1^{\ 2})(1-z_2^{\ 2})+(1+z_1^{\ 2})(1+z_2^{\ 2})}}{\overline{z_1z_2}}=\frac{(1-\frac{1}{z_1^{\ 2}})(1-\frac{1}{z_2^{\ 2}})+(1+\frac{1}{z_1^{\ 2}})(1+\frac{1}{z_2^{\ 2}})}{\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}=$$

$$\frac{\left(\frac{z_1^{\ 2}-1}{z_1^{\ 2}}\right)\left(\frac{z_2^{\ 2}-1}{z_2^{\ 2}}\right)+\left(\frac{z_1^{\ 2}+1}{z_1^{\ 2}}\right)\left(\frac{z_2^{\ 2}+1}{z_2^{\ 2}}\right)}{\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=\frac{(1-z_1^{\ 2})(1-z_2^{\ 2})+(1+z_1^{\ 2})(1+z_2^{\ 2})}{z_1z_2}.$$

$\boxed{\text{L:964}}$. **Știind că $0,301\langle\lg 2\langle 0,3011$ și $0,4771\langle\lg 3\langle 0,4772$, să se compare numerele 2^{799} și 3^{500}.**

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Se știe că pentru $a\in\mathbb{N}^*$, numărul cifrelor lui a este egal cu $[a]+1$. Atunci, numărul 2^{799} **are** $\left[\lg 2^{799}\right]+1=[799\lg 2]+1$ cifre iar numărul 3^{500} **are** $\left[\lg 3^{500}\right]+1=[500\lg 3]+1$ cifre.

Folosind inegalitățile date în enunț obținem $[799\lg 2]+1=240+1=241$ cifre iar $[500\lg 3]+1=238+1=239$ cifre. Cum primul număr are mai multe cifre față de al doilea rezultă $2^{799}\geq 3^{500}$.

L:965. Să se rezolve ecuația $2ax^2-2x\sqrt{1-x^2}-a=0$**, unde** $a\neq 0$**.** **Ovidiu Ghiță,** Buzău

Rezolvare: $2ax^2-2x\sqrt{1-x^2}-a=0 \Leftrightarrow a(2x^2-1)=2x\sqrt{1-x^2}$ care, prin ridicare la pătrat revine la $a^2(4x^4-4x^2+1)=4x^2(1-x^2)\Leftrightarrow 4x^4(a^2+1)-4x^2(a^2+1)+a^2=0$, unde punem $y=2x^2$ și ultima ecuație devine $(a^2+1)y^2-2(a^2+1)y+a^2=0$ cu $\Delta'=(a^2+1)^2-a^2(a^2+1)=a^2+1$. Deci,

$y_{1,2}=\dfrac{a^2+1\pm\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}(\sqrt{a^2+1}\pm 1)}{a^2+1}=\dfrac{\sqrt{a^2+1}\pm 1}{\sqrt{a^2+1}}$, de unde obținem

$2x^2=\dfrac{\sqrt{a^2+1}\pm 1}{\sqrt{a^2+1}}$; $x^2=\dfrac{\sqrt{a^2+1}\pm 1}{\sqrt{a^2+1}}$, prin urmare $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+1}\pm 1}{2\sqrt{a^2+1}}}$.

L:966. Determinați $a\in\mathbb{R}$ **, pentru care ecuația** $4^x-6\cdot 2^x+a-2022=0$**, are soluția** $x=\log_2(3+\sqrt{2022})$**.** **Ionel Tudor,** Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $4^x-6\cdot 2^x+9+a-2031=0\Leftrightarrow(2^x-3)^2+a-2031=0$. (*)

Se impune $2031-a\rangle\ 0\Rightarrow a\ \langle 2031$. Dacă $x=\log_2(3+\sqrt{2022})$ **este soluție, avem**

$2^x-3=2^{\log_2(3+\sqrt{2022})}-3=3+\sqrt{2022}-3=\sqrt{2022}$. După înlocuire în (*) se obține $a=9\langle 2031$.

L:967. Pentru $x,y,z\rangle 0$ **să se arate că:** $\sum\limits_{cyc}\dfrac{x(y^3+z^3)}{(1+x)y^3z^3}\leq\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{15}{x^2+y^2+z^2}-1\right)$.

Florică Anastase, Lehliu- Gară

Rezolvare: $\sum\limits_{cyc}\dfrac{x(y^3+z^3)}{(1+x)y^3z^3}=\sum\limits_{cyc}\dfrac{\frac{y^3+z^3}{y^3z^3}}{\frac{1+x}{x}}=\sum\limits_{cyc}\dfrac{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}}{1+\frac{1}{x}}\overset{Holder}{\geq}\dfrac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3}{3\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}\overset{(1)}{\geq}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-9}{8}\overset{(2)}{\geq}$

$\dfrac{1}{12}\left[15\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)-9\right]\overset{Bergstrom}{\geq}\dfrac{1}{12}\left(5\cdot\dfrac{27}{xy+yz+zx}-9\right)\overset{(3)}{\geq}\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{15}{x^2+y^2+z^2}-1\right)$.

Notăm: $t=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, atunci avem $(1)\Leftrightarrow\dfrac{t^3}{t+3}\geq\dfrac{5t^2-9}{8}\Leftrightarrow(t-3)^2(t+1)\geq 0,\forall t\geq 0$,

$(2)\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2\geq 3\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\geq\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$,

$(3)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$.

L:968. Să se arate că în triunghiul ΔABC **ascuțitunghic are loc inegalitatea**: $\dfrac{\sum\sqrt{\sin 2A}}{\sum\sin^2 A}\leq R\cdot\sqrt{\dfrac{2}{S}}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Din teorema cosinusului și inegalitatea mediilor se obține:

$b^2+c^2=a^2+2bc\cos A\geq 2a\sqrt{2b\cos A}$ cu egalitate dacă și numai dacă

$a^2=2bc\cos A\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-a^2\Leftrightarrow 2a^2=b^2+c^2$.

Prin adunare cu celelalte două inegalități analoage, obținem:

$\sum 2a\sqrt{2bc\cos A} \le \sum (b^2+c^2) \Leftrightarrow \sum \sqrt{2a^2bc\cos A} \le \sum a^2 \Leftrightarrow$

$\sum \sqrt{2abc\cdot 2R\sin A\cos A} \le \sum 4R^2\sin^2 A$. Din $abc = 4RS$ și $a = 2R\sin A$ obținem

$$\sum \sqrt{8R^2\sin 2A} \le \sum 4R^2\sin^2 A \Leftrightarrow \sqrt{2S}\sum \sqrt{\sin 2A} \le \sum 2R^2\sin^2 A \Leftrightarrow \frac{\sum \sqrt{\sin 2A}}{\sum \sin^2 A} \le \frac{2R}{\sqrt{2S}} = R\sqrt{\frac{2}{S}}$$

cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$\boxed{\text{L:969}}$. **Să se arate că în triunghiul ΔABC, cu AD, BE, CF, bisectoare are loc relația $\sum \frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{3R}{8r}$.**

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Se utilizează lema: In ΔABC, AD, BE, CF bisectoare interioare, există relația $\frac{EF^2}{BC^2} \le \frac{b+c}{8a}$.

Se trece la rezolvarea problemei din enunț.

$$LHS = \sum \frac{EF^2}{BC^2} \overset{Lema}{\le} \frac{1}{8}\sum \frac{b+c}{a} = \frac{1}{8}\sum \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \overset{Bandila}{\le} \frac{1}{8}\sum \frac{R}{r} = \frac{1}{8}\cdot\frac{3R}{r} = \frac{3R}{8r} = RHS .$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

$\boxed{\text{L:970}}$. **Arătați că în triunghiul ABC de arie F are loc inegalitatea $\frac{a^3b}{h_b^2}+\frac{b^3c}{h_c^2}+\frac{c^3a}{h_a^2} \ge \frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot F$.**

D.M. Bătinețu- Giurgiu, București, **Ionel Tudor**, Călugăreni

Rezolvare: Se folosesc inegalitățile:

$$\frac{x_1^{\alpha+1}}{y_1^{\alpha}}+\frac{x_2^{\alpha+1}}{y_2^{\alpha}}+.....+\frac{x_n^{\alpha+1}}{y_n^{\alpha}} \ge \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^{\alpha+1}}{(y_1+y_2+...+y_n)^{\alpha}},\ \forall x_i, y_i \rangle 0,\ \alpha\rangle 0,$$ (ineg. Lui Radon) și

$ab+bc+ac \ge 4\sqrt{3}\cdot F$, a,b,c laturile triunghiului, (ineg lui Gordon).

$$\frac{a^3b}{h_b^2}+\frac{b^3c}{h_c^2}+\frac{c^3a}{h_a^2} = \frac{(ab)^3}{(bh_b)^2}+\frac{(bc)^3}{(ch_c)^2}+\frac{(ac)^3}{(ah_a)^2} \overset{Radon}{\ge} \frac{(ab+bc+ca)^3}{(bh_b+ch_c+ah_a)^3} = \frac{(ab+bc+ca)^3}{36F^2} \overset{Gordon}{\ge}$$

$$\frac{(4\sqrt{3}F)^3}{36F^2} = \frac{64\cdot 3\sqrt{3}F^3}{36F^2} = \frac{16\sqrt{3}F}{3}$$

$\boxed{\text{L:971}}$. **Dacă ABC este un triunghi ascuțitunghic și x, y, z numere reale pozitive cu $\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)^2 = 1$,**

atunci: $9Rr\cdot\left(\frac{4r}{R}+\frac{r^2}{R^2}\right) \langle \frac{y+z}{x}\cdot A^2r_a^2+\frac{z+x}{y}\cdot B^2r_b^2+\frac{x+y}{z}\cdot C^2r_c^2 \langle \frac{\pi^2}{4}\cdot(4R+r)^2$.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare: Demonstrăm următoarea **lemă:** Fie $x, y, z\rangle 0$ și fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcție. Are loc inegalitatea:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)\cdot f^2(a) \ge 2\sum_{cyc} f(b)f(c) .$$

Demonstrație: Aplicăm inegalitatea lui C-B-S și avem:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)\cdot f^2(a) = \sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}+1-1\right)\cdot f^2(a) = \sum_{cyc}\frac{x+y+z}{x}\cdot f^2(a) - \sum_{cyc} f^2(a) \ge$$

$$\ge (x+y+z)\cdot\frac{\left(\sum_{cyc} f(a)\right)^2}{x+y+z} - \sum_{cyc} f^2(a) = \left(\sum_{cyc} f(a)\right)^2 - \sum_{cyc} f^2(a) = 2\sum_{cyc} f(b)f(c) .$$

Există egalitate pentru $\frac{f(a)}{x}=\frac{f(b)}{y}=\frac{f(c)}{z}$. Folosind lema și luăm $f(a)=Ar_a$. Observăm că, pentru orice $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, avem $x\rangle\ \sin x,\quad p^2\ \ge\ 16Rr-5r^2,\ R\ \ge\ 2r\ ,\ \sum_{cyc} r_a\cdot r_b=p^2,\ 2p^2\ge 27Rr$, folosind inegalitatea lui Cebâșev, pentru tripletele $\left(AB,CA,BC\right),\ (r_ar_b,r_br_c,r_cr_a)$, la fel ordonate, avem:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)\cdot A^2r_a^{\,2}\ge 2\sum_{cyc}AB\ r_ar_b\ge\frac{2}{3}\cdot\sum_{cyc}AB\cdot\sum_{cyc}r_ar_b\rangle\frac{2p^2}{3}\cdot\sum_{cyc}\sin A\sin B.$$

$$\sum_{cyc}\sin A\sin B=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}\ge\frac{16Rr+4r^2}{4R^2}=\frac{4r}{R}+\frac{r^2}{R^2},\quad\frac{2p^2}{3}\ge\frac{27Rr}{3}=9Rr.$$

$$\frac{2p^2}{3}\cdot\sum_{cyc}\sin A\sin B\ge 9Rr\cdot\left(\frac{4r}{R}+\frac{r^2}{R^2}\right).$$ Rezultă

$$\frac{y+z}{x}\cdot A^2r_a^{\,2}+\frac{z+x}{y}\cdot B^2r_b^{\,2}+\frac{x+y}{z}\cdot C^2r_c^{\,2}\ \rangle\ 9Rr\cdot\left(\frac{4r}{R}+\frac{r^2}{R^2}\right).$$ Aplicând inegalitatea C-B-S

$$\left(\frac{y+z}{x}\cdot A^2r_a^{\,2}+\frac{z+x}{y}\cdot B^2r_b^{\,2}+\frac{x+y}{z}\cdot C^2r_c^{\,2}\right)^2\le\sum_{cyc}\left(\frac{y+z}{x}\right)^2\cdot\left(A^4r_a^{\,4}+B^4r_b^{\,4}+C^4r_c^{\,4}\right)\le$$

$$\le A^4r_a^{\,4}+B^4r_b^{\,4}+C^4r_c^{\,4}\ \langle\ \left(A\ r_a\ +B\ r_b\ +C\ r_c\ \right)^4\langle\ \left(\frac{\pi}{2}(r_a+r_b+r_c)\right)^4=\frac{\pi^4}{16}\cdot(4R+r)^4,$$ c,c,t,d,

▪ Clasa a XI-a

$\boxed{\text{L:972}}$. **Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $9x^3-12x^2+x+2=\sin 3\pi x$.** **Sebastian Ilinca**, Pârșcoveni, Olt

Rezolvare: Ecuația dată se scrie: $(3x-1)(3x-2)(x-1)=\sin 3\pi x$ cu soluțiile $x\in\left\{-\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right\}$. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=9x^3-12x^2+x+2-\sin 3\pi x$. Dacă f(x) ar avea 4 rădăcini atunci $f^{I}(x)$ ar avea cel puțin 3 rădăcini , atunci $f^{II}(x)$ ar avea cel puțin 2 rădăcini iar $f^{III}(x)$ ar avea cel puțin o rădăcină, dar $f^{III}(x)=54+27\pi^3\cos 3\pi x\ \rangle\ 0$ deci, contradicție, așadar, ecuația are 3 rădăcini.

$\boxed{\text{L:973}}$. **Rezolvați ecuația: $x^2\cdot\lg^2 x-4x\cdot\lg x-60=0$.** **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Se arată că x = 10 este singura soluție a ecuației.

Evident, $x\rangle 0$. Observăm că x = 1 nu e soluție. Notăm $x\lg x=y\Rightarrow y^2-4y-60=0$ cu soluțiile $y_1=10$ și $y_2=-6$. Ecuația $x\lg x=10$ are soluția unică $x=10\rangle 1$ iar ecuația $x\lg x=-6\langle 0$ dacă ar avea soluție ar trebui sa fie din (0;1).

$x\lg x=-6\Rightarrow x^x=\frac{1}{10^6}$. (*). Funcția $f:\left(0;1\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^x$ este derivabilă și are derivata

$f^{I}(x)=x^x(1+\ln x)$ care se anulează pentru $x=e^{-1}=\frac{1}{e}\in\left(0;1\right)$. Valoarea minimă a funcției este $e^{-\frac{1}{e}}$.

Cum $\frac{1}{1000000}\langle e^{-\frac{1}{e}}$, ecuația (*) nu are soluții pe (0;1).

$\boxed{\text{L:974}}$. **Rezolvați în** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **sistemul de ecuații** $\begin{cases} 2022^x + x = 2023^y \\ 2022^y + y = 2023^x \end{cases}$.

Camelia Dană, Ileana Stanciu, Craiova

Rezolvare: Fie $x\langle y \Rightarrow 2023^y = 2022^x + x\langle 2022^y + y = 2023^x \Rightarrow y\langle x$, fals.

Fie $y\langle x \Rightarrow 2023^x = 2022^y + y\langle 2022^x + x = 2023^y \Rightarrow x\langle y$, fals. Așadar, x = y.

Pentru a rezolva ecuația $2022^x + x = 2023^y$ alegem funcția $f:[2022,2023]\to\mathbb{R},\ f(x)=t^x$ și conform teoremei lui Lagrange există $c\in(2022,2023)$ astfel încât $\dfrac{2023^x-2022^x}{2023-2022} = x\cdot c^{x-1} \Rightarrow x = xc^{x-1}$ cu soluțiile $x\in\{0;1\} \Rightarrow x=y=0,\ x=y=1$.

$\boxed{\text{L:975}}$. **Să se calculeze limita** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \dfrac{\sqrt[1882]{x+\sqrt[140]{x+\sqrt[2022]{x}}}}{\sqrt[2022]{x+\sqrt[1882]{x+\sqrt[140]{x}}}}$. **Dorina Goiceanu**, Craiova

Rezolvare:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \frac{\left(x+(x+x^{\frac{1}{2022}})^{\frac{1}{140}}\right)^{\frac{1}{1882}}}{\left(x+(x+x^{\frac{1}{140}})^{\frac{1}{1882}}\right)^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \frac{\left[x+\left(x^{\frac{1}{2022}}(x^{\frac{2021}{2022}}+1)\right)^{\frac{1}{140}}\right]^{\frac{1}{1882}}}{\left[x+\left(x^{\frac{1}{140}}(x^{\frac{139}{140}}+1)\right)^{\frac{1}{1882}}\right]^{\frac{1}{2022}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \frac{\left[x+x^{\frac{1}{140\cdot 2022}}\left(x^{\frac{2021}{2022}}+1\right)^{\frac{1}{140}}\right]^{\frac{1}{1882}}}{\left[x+x^{\frac{1}{140\cdot 1882}}\left(x^{\frac{139}{140}}+1\right)^{\frac{1}{140}}\right]^{\frac{1}{2022}}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}} \frac{\left[x^{\frac{1}{140\cdot 2022}}\left(x^{\frac{140\cdot 2021-1}{140\cdot 2022}}+(x^{\frac{2021}{2022}}+1)\right)^{\frac{1}{140}}\right]^{\frac{1}{1882}}}{\left[x^{\frac{1}{140\cdot 1882}}\left(x^{\frac{140\cdot 1882-1}{140\cdot 1882}}+(x^{\frac{139}{140}}+1)\right)^{\frac{1}{1882}}\right]^{\frac{1}{2022}}} = 1, \text{ după ce simplificăm cu } x^{\frac{1}{140\cdot 2022\cdot 1882}}.$$

$\boxed{\text{L:976}}$ **Fie** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcție pară și derivabilă și o altă funcție** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **dată prin relația** $g(x)=\left(x^2\cdot e^x+1\right)\cdot f(x)+x$. **Să se calculeze** $g^I(0)$. **Adrian Stan,** Buzău

***Rezolvare*:** f(x) este pară $\Rightarrow f(-x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

f(x) este derivabilă $\Rightarrow f^I(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x-0} = -\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = -f^I(0)$

Rezultă $2f^I(0)=0 \Rightarrow f^I(0)=0$.

$g^I(x)=\left(x^2\cdot e^x+1\right)^I\cdot f(x)+\left(x^2\cdot e^x+1\right)\cdot f^I(x)+x^I \Rightarrow\ g^I(0)=f^I(0)+1=1.$

$\boxed{\text{L:977}}$. **Fie** $a,b,c,m,k\rangle 0,\ m\le k^2$ **astfel încât** $a+b+c=3$. **Să se arate că:**

$\dfrac{kb+mc}{a^2+ka+m}+\dfrac{kc+ma}{b^2+kb+m}+\dfrac{ka+mb}{c^2+kc+m}\ge\dfrac{3(k+m)}{k+m+1}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{t^2+kt+m},\ f^I(t)=-\dfrac{2t+k}{\left(t^2+kt+m\right)^2}\langle 0,$

$$f^{II}(t)=\frac{6t^2+6kt+2k^2-2m}{\left(t^2+kt+m\right)^3}\rangle 0.\ \text{f convexă.}$$

$$\sum\frac{kb+mc}{a^2+ka+m}=(k+m)\sum a\sum\frac{kb+mc}{(k+m)\sum a}\cdot f(a)$$

Se utilizează formula pentru funcție convexă, $t_1 f(a)+t_2 f(b)+t_3 f(c)\ge f\left(t_1a+t_2b+t_3c\right)$ unde

$$t_1=\frac{kb+mc}{(k+m)\sum a},\ t_2=\frac{kc+ma}{(k+m)\sum a},\ t_3=\frac{ka+mb}{(k+m)\sum a},\ t_1+t_2+t_3=\frac{k\sum c+m\sum b}{(k+m)\sum a}=1.$$

$$\sum\frac{kb+mc}{(k+m)\sum a}\cdot f(a)\ge f\left(\sum\frac{kb+mc}{(k+m)\sum a}\cdot a\right)=f\left(\frac{\sum ab}{\sum a}\right).$$

Cum $\frac{\sum ab}{\sum a}\le\frac{\sum a}{3}=1$ și f este crescătoare rezultă $f\left(\frac{\sum ab}{\sum a}\right)\ge f(1)=\frac{1}{k+m+1}$. Deci,

$$\sum\frac{kb+mc}{a^2+ka+m}\ge 3(k+m)\cdot\frac{1}{k+m+1}=\frac{3(k+m)}{k+m+1}.$$

L:978. Fie $\left(a_n\right)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică cu $S_n=3n^2+2n+1$, suma primilor n termeni ai progresiei.

Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_k}=\frac{1}{3}.$

Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației

Rezolvare:

$$a_k=S_k-S_{k-1}=3k^2+2k+1-3(k-1)^2-2(k-1)-1=3k^2+2k-3k^2+6k-3-2k+2=6k-1,$$

deci $\sum\limits_{i=1}^{n}a_k=\sum\limits_{i=1}^{n}(6k-1)=6\sum\limits_{i=1}^{n}k-\sum\limits_{i=1}^{n}1=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=3n^2-n+3.$Cum

$$\sum_{i=1}^{n}S_k=\sum_{i=1}^{n}\left(3k^2+2k+1\right)=3\sum_{i=1}^{n}k^2+2\sum_{i=1}^{n}k+\sum_{i=1}^{n}1=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{2n^3+5n^2+5n}{2},$$

obținem că $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_k}=\frac{2n^3+5n^2+5n}{6n^2-2n+6}$ și atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}S_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n^2+5n}{6n^3-6n^2+6n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

L:979. Considerăm șirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ definite prin $a_n=\ln\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, $b_n=\frac{n!e^n}{n^{n+1}}$. Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}$.

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Arătăm că $b_n\rangle\frac{1}{n}$ pentru $n\ge1$. Pentru n = 1 este evident iar pentru n = 2 avem $\frac{2e^2}{2^3}\rangle\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^2\rangle 2$.

Presupunem $b_n\rangle\frac{1}{n+1}$. Avem : $\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\rangle\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow n!e^{n+1}\rangle(n+1)^n$. dar $n!e^n\rangle n^n$ așadar $n!e^{n+1}\rangle n^n\cdot e$ și

trebuie arătat că $n^n\cdot e\ \rangle\ (n+1)^n$ care este echivalentă cu $e\rangle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ceea ce este evident. Deci $\sum_{k=1}^{n} b_k \rangle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ și prin urmare șirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ este strict crescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Folosim lema Stolz- Cesaro obținem: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]^{\frac{1}{b_{n+1}\sqrt{n+1}}}$.

Dar $b_{n+1}\sqrt{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{2(n+1)\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2(n+1)^2\pi}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1\cdot\sqrt{2\pi}$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} = \ln e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

L:980. Dacă $(\gamma_n)_{n\ge1}$, $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, **iar** $(a_n)_{n\ge1}$ **este un șir convergent de numere reale cu** $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ **și** $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a) = b \in \mathbb{R}$**, să se calculeze** $\lim_{n\to\infty}(a_n\gamma_n - a\gamma)^2 n\sqrt[n]{n!}$**.** **(**$\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0,577...$ **este constanta lui Euler- Mascheroni).** **D.M. Bătinețu – Giurgiu,** București, **Ionel Tudor,** Călugăreni

Rezolvare: Se știe că $\lim_{n\to\infty} n(\gamma_n - \gamma) = \frac{1}{2}$, (GMB 12/2021, pag 547).

Notăm $\beta_n = (a_n\gamma_n - a\gamma)^2 n\sqrt[n]{n!}$ și avem: $\beta_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \cdot n^2(a_n\gamma_n - a\gamma)^2 = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\left(n\gamma_n(a_n - a) + na(\gamma_n - \gamma)\right)^2$

Cum $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$. Rezultă $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{e}\left(\gamma b + a\cdot\frac{1}{2}\right)^2$.

▪ Clasa a XII-a

L:981. Fie $(G,\cdot)$ **un grup și** $a \in G$ **astfel încât pentru orice** $x \in G$ **avem** $ax^4 = xa$**. Să se arate că** $x^9 = e$ **oricare ar fi** $x \in G$. **Emil C. Popa**, Sibiu

Rezolvare:

Pentru x = a avem $a^5 = a^2$ de unde $a^3 = e.$ Deci, $x^4 = a^2xa, \ \forall x \in G.$ Atunci,

$(xa^2)^4 = a^2(xa^2)a = a^2x = x^4a^2$. Deci, $(xa^2)(xa^2)(xa^2)(xa^2) = x^4a^2$, sau $(a^2x)(a^2x)(a^2x) = x^3 \Rightarrow$

$(a^2xa)(ax)(a^2xa) = x^3 \Rightarrow x^4ax^5 = x^3a, \ \ xax^5 = a \Rightarrow \left(a^2xa\right)x^5 = e \Rightarrow x^9 = e$.

L:982. Se consideră ecuația $x^4 + x^3 - 2023x^2 - 2022x + 2022 = 0$**. Rezolvați ecuația și arătați că are toate rădăcinile reale.** **Ionel Tudor,** Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare: Observăm că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ f(x) = x^4 + x^3 - 2023x^2 - 2022x + 2022$ este continuă și are $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ iar $f(-2) = -2018\langle 0, \ f(0) = 2022\rangle 0, \ f(1) = -2021\langle 0,$ deci

$f(-2)\cdot \lim_{x\to-\infty} f(x)\langle 0, \ \ f(-2)\cdot f(0)\langle 0, \ \ f(0)\cdot f(1)\langle 0,$ și $f(1)\cdot\lim_{x\to\infty} f(x)\langle 0.$ Atunci, ecuația $f(x) = 0$ are toate soluțiile reale: $x_1 \in (-\infty;-2), \ x_1 \in (-\infty;-2), \ x_2 \in (-2;0), \ x_3 \in (0;1), \ x_4 \in (1;\infty)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2022\right)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Rightarrow S = \left\{\pm\sqrt{2022}; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

L:983. Fie funcția $f_m:(0;\infty)\to R$, $f_m(x)=\dfrac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+m^2}; x\in(0;\infty); m\in R$

Determinați mulțimea primitivelor funcției f_m **(discuție după m).** **Nica Minodora Silvioara**, Buzău

Rezolvare: $[x(x+3)][(x+1)(x+2)]=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$v(x)=x^2+3x \Rightarrow F_m(x)=\displaystyle\int\frac{v'(x)}{[v(x)+1]^2+m^2-1}dx$, $u(x)=v(x)+1$, $F_m(x)=\displaystyle\int\frac{u'(x)}{u^2(x)+m^2-1}dx$

Caz I. Dacă $m\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$,atunci $F_m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}arctg\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{m^2-1}}+C$

Caz II. Dacă $m\in(-1;1), atunci\, F_m(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-m^2}}\ln\dfrac{x^2+3x+1-\sqrt{1-m^2}}{x^2+3x+1+\sqrt{1-m^2}}+C$

Caz III. Dacă $m\in\{-1;1\}$,atunci $F_m(x)=-\dfrac{1}{x^2+3x+1}+C$

L:984. Fie $a,b,c,d\rangle 0$ **astfel încât** $ad\neq bc$ **să se calculeze:** $\displaystyle\int\frac{x\cdot\sin x+\cos x}{(ax+b\cos x)(cx+d\cos x)}dx,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Gheorghe Ghiță, Buzău

***Rezolvare*:** Deoarece $(a-b\sin x)(cx+d\cos x)-(ax+b\cos x)(c-d\sin x)=(ad-bc)(\sin x+\cos x)$

atunci integrala dată $I=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\displaystyle\int\frac{(ad-bc)\left(x\cdot\sin x+\cos x\right)}{(ax+b\cos x)(cx+d\cos x)}dx=\frac{1}{ad-bc}\int\left(\frac{a-b\sin x}{ax+b\cos x}-\frac{c-d\sin x}{cx+d\cos x}\right)dx=$

$=\dfrac{1}{ad-bc}\ln\dfrac{ax+b\cos x}{cx+d\cos x}+C$

L:985. Calculați integrala: $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{\mathrm{arcctgx}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **Vasile Mircea Popa**, Sibiu

***Rezolvări*:** Notăm: $I=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{\mathrm{arcc\,tg\,x}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; $J=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{\mathrm{arc\,tg\,x}}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Avem $I+J=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{\mathrm{arcc\,tg\,x+arc\,tg\,x}}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{3}}$

$I+J=\dfrac{\pi}{2}\left(\arcsin\dfrac{\sqrt3}{6}-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt3}{6}\right)\right)$, $I+J=\dfrac{\pi}{2}\cdot2\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt3}{6}=\pi\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt3}{6}$

Putem scrie: $J=0$ deoarece funcția de sub semnul integrală este impară.

Rezultă valoarea integralei din enunțul problemei: $I=\pi\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt3}{6}$

L:986. Demonstrați că $\displaystyle\int_1^2\frac{2x^4+10x^2+17}{\left[\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\right]^2}dx\leq\frac{5}{32}$. **Codruț-Sorin Zmicală, Sighetu Marmației**

Rezolvare: Din $\left(x-1\right)^2\geq0,\forall x\in\mathbb{R},$ rezultă că $x^2+1\geq2x,\forall x\in\mathbb{R}.$ Prin urmare,

$\frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{2x}$, de unde $\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \le \frac{1}{4x^2}, \forall x \in [1,2]$. În mod analog, $\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} \le \frac{1}{16x^2}, \forall x \in [1,2]$.

Așadar, $\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} \le \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{16x^2} = \frac{5}{16x^2}, \forall x \in [1,2]$.

Integrând inegalitatea precedentă pe intervalul $[1,2]$, se obține

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}\right] dx \le \int_1^2 \frac{5}{16x^2} dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{2x^4+10x^2+17}{\left[\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\right]^2} \le \frac{5}{16}\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{5}{32}.$$

$\boxed{\text{L:987}}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ și $x \rangle 0$ să se calculeze: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{2} \frac{dx}{x\left(1+x\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\cdot.....\cdot x\sqrt[n]{x}}}}\right)}$.

Florică Anastase, Lehliu- Gară

Rezolvare: Funcția de sub integrală este egală cu x^{E_n} unde $E_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$, atunci integrala dată este

$$I = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{x(1+x^{E_n})} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{E_n-1}}{1+x^{E_n}}\right) dx = \left[\ln x - \frac{\ln(1+x^{E_n})}{E_n}\right]\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{1}.$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(1+(\frac{1}{n})^{E_n})}{E_n} + \ln\frac{1}{n} - \frac{\ln 2}{E_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{n^{E_n-1}} \ln(1+\frac{1}{n^{E_n}})^{n^{E_n}} = 0.$$

$\boxed{\text{L:988}}$. Calculați: a) Suma $S_n = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + ... + 2\cos nx$, $n \in \mathbb{N}^*$ **și** $x \in \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

b)Calculați integrala $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Avem $S_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2\cos 2kx \Rightarrow (S_n - 1)\sin x = \sum_{k=1}^{n} 2\sin x\cos 2kx = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\right] =$ …….

$= \sin(2n+1)x - \sin x$. Pentru $x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_n = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Folosind punctul a) găsim succesiv : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + ... + 2\cos 2nx\right) dx$.

$$I = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kn}{2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

" Căpătăm înțelepciune din eșec mai mult decât din succes. Adesea descoperim ce vom face, descoperind ceea ce nu vom face ". **Samuel Smiles (1812- 1904)**

„ Uitarea și mersul mai departe sunt cea mai mare înțelepciune”
Friedrich Nietzche
(1844- 1900)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1159. Suma a șaptesprezece numere naturale consecutive este 2023. Aflați numerele.

Elena Alexie, **Laura Zaharia**, Craiova

G:1160. Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_{2022} \rangle 0$ astfel încât $S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{2}{x_2+1}+....+\frac{2022}{x_{2022}+1}=2023.$ Calculați suma $S^I=\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{2x_2}{x_2+1}+....+\frac{2022x_{2022}}{x_{2022}+1}$.

Ginela Dobrica, Bechet

G:1161. Într-un bloc sunt apartamente cu 2 camere, respectiv 3 camere, în total 56 apartamente și 148 camere.
a) Este posibil ca numărul apartamentelor cu câte 3 camere să fie 40? Justificare.
b) Aflați câte apartamente de fiecare fel sunt.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1162. Pentru $n \in \mathbb{N}$, să se compare numerele: $A=(3\cdot 83^{2n})^2+(5\cdot 83^{2n})^2+(7\cdot 83^{2n})^2$ și $B=(83^n)^4+(83^n)^4+(3\cdot 83^n)^4$.

Ionel Tudor, Călugăreni

G:1163. Determinați trei numere naturale știind că mediile aritmetice ale oricăror două numere este egală cu 24.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1164. Comparați numerele $a=2025\cdot 2^{224}$ și $b=800\cdot 3^{150}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1165. Fie x, y$\in$N*. Demonstrați că, dacă suma $x+4y$ este divizibilă cu 7, atunci fracția $\frac{x+4y}{2x+y}$ este reductibilă.

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1166. Să se determine numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab}=2a^3+5b^2$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1167. Există numere naturale x și y pentru care $x^4+y^4=2023$? Justificați.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1168. Determinați cele mai mici numere naturale x, y, z cu proprietățile: $\frac{14x}{27y}=\frac{9y}{7z}=\frac{3z}{2x}$.

Adrian Stan, Buzău

▪ Clasa a VI-a

G:1169. Două robinete, deschise simultan, pot umple un bazin în 6 ore. Dacă însă, primul robinet curge singur 3 ore, după care se deschide și al doilea robinet, bazinul se umple acum în 4 ore. Să se afle în câte ore ar umple bazinul fiecare robinet curgând singur.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1170. Găsiți o scriere a numărului 2022 în forma $2022=2x+3y+5z+5t$ unde x,y,z,t și $x+y+z+t$ sunt numere naturale prime. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

G:1171. Determinați numerele de forma $\overline{5x3y}$ care dau restul 7 la împărțirea cu 12.
elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1172. Arătați că există trei numere naturale m, n, p pentru care $99^{2023}=m^3+n^3+p^3$.
Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1173. Determinați numerele întregi nenule a, b, c, d pentru care:
$\frac{15}{a+b+c}=\frac{30}{b+c+d}=\frac{45}{c+d+a}=\frac{60}{d+a+b}$ și $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)=1944$.
Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1174. Fie a, b, c numere întregi nenule și $A=a^{n+10}\cdot b^{3n^2}\cdot c^{2n^2+9}, B=a^{n^2}\cdot b^{3n}\cdot c^{2n+11}$.
Arătați că numerele A și B au același semn.
Iuliana Trașcă, Slatina, Olt

G:1175. Calculați: $\frac{1}{5^{-2023}+1}+\frac{1}{5^{-2022}+1}+...+\frac{1}{5^{2022}+1}+\frac{1}{5^{2023}+1}$. **Iuliana Trașcă**, Slatina, Olt

G:1176. Numerele naturale nenule x și y au proprietatea că numărul $x^{2023}+x+y^2$ este divizibil cu xy. Demonstrați că x este pătrat perfect.
Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1177. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $xy+py-x+y-1=0$ unde p este un număr prim dat.
Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1178. Arătați că dacă numerele raționale și nenule, x și y verifică relația $2x^2+5xy+3y^2=0$ atunci, $3x+4y\neq 0$ și $\frac{4x+y}{3x+4y}\in\mathbb{Z}$. **Adrian Stan,** Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:1179. a) Să se descompună în factori primi numărul 240219;
b) Arătați că numărul 240219001 este pătrat perfect. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

G:1180. Determinați numerele naturale a și b astfel încât $\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{a^3+b^3}{2}+\frac{a^4+b^4}{4}=\frac{b+3}{b+1}$.
Adrian Stan, Buzău

G:1181. Determinați numerele a și b care verifică egalitatea
$3a+3b+28=8\sqrt{3a+5}+6\sqrt{3b-2}$ și calculați $(a-b-1)^{2022}$. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

G:1182. Fie numărul A în baza trei cu n cifre, $A=222....2_{(3)}$. Scrieți numărul A^2 în baza trei.
Dorina Goiceanu, Iulia Sanda, Craiova

G:1183. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^2=y^2+py$ unde p este un număr prim impar. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1184. Calculați $\sqrt{1+2021\cdot\sqrt{1+2022\cdot\sqrt{4+2022\cdot\sqrt{1+2025\cdot 2027}}}}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

G:1185. Demonstrați că pentru $a, b>0$ și $a\cdot b=1$ are loc inegalitatea $\sqrt{a+2025b}+\sqrt{b+2025a}\geq 46\sqrt{2}$. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

G:1186. Se consideră trapezul ABCD cu AB∥CD și punctul O intersecția diagonalelor sale. Se știe că $\mathbf{A}_{AOD}+\mathbf{A}_{BOC}=OB\cdot OC$. Să se arate că trapezul este ortodiagonal.
Dacă aria trapezului este egală cu 160 cm^2, să se afle valoarea produsului AC·BD.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1187. Arătați că aria S a unui triunghi de laturi a, b, c și înălțimi h_a, h_b, h_c este
$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}}}$. **Oana Preda**, **Călina Doina Cristina**, Craiova

G:1188. Fie ABCD un trapez cu $AD\parallel BC$ și M mijlocul lui $[AD]$. Fie $\{N\}=BD\cap CM$. Arătați că $BC=CN$ dacă și numai dacă $AN\perp BD$. **Simona Chiriță, Grigorie Dan**, Craiova

▪ Clasa a VIII-a

G:1189. Numerele reale x și y verifică simultan relațiile: $x^4+24y=6x^3-y^2+119$ și $y^4+24x=6y^3-x^2-151$. Calculați x^2+y^2. **Dana Camelia, Ramona Nălbaru**, Craiova

G:1190. Fie $a,b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ care verifică relațiile $\begin{cases} a^3-b^3=x\sqrt{18}+y\sqrt{8} \\ a-b=xy\sqrt{2}\end{cases}$. Arătați că $a\cdot b\in\mathbb{Q}$.
Adrian Stan, Buzău

G:1191. Arătați că numărul $A=2023\cdot 2025^3-2024\cdot 2022^3$ este cub perfect.
Carmen Vlad, Mihaela Daianu, Craiova

G:1192. Rezolvați în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $4x^2-y^2+2\left(x^2y^2-1\right)=2022$
Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1193. a) Rezolvați în numere naturale ecuația: $8(7x^2+y^2)-7(x-y)^2=40484484$;
b) Determinați $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, pentru care $8(7x^2+y^2)-(7x+y)^2$ este cub perfect.
Ionel Tudor, Călugăreni

G:1194. Fie $x\rangle\ y\ \rangle\ 0$ astfel încât $x^{2023}+y^{2023}=x-y$. Arătați că $x^{2022}+y^{2022}\ \langle\ 1$.
Simona Chiriță, Ana Jipescu, Craiova

G:1195. Fie $\lambda\geq 0$ fixat. . Rezolvați în numere reale $(2\lambda+1)\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=x+2\lambda^2+2\lambda+1$.
Marin Chirciu, Pitești

G:1196. Dacă $n\geq\frac{1}{4}$ și $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c\geq 3$ atunci:
$\sqrt{na^2+a+1}+\sqrt{nb^2+b+1}+\sqrt{nc^2+c+1}\geq 3\sqrt{n+2}$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

$\boxed{\text{G:1197}}$. În tetraedrul regulat VABC aflați suma distanțelor de la O (proiecția vârfului pe bază) la fețele acestuia.
Ion Stănescu, Buzău

$\boxed{\text{G:1198}}$. Se dă prisma dreaptă din figura alăturată. Determinați volumul prismei știind că aria totală este 3648 cm ^{2}.
Nicolae Ivășchescu, Canada

$\boxed{\text{G:1199}}$. În tetraedrul regulat ABCD, fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei AD. Știind că MN= $4\sqrt{2}$ cm, să se calculeze aria totală a tetraedrului.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, Mădălina Buliga, București

$\boxed{\text{G:1200}}$. În tetraedrul $ABCD$ notăm cu E și F proiecțiile punctelor A, respectiv B pe dreapta CD. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, $[AE]\equiv[BF]$ și $MN\perp CD, N\in CD$, arătați că $MN\perp AB$.
elev Gobej Ștefan, Curtea de Argeș

▪ Clasa a IX-a

$\boxed{\text{L:989}}$. Să se determine funcția de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că graficul lui f trece prin punctul $A(0;6)$ și că $f\left(f(x+1)\right)+f\left(f(x-1)\right)=8x+36,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Adrian Stan, Buzău

$\boxed{\text{L:990}}$. Să se arate că $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..................+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=198$.

Elena si Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

$\boxed{\text{L:991}}$. Să se rezolve ecuația : $\frac{[2x+1]}{[x]+1}+\frac{[x]+1}{[2x+1]}=2, x\in\mathbb{R}_+$

Elena si Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

$\boxed{\text{L:992}}$. Se consideră numerele reale strict pozitive $x_1, x_2,..., x_n$, astfel încât $x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=1$. Demonstrați că $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n}\le x_1+x_2+...+x_n$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

$\boxed{\text{L:993}}$. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*_+$. Arătați că
$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2-bc+c^2}+\frac{c+d}{c^2-cd+d^2}+\frac{d+a}{d^2-da+a^2}\le 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$. În ce caz avem egalitate ?

Laura Popescu, Iulian Micu, Craiova

$\boxed{\text{L:994}}$. Dacă $a,b,c\rangle 0$ cu $a^2+b^2+c^2\le 3$ atunci $\frac{a+2b}{2a+b}+\frac{b+2c}{2b+c}+\frac{c+2a}{2c+a}\ge 2(a+b+c)-3$.

Emil C. Popa, Sibiu

$\boxed{\text{L:995}}$. Dacă $x,y,z>0, x+y+z=1$ atunci, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:996. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+1=2[y] \\ y^2+1=2[z] \\ z^2+1=2[x] \end{cases}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Ionuț Ivănescu, Craiova

L:997. Să se rezolve sistemul de inecuații $\begin{cases} a^3+4\le 3b+9c \\ b^3+2\le 3c^2 \\ c^3+27\le 3a^2 \end{cases}$ în numere reale pozitive.

Daniel Vacaru, Pitești

L:998. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{\sin x}$, $2-2^{\sin x+\cos x}$, $2^{\cos x}$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Virginia Grigorescu, Daniela Barbu, Craiova

L:999. Arătați că lungimile $a,b,c\rangle 0$ ale laturilor unui triunghi, verifică inegalitatea:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(c-a)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}\ge 3.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

L:1000. Să se arate că în orice triunghi cu lungimile laturilor a, b, c are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{1}{a^2}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{b^2}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{c^2}+2\right)\ge\frac{9}{R^2}.$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București, **Ionel Tudor**, Călugăreni

L:1001. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC, are loc relația:

$$\sum_{cyc}\frac{9a^3b^3c^3}{b^2+c^2-a^2}\ge 2s\left[8F(R+r)\right]^2$$

, unde F reprezintă aria triunghiului ABC.

Florică Anastase, Lehliu-Gară

L:1002. Să se arate că în orice triunghi are loc dubla inegalitate: $3\le\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\le\sqrt{\frac{4R+r}{r}}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1003. În triunghiul ABC cu punctele $M\in[BC]$, $N\in[CA]$, $P\in[AB]$ au loc relațiile

$$\frac{AB^2}{MC}+\frac{AC^2}{MB}\le\frac{(AB+AC)^2}{BC}\text{ respectiv }\frac{BC^2}{NA}+\frac{BA^2}{NC}\le\frac{(BC+BA)^2}{AC}\text{ și }\frac{AC^2}{PB}+\frac{AB^2}{PC}\le\frac{(AC+AB)^2}{BC}$$

Stabiliți cine sunt punctele *M, N, P*? Sunt dreptele *AM, BN, CP* concurente? Dacă da, ce reprezintă punctul de intersecție al acestora? Caracterizați vectorial punctul de intersecție obținut.

Elena Codeci, Daniel Codeci, Daniel Văcaru, Pitești

▪ Clasa a X-a

L:1004. a) Dacă $m\rangle n\ge 2$ sunt numere naturale, să se scrie numărul $\left(m^2+n^{10}\right)\cdot\left(n^2+m^{10}\right)$ ca sumă a două pătrate perfecte. b) Descompuneți în factori primi numărul $(2^6+3^6)^2+(6^5-6)^2$.

Ionel Tudor, Călugăreni

L:1005. Rezolvați în $\mathbb{R}_+$ ecuația $3^{4\cdot\log_3^2 x}=27x$.

Adrian Stan, Buzău

L:1006. Arătați că dacă $x, y, z\rangle 0$, atunci:

$$(x^2y^2+1)(y^2z^2+1)(z^2x^2+1)\left(\frac{1}{(x+y)^4}+\frac{1}{(y+z)^4}\frac{1}{(z+x)^4}\right)\geq\frac{81}{64}.$$

D.M. Bătinețu- Giurgiu, București**, Ionel Tudor**, Călugăreni

L:1007. Se consideră funcția $f\ :[1,+\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.

Calculați $f\left(\frac{9}{2}\right)$ Demonstrați că $\operatorname{Im} f=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

L:1008. Demonstrați că $\log_9 14<\sqrt{(\log_7 11)\cdot(\log_7 12)}$ fără a utiliza tabelele de logaritmi.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1009. Să se arate că în triunghiul ABC are loc relația $\left(\frac{AG}{bc}\right)^3+\left(\frac{BG}{ca}\right)^3+\left(\frac{CG}{ab}\right)^3\geq\frac{1}{9R^3}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1010. Să se rezolve ecuația: $a\left(\sin x_1\ln(\sin x_1)+\sin x_2\ln(\sin x_2)+.......+\sin x_n\ln(\sin x_n)\right)$
$=(1-\sin x_1)(1+a\sin x_1)+(1-\sin x_2)(1+a\sin x_2)+......+(1-\sin x_n)(1+a\sin x_n)$, unde $a\rangle 0$.

Gheorghe Ghita, Buzău

▪ Clasa a XI-a

L:1011. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}}\frac{x^2-3x}{2}\cdot\left[\frac{3}{x^2-4x+3}\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Adrian Stan, Buzău

L:1012. Construiți o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care este de 2022 ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ și nu este de 2023 de ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1013. Fie $\lambda\geq 2$ fixat. Dacă $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ atunci să se găsească minimul expresiei $E=2\lambda\left(\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1014. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$, ecuația $\sqrt[5]{x^2+7}+\sqrt[5]{x^2+218}=x$.

Ionel Tudor, Călugăreni

L:1015. Fie $k\rangle\ 0$ și $a,b,c\rangle\ 0$ astfel încât $a+b+c=ab+bc+ac$. Să se arate că

$$(b+c)\sqrt{ka^2+2ka+k+1}+(c+a)\sqrt{kb^2+2kb+k+1}+(a+b)\sqrt{kc^2+2kc+1}\geq 6\sqrt{4k+1}$$

Gheorghe Ghita, Buzău

"Înțelepciunea își va da putere, dar caracterul îți va da respect". Bruce Lee (1940 - 1973)

▪ Clasa a XII-a

L:1016. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\ si\ a^2\neq b^2\right\}$. Determinați subgrupurile finite ale grupului $(G,\cdot)$ unde " $\cdot$ " este înmulțirea matricelor. elev **Ionuț Florin Voinea**, București

L:1017. Determinați polinoamele $P\in\mathbb{C}[X]$ astfel încât $P(2023x)=2022P(x)+x$, $\forall x\in\mathbb{C}$ și $P(1)=1$.

Ana Jipescu, Mihaela Daianu, Craiova

L:1018. Se consideră ecuația $x^4-6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=0$. Arătați că ecuația nu are nicio rădăcină reală și rezolvați ecuația în numere complexe. **Ionel Tudor**, Călugăreni

L:1019. Fie funcția f: $[0;\infty)\to R$; $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$. Determinați primitiva funcției f știind că graficul primitivei trece prin punctul A(9;10) și arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[0;\infty)$

Nica Silvioara Minodora, Buzău

L:1020. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2\cdot e^{-x}+e^x}dx$. **Adrian Stan,** Buzău

L:1021. Fie $f,g:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ indefinit derivabile, $g^{II}(0)\neq 0$ și notăm pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$;

$a_n=4n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^3)dt-4f(0)$, $b_n=4n^4\int_0^{\frac{1}{n}} g(t^3)dt-4n^3g(0)-g^I(0)$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Emil C. Popa, Sibiu

L:1022. Calculați $\int (x+2)\cdot\left(6^x+6^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{x}{3}}+....+6^{\frac{x}{20}}\right)dx$, $x\in\mathbb{R}$.

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

L:1023. Calculați. $\int x\cdot[\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)]dx,\ x>0$

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

L:1024. **Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)}{2(\sin x\cdot\cos x-1)}dx$.

Adrian Stan, Buzău, **Radu Diaconu**, Sibiu

L:1025. Să se calculeze $\int \frac{x^{4n}-1}{x^{n+1}\sqrt{x^{4n}+x^{3n}-x^n+1}}dx,\ x\rangle 0$.

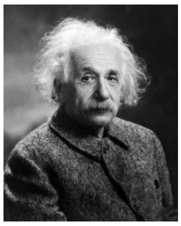
Gheorghe Ghită, Buzău

L:1026. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:

$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{(x+1)^5}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

L:1027. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}+x^2}dx$. **Adrian Stan, Stefan Pirlog**, Buzău



„ I have no special talent . I am only passionately curious .”
Albert Einstein
(1879 - 1955)

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader’s name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before <u>SEPTEMBER, 01,2023.</u>

PROPOSALS – QUICKIES

Q88. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

If $a\ge 1$ **then prove that** $\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3\ge 2$ **. When does the equality holds ?**

Q89. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that in any triangle ABC is true the following inequality: $\frac{m_a^2}{h_a^2}+\frac{m_b^2}{h_b^2}+\frac{m_c^2}{h_c^2}\le\frac{3R^4}{16r^4}$.

Q90. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania. If $x,y,z>0$, then prove that in any triangle ABC with area F holds the inequality $\frac{x+y}{z}a+\frac{y+z}{x}ab+\frac{z+x}{y}bc^2\ge 8\sqrt{3}F$.

Q91. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania. If $a,b,c>0$, then prove that

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\ge 1 .$$

Q92. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. Solve for real numbers the equation

$$x^5+6^x+\log_6(x^5+6x)=x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x+\log_6(x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x) .$$

SOLUTIONS - QUICKIES

Q82. Proposed by Dorin Mărghidanu , Corabia, Romania. If a,b,c are strictly positive real numbers, prove that: $A_3\left[\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right]\ge\frac{A_3[a,b,c]}{G_3[a,b,c]}$, where $A_3[x,y,z]=\frac{x+y+z}{3}$, $G_3[x,y,z]=\sqrt[3]{xyz}$, $x,y,z>0$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania and independently by Marian Cucoaneș, Mărășești, Romania . By AM-GM inequality, we have :

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\overset{AM-GM}{\ge}3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}},\quad \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}},\quad \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Adding up these three inequalities, we obtain that $A_3\left[\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right]\ge\frac{A_3[a,b,c]}{G_3[a,b,c]}$.

Solution 2 by Henry Ricardo, Tappan, New York, USA.

The AGM inequality yields $A_3\left[\frac{a}{b},\frac{a}{b},\frac{b}{c}\right] \ge G_3\left[\frac{a}{b},\frac{a}{b},\frac{b}{c}\right] = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}$. Similarly,

$A_3\left[\frac{b}{c},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right] \ge G_3\left[\frac{b}{c},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right] = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}$ and $A_3\left[\frac{c}{a},\frac{c}{a},\frac{a}{b}\right] \ge G_3\left[\frac{c}{a},\frac{c}{a},\frac{a}{b}\right] = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$.

Adding these three inequalities gives us

$$3A_3\left[\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right] \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}, \text{ or } A_3\left[\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right] \ge \frac{A_3[a,b,c]}{G_3[a,b,c]}.$$

Solution 3 by Henry Ricardo, Tappan, New York, USA.

We apply the rearrangement inequality to

$$(a_1,a_2,a_3)=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}},\sqrt[3]{\frac{b}{c}},\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right),\ (b_1,b_2,b_3)=\left(\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2},\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c}\right)^2},\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\right), \text{ and } (\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3)=\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}},\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)$$

obtain

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}},$$

from which the desired result follows.

Solution 4 by author. After a short preparation and then with the application of the weighted AM-GM inequality, we have : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{2\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}}{3}+\frac{2\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}+\frac{2\cdot\frac{c}{a}+\frac{a}{b}}{3}\overset{AM-GM}{\ge}$

$\overset{AM-GM}{\ge}\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{3\cdot A_3[a,b,c]}{G_3[a,b,c]}$. Equality occurs iff :

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{b+c+a}=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

Q83. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If ABC is a triangle with area F, then prove that $7(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\ge 36F+3\sum_{cyc}(a-m_a)^2$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania and independently by Marian Cucoaneş, Mărășești, Romania . Since $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ and $am_a\ge ah_a=2F$, we obtain

$7(m_a^2+m_b^2+m_c^2)-3((a-m_a)^2+(b-m_b)^2+(c-m_c)^2)=$

$=\frac{21}{4}(a^2+b^2+c^2)-3(a^2+b^2+c^2)-\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)+6(am_a+bm_b+cm_c)=$

$=6(am_a+bm_b+cm_c)\ge 36F$.

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

$7\sum m_a^2\ge 36F+3\sum(a-m_a)^2 \Leftrightarrow 7\sum m_a^2\ge 36F+3\left(\sum a^2-2\sum am_a+\sum m_a^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sum m_a^2-3\sum a^2+6\sum am_a\ge 36F \Leftrightarrow 4\cdot\frac{3}{4}\sum a^2-3\sum a^2+6\sum am_a\ge 36F \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\sum am_a\ge 36F \Leftrightarrow \sum am_a\ge 6F$, which yields by Tereshin's inequality $m_a\ge\frac{b^2+c^2}{4R}$.

So, $\sum am_a \overset{Tereshin}{\geq} \sum a \cdot \frac{b^2+c^2}{4R} = \frac{1}{4R}\sum a(b^2+c^2) = \frac{1}{4R}\cdot 2p(p^2+r^2-2Rr) =$

$= \frac{p(p^2+r^2-2Rr)}{2R} \overset{Gerretsen}{\geq} \frac{p(16Rr-5r^2+r^2-2Rr)}{2R} = \frac{p(14Rr-4r^2)}{2R} = \frac{pr(7R-2r)}{R} =$

$= \frac{F(7R-2r)}{R} \overset{Euler}{\geq} 6F$. Equality holds iff triangle is equilateral.

Solution 3 by Daniel Văcaru, Pitești, Romania. We have $\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2$ and $3\sum (a-m_a)^2 = 3\sum a^2 - 6\sum am_a + 3\sum m_a^2$. Our inequality becames $\sum am_a \geq 6F$, which is true because $m_a \geq h_a \Rightarrow am_a \geq ah_a = 2F \Rightarrow \sum am_a \geq 6F$.

Solution 4 by author. $\sum_{cyc}(a-m_a)^2 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} m_a^2 - 2\sum_{cyc} am_a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\sum_{cyc} m_a^2 + \sum_{cyc} m_a^2 = 2\sum_{cyc} am_a + \sum_{cyc}(a-m_a)^2$$

$$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc} m_a^2 = 6\sum_{cyc} am_a + 3\sum_{cyc}(a-m_a)^2 \geq 6\sum_{cy} ah_a + 3\sum_{cyc}(a-m_a)^2 = 36F + 3\sum_{cyc}(a-m_a)^2.$$

Q84. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

If $a>0$, then compute $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

Solution 1 by Daniel Văcaru, Pitești, Romania.

$$(\sqrt[n]{a}-1)\sqrt[n]{(2n-1)!!} = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\cdot n\cdot(\sqrt[n]{a}-1) = \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{\frac{1}{n}\ln a}\cdot \ln a,\ \forall n\geq 2.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(2n-1)!!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{2}{e}$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{\frac{1}{n}\ln a} = 1$. Hence, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\sqrt[n]{(2n-1)!!} = \frac{2}{e}\cdot 1\cdot \ln a = \frac{2\ln a}{e}$.

Solution 2 by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Since $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\ln\sqrt[n]{a}} = 1$, the limit may be rewritten as $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\ln a$. Now, by the Stirling formula for the factorial, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\ln a = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{(2n)!!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n\sqrt[n]{n!\cdot 2^n}} = \frac{2}{e}$.

Therefore, the proposed limit is equal $\frac{2\ln a}{e}$.

Q85. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Determine all continue functions $f:[0,1]\to R$ such that: $xf(1-x)(x-f(x)+\int_0^1 xf(1-x)(x-f(x))dx \geq \int_0^1 (x^2f^2(1-x)+(x-f(x)^2)dx$.

Solution by author. We have: $\int_0^1 2xf(1-x)(x-f(x))dx \geq \int_0^1 (x^2 f^2(1-x)+(x-f(x)^2)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (xf(1-x)-(x-f(x)))^2 dx \leq 0$, but $\int_0^1 (xf(1-x)-(x-f(x)))^2 dx \geq 0$.

Hence, $\int_0^1 (xf(1-x)-(x-f(x)))dx = 0$. So, $xf(1-x) = x - f(x)$ and we have to solve the system: $xf(1-x)+f(x) = x$ and $(1-x)f(x)+f(1-x) = 1-x$; by multiplying the second equation with x and subtracting this equation from the first yields successively $(x^2-x)f(x)+f(x) = x^2$, $(x^2-x+1)f(x) = x^2$ and in conclusion $f(x) = \frac{x^2}{x^2-x+1}$.

Q86. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania.

How many real solutions has the equation $3x^3+\log_2\left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)+\log_3\left(\frac{3x^3+1}{3x}\right)+1 = 3x$?

Solution by author. We consider injective function $f(t) = \log_2 t + \log_3 t + t$, $t > 0$, and equation is $f(3x^3+1) = f(3x)$, so $3x^3+1 = 3x$. We have $x_1 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, so $x_3 \in R$.

Hence, the equation has three real solutions.

Q87. Proposed by Marian Cucoaneș, Mărășești, Vrancea, Romania.

Prove that in any triangle ABC with usual notations holds:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+p(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2} \leq m_a+m_b+m_c \leq$$
$$\leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})+\frac{1}{2}(|a-b|+|b-c|+|c-a|).$$

Solution by author. We use the following results: (i) If $x, y \geq 0$, then $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$; (ii) If $x, y, z \in R$ with $x+y+z = 0$ and $a, b, c > 0$, then $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{a+b+c}$. We have that:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2+(b-c)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)+(b-c)^2} =$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4p(p-a)+(b-c)^2} \overset{(i)}{\leq} \frac{1}{2}(\sqrt{4p(p-a)}+\sqrt{(b-c)^2}) = \sqrt{p(p-a)}+\frac{1}{2}|b-c|$ and other two similar inequalities, i.e. $m_b \leq \sqrt{p(p-b)}+\frac{1}{2}|c-a|$, respectively $m_c \leq \sqrt{p(p-c)}+\frac{1}{2}|a-b|$.

Hence, $m_a+m_b+m_c \leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})+\frac{1}{2}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$, i.e. the right side of inequality is proved. Also, we have that:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4p(p-a)+(b-c)^2} \Leftrightarrow 4m_a^2-4p(p-a) = (b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow m_a-\sqrt{p(p-a)} = \frac{(b-c)^2}{4(m_a+\sqrt{p(p-a)})}$ and other two analogously, i.e.

$m_b-\sqrt{p(p-b)} = \frac{(c-a)^2}{4(m_b+\sqrt{p(p-b)})}$, respectively $m_c-\sqrt{p(p-c)} = \frac{(a-b)^2}{4(m_c+\sqrt{p(p-c)})}$.

Hence, using (ii) we obtain $m_a-\sqrt{p(p-a)}+m_b-\sqrt{p(p-b)}+m_c-\sqrt{p(p-c)} =$

$$= \frac{(b-c)^2}{4(m_a+\sqrt{p(p-a)}} + \frac{(c-a)^2}{4(m_b+\sqrt{p(p-b)}} + \frac{(a-b)^2}{4(m_c+\sqrt{p(p-c)}} \overset{(ii)}{\geq}$$

$$\overset{(ii)}{\geq} \frac{2((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)}{4(m_a+m_b+m_c+\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)})}, \text{ or}$$

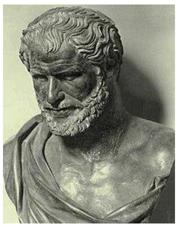
$$m_a+m_b+m_c-\sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}) \geq \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{m_a+m_b+m_c+\sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})} \text{ or}$$

$$(m_a+m_b+m_c)^2 - p(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 \geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+p(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2} \leq m_a+m_b+m_c$, i.e. the left side inequality is proved.

ELEVI REZOLVITORI

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a VI-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof**. Grigorie Dan Lucian**
Clasa a IX-a: Maria- Amina Tanasi; **Clasa a XI-a:** Florentina Stanca, Gabriel Enache**. Clasa a XII-a**: Chiriac Maria Elisa, Ștefan Denis. **Prof. Daniel Văcaru.**
Şcoala Gimnazială „ Armand Călinescu” nr. 5, Curtea de Argeș:
Clasa a VIII-a: Gobej Adrian, **Prof. Constantin Nicolau**;
Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a IX-a: Găvăneanu Mariana, Voineag Adi Cornel, Sava Gabriela, Ghiran Ștefan, Anton Eduardo; **Clasa a XII-a:** Berechet Ștefan, Crăciun Elena, Penteliuc Ioana, Mihai Alexandra, Savu Irina**;**
Prof. Adrian Stan.
Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău
Clasa a IX-a: Radu Cătălina, Mareș Adrian Costin, Zaharia Darius Andrei, Bărbunea Daniela Nicoleta, Șerdin Răzvan, Cazacu Rareș Ștefan, Milea Marian, Tudor Eduard Marian, . Prof**. Stan Adrian**
Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova
Clasa a VIII-a: Ionescu Mihai, Viespescu Carina, Prof. **Dinu Daniela**; Bădoiu Cristian; prof. **Nalbaru Ramona;**
Clasa a X-a: Alexie Mihnea, Turcu Stiolica Alexandru, Boiangiu Vlad; **Clasa a XI-a**: Cașcotă Dalina, Rada Andra; **Clasa a XII-**a: Bicu Eduard, Florea Alina, Milcu Amelia, Cealîcu Mihai. Prof. **Tutescu Lucian**.
Clasa a VII-a: Iana Bianca, Tudorașcu Rareș, Schwarz Isabella. Prof. **Sanda Iulia**
Clasa a VIII-a: Bădoiu Cristian. Prof. **Dascălu Simona**. **Clasa a VIII-a**: Ionescu Mihai, Viespescu Carina, Ionașcu Andrei, Mușuloi Matei. Prof. **Dîrnu Daniela; Clasa a IX-a**: Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian.**
Clasa a X-a: Moanță Ștefan. **Clasa a XII-**a: Velicovici Darie. Prof. **Goiceanu Dorina**
Liceul Energetic Craiova
Clasa a VI-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof. **Grigorie Dan Lucian**
Colegiul Național Anastasescu Roșiori de Vede, Teleorman
Clasa a XII-a: Bălțoiu C. Ana-Maria. Prof**. Alecu Orlando**
Şcoala Gimnazială „ Sf. Dumitru”, Craiova
Clasa a VIII-a: Corbeanu Tania, Mihăicescu Teodora. Prof. **Seinu Cristina**
Colegiul Național „N. Titulescu „ Craiova
Clasa a XII-a: Bobocel Maria, Popa Mihaela. Prof. **Turcu Eugenia**
Liceul Teoretic Bechet
Clasa a VIII-a. Stoica Matiaș, Brebu Alexandra. Prof. **Gilena Dobrica; Clasa a XI-a**: Percea Valentina, Prof. **Iacob Meda Elena**
ŞCOALA PREUNIVERSITARĂ DE MĂSURĂ SMEENI, BUZĂU
Clasa a V-a: Tudor Laurențiu, Stanciu Alexandru; **Clasa a VI-a:** Argatu Ioana, Popa Andrada; **Clasa a VII-a**: Mîrzu Diana, Prună Mihaela, Stănescu Daria, Neacșu Gabriela; **Clasa a VIII-a:** Mîrzu Alexandru; **Clasa a IX-a**: Prună Gabriel, Sava Alexandra; **Clasa a X-a:** Gheorghe Adrian; **Clasa a XI-a**: Constantin Ioana. **Clasa a XII-a:** Tudor Andra. **Prof. Ion Stănescu**



„Este înțelept nu acel care e preocupat de ceea ce-i lipsește, ci acel care se bucură de ceea ce are.”
Democrit
(cca 460-360 î.Hr)

6. Caleidoscop matematic

HEXAEDRE

(pseudo definiție)

Rostogolit în plane, printre structuri stabile,
Cu muchii descântate prin rațiuni subtile,
Sau stând pe câte-o față proptită în pătrat,
E gol pe dinăuntru, doar rareori dotat.
Sălășluind adesea în circumscrise sfere,
Își soarbe simetria prin vârfuri și unghere.
De-l mângâi la-ntâmplare în vreun punct notat,
Atunci subit dorește alint în vers ritmat.
Distins printre rețele, ca orice nerotund
În regn de poliedre, nedrept ar fi s-ascund
Ipocrizia-i rece lățită-n șase fețe,
Brodate, fiecare, în câte patru bețe.
Împovărat de colțuri, nu-i nici mărgea, nici tub,
Iar de-i pătrată fața, atunci devine cub.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

"Șpriț „ (vin și apă)

de Kovacs Bela , Satu Mare și **Cernea Ivan** (Ilan), Israel

Motto:
Crăpa-le-ar Domnul, - Principe, - ficații
Si setea ogoi-le-ar cu venin ,
Căci n-au păreche-n lume blestemații:
Crâșmarii care toarnă apă-n vin

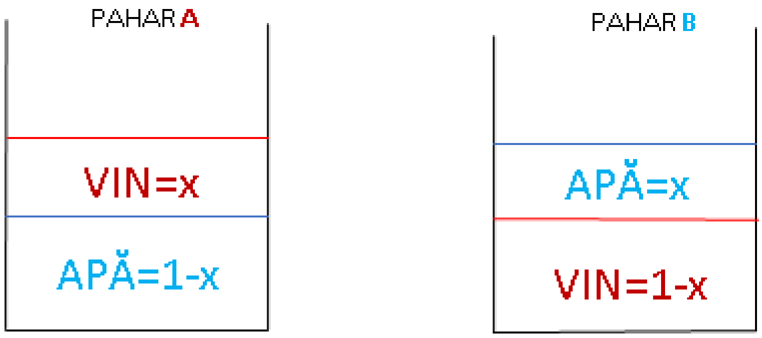
" **Baladă șugubeață despre crâșmari** " de Francois Villon poet francez din secolul XV in traducerea lui Romulus Vulpescu.

Expunerea problemei : Într-un pahar mai mare, să-l numim paharul **A** se află un decilitru (1dl) de **vin** și în alt pahar la fel de mare să-l numim paharul **B** se află 1 dl de **apă.** Turnăm o jumătate din conținutul paharului A cu vin în paharul B cu apă, amestecăm bine conținutul până devine omogen apoi turnăm 0.5 dl înapoi în vasul A astfel că în fiecare vas avem câte 1 dl de soluție.

1. Care raport este mai mare, apa din vin în paharul A sau vinul în apă în paharul B?
2. Repetând procedeul (adică turnăm 0.5 dl din soluția omogenă din A în B și apoi după amestecare turnăm 0.5 dl din B în A) vom putea ajunge să avem în cele două pahare cantități egale de vin și apă?

Soluție:

1. În urma acestei operații va rămâne în fiecare pahar 1 dl de amestec. În acest caz dacă în paharul A (de vin) avem o cantitate de vin x , în paharul A vom avea și o cantitate de apă 1-x iar în paharul B restul de vin (1-x) și de apă x. Adică raportul apă vin în vasul A este ca și raportul vin apă în paharul B. În concluzie , nu contează de câte ori repetăm procedeul (acesta sau oricare altul) atâta vreme cât cantitățile în cele două pahare sunt egale rapoartele (vin/apă și apă/ vin) rămân egale.



2. Vom urmări "traseul" vinului (vinul este mai interesant decât apa). Vom adăuga și concentrația vinului în paharul B , singura concentrație relevantă pentru rezolvarea problemei. Atunci când în pahar este 1 dl , concentrația vinului este egală cu cantitatea ei.

Paharul A	Paharul B	Concentrația de vin după adăugare
1	1	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\div 1.5=\frac{1}{3}$
$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\div 1.5=\frac{4}{9}$

$+\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$	
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	
$-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=-\frac{5}{18}$	$+\frac{5}{18}$	
$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{13}{18}\div 1.5=\frac{13}{27}$
$+\frac{13}{54}$	$-\frac{13}{27}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{13}{54}$	
$\frac{14}{27}$	$\frac{13}{27}$	
$-\frac{7}{27}$	$+\frac{7}{27}$	
$\frac{7}{27}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{20}{27}\div 1.5=\frac{40}{81}$
$+\frac{20}{81}$	$-\frac{40}{81}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{20}{81}$	
$\frac{41}{81}$	$\frac{40}{81}$	

Se obține astfel șirul : $\frac{2}{3},\frac{5}{9},\frac{14}{27},\frac{41}{81},....$ Observăm că numitorul este o progresie geometrică cu termenul general 3^{n-1} iar numărătorul este o progresie de diferențe geometrice cu termenul general $1+\frac{3^n-1}{2}=\frac{3^n+1}{2}$.

Deci putem presupune că după *n* operații de turnare din A în B și din B în A , cantitatea de vin în vasul A este $a_n=\frac{3^n+1}{2\cdot 3^n}$

Vom demonstra prin inducție matematică afirmația.

- Se verifică ușor pentru *n=1*.

- Presupunând formula adevărată pentru n , vom arăta că $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}+1}{2\cdot 3^{n+1}}$.

Ne întoarcem la tabela de mai sus și o continuăm de la *n* la *n+1*.

Paharul A	**Paharul B**	**Concentrația de vin după adăugare**
a_n	$1-a_n$	
$-\frac{1}{2}\cdot a_n$	$+\frac{1}{2}\cdot a_n$	
$\frac{1}{2}\cdot a_n$	$1-\frac{1}{2}\cdot a_n$	$(1-\frac{1}{2}a_n)\div 1.5=(1-\frac{1}{2}a_n)\cdot\frac{2}{3}$
$+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}a_n$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{1}{2}a_n)$	
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a_n=a_{n+1}$		

Așadar $a_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3^n+1}{2\cdot 3^n}=\frac{2\cdot 3^n+3^n+1}{2\cdot 3^{n+1}}=\frac{3^{n+1}+1}{2\cdot 3^{n+1}}$ *Q.E.D.*

<u>Observații:</u>

1. Șirul este descrescător , convergent cu limita $\frac{1}{2}$.

2. În paharul B , cantitatea de vin completează la 1 dl vinul din cele două pahare , adică $\frac{3^n-1}{2\cdot 3^n}$ față de $\frac{3^n+1}{2\cdot 3^n}$. Deci în paharul A va fi mereu mai mult vin decât în paharul B. Raportul vin apă din paharul A este egal cu raportul apă vin din paharul B și e egal cu $\frac{3^n+1}{3^n-1}$. Acest raport este mai mare decât 1 de aceea cantitățile de vin și apă **<u>nu</u>** vor fi niciodată egale în cele două pahare.

Generalizare

Aceeași problemă dar în loc de a turna de fiecare dată 0.5 dl , vărsăm de fiecare dată o cantitate *p* dl , $0<p<1$. Notăm cu x_n cantitatea de vin din paharul A după *n* turnări și returnări din A în B și din B în A.

Vom găsi o formulă recursivă pentru x_{n+1}.

Paharul A	Paharul B	Concentrația de vin după adăugare
x_n	$1-x_n$	
$-p\cdot x_n$	$+p\cdot x_n$	
$(1-p)\cdot x_n$	$1-(1-p)\cdot x_n$	$\frac{1-(1-p)x_n}{1+p}$
$+p\cdot\frac{1-(1-p)x_n}{1+p}$	$-p\cdot\frac{1-(1-p)x_n}{1+p}$	
x_{n+1}		

$$x_{n+1}=(1-p)x_n+p\cdot\frac{1-(1-p)x_n}{1+p}=\frac{(1-p^2)x_n+p-px_n+p^2x_n}{1+p}=\frac{(1-p)x_n+p}{1+p}=\frac{1-p}{1+p}\cdot x_n+\frac{p}{1+p}$$

Dacă $x_{n+1}=\frac{1-p}{1+p}\cdot x_n+\frac{p}{1+p}$ (*) atunci $x_n=\frac{1-p}{1+p}\cdot x_{n-1}+\frac{p}{1+p}$

$x_{n+1}-x_n=\frac{1-p}{1+p}\cdot(x_n-x_{n-1})$. Constatăm că șirul diferențelor $x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{n+1}-x_n$ este o progresie geometrică cu suma $x_{n+1}-x_1=\frac{(x_2-x_1)\cdot\left[\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^n-1\right]}{\frac{1-p}{1+p}-1}$.

Înlocuind $x_1=1$ și $x_2=\frac{1}{1+p}$ (se poate obține și din formula de recurență (*) și făcând simplificările de rigoare obținem $x_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^n$ adică $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{n-1}$.

Kovacs Bela, Satu Mare, **Cernea Ivan** (Ilan), Israel

Știați că ......?

.... În 1484, omul de știință francez **Nicolas Chuqet** (1445- 1488) prin manuscrisul său de algebră, „**Știința despre numere în trei părți**”, face cunoscut în Europa primele reguli de calcul cu numere raționale, cu numere negative, cu rădăcini iraționale și introduce o simbolistică a scrierii numerelor foarte avansată. El mai introduce exponenții negativi și cei nuli în cadrul teoriei rapoartelor, însă termenul de „**exponent**” („**exponens**”) avea să fie introdus de **M. Stiefel** (1487- 1567) în 1544. ([1]. pag. 466).

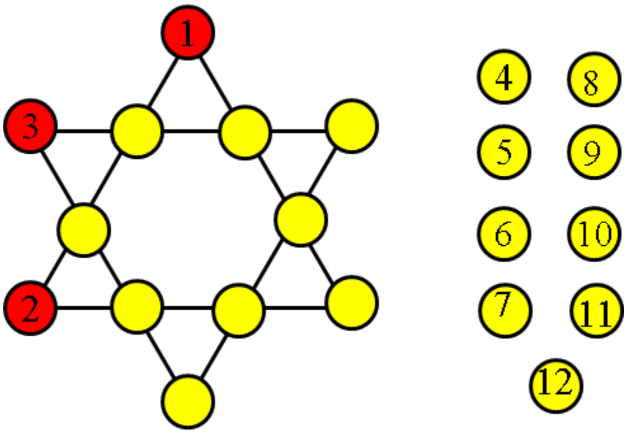
Preocupat de teoria ecuațiilor, **Chuquet** utilizează pentru acestea denumirea de “**epuipolence des nombres**” (“echivalența numerelor”) dar care nu a intrat în uz, fiind mai facilă denumirea de “**equation**”, “ecuație” care provenea de la latinescul “**equatio**” și care a fost folosit de **Leonardo Pisano (Fibonacci)** (1170- 1250) sau **Luca Pacioli** (1447- 1517).

Însă, **Chuquet** a adus algebrei o serie de idei noi, a introdus termenii de “milion”, “billion”, “trilion”, etc . iar teoria ecuațiilor era clar explicată realizând o clasificare a ecuațiilor la patru tipuri generale, ca de exemplu, $ax^m = bx^{m+n}$, $ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$, etc.

[1]. A. P. Iușkevici. Istoria Matematicii în Evul Mediu. Editura Științifică. București. 1963.

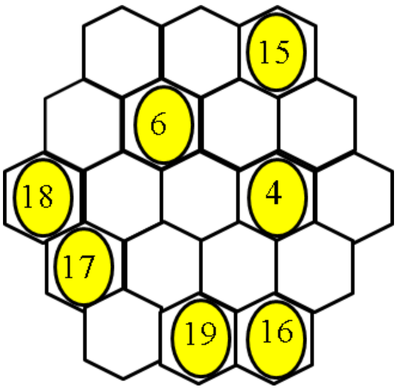
1. STEAUA MAGICĂ

Amplasați numerele lipsă de la 4 la 12 în cercurile goale, astfel încât suma numerelor de pe orice linie dreaptă să fie egală cu 26.



2. HEXAGON MAGIC

Amplasați numerele care lipsesc de la 1 la 14 în hexagoanele care compun figura alăturată, astfel încât suma numerelor de pe oricare linie dreaptă să fie aceeași. Pentru a fi mai simplu au fost deja completate câteva hexagoane, rămânând cele goale de completat. Știți care este acel număr constant și cum se completează figura?



„O stâncă mare nu este tulburată de vânt;
la fel, mintea înțeleptului nu este tulburată
nici de elogii, nici de insulte”.
Buddha
(cca 623- 543 î.Hr)

7. Poşta redacţiei

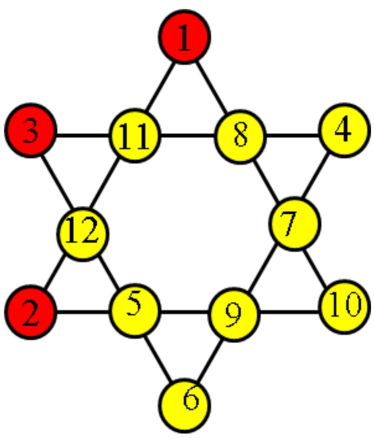
Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 31** al revistei de matematică **„ SCLIPIREA MINTII”**, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

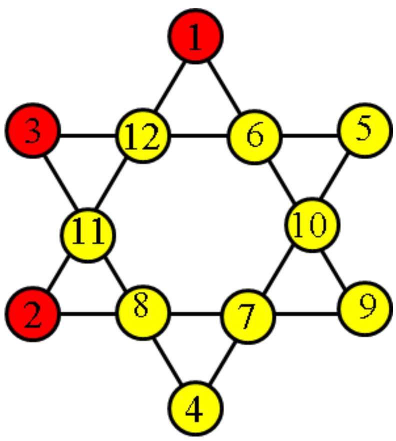
Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003-2007**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 32** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 SEPTEMBRIE 2023**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

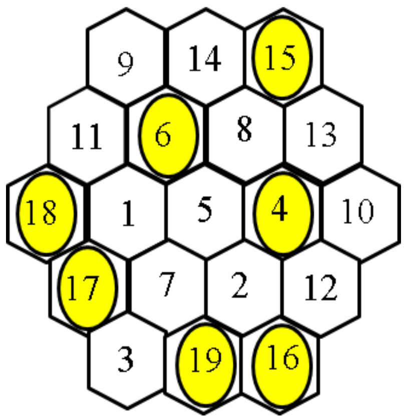
RĂSPUNSURI LA CALEIDOSCOP MATEMATIC

1. Steaua Magică





2. Hexagon magic



2. Hexagon magic. Suma celor 19 numere este egală 190 care se împarte exact la 5. Cum există 5 rânduri paralele cu numere care pe fiecare rând trebuie să dea același număr constant, atunci 190:5=38 ne dă constanta 38. Plecând de aici găsim numerele lipsă.