SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XVI, NR XXXII, 2023

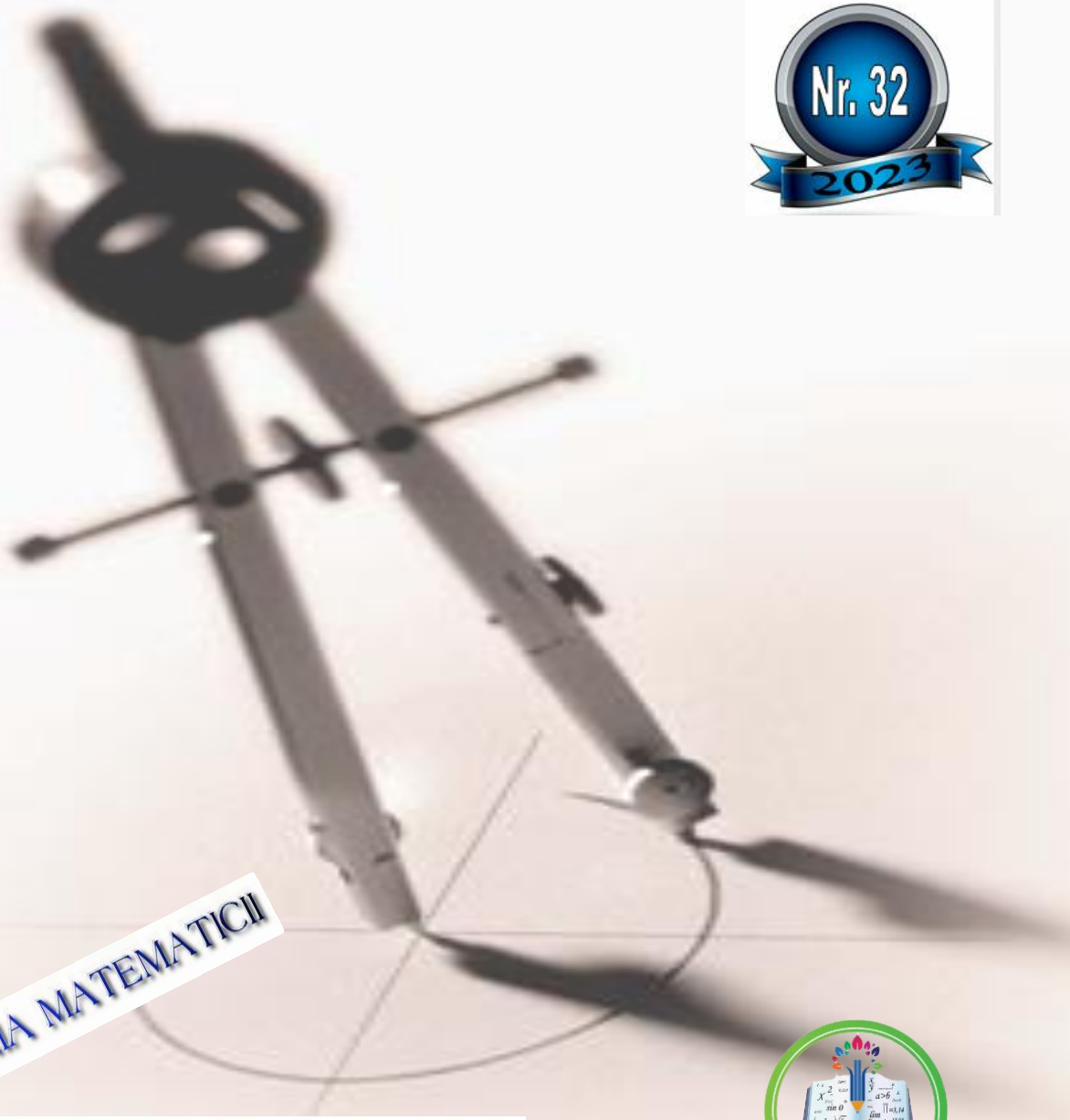
SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

Nr. 32

2023



ISTORIA MATEMATICII

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SCLIPIREA MINȚII

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC MESERII SI SERVICII , BUZĂU

DECEMBRIE 2023

SCLIPIREA MINTII 32

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XVI, Nr. XXXII, DECEMBRIE 2023, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cătălin Iordache – Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cristina Drugă - Inspector şcolar matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Lucian Tuţescu
Marius Drăgan
Dorin Mărghidanu
Daniel Sitaru
Mihály Bencze
Gheorghe Ghiţă
Ionel Tudor
Marin Chirciu

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor şef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre
Ştefan Pîrlog
Ion Stănescu
Iuliana Traşcă
Gabriel Tica
Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 8

PROBLEME REZOLVATE..... 27

PROBLEME PROPUSE 48

QUICKIES 57

CALEIDOSCOP MATEMATIC 61

POŞTA REDACŢIEI..... 68

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri :**

Elena **Alexie**, Florică **Anastase**, Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Daniela **Barbu,** Mădălina **Buliga,** Doina Cristina **Călina,** Gabriela **Militaru Cismaru,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Simona **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Marian **Ciuperceanu,** Elena **Codeci,** Daniel **Codeci,** Ion **Cotoi,** Marian **Cucoaneş** , Luiza **Cremeneanu**, Mihaela **Daianu**, Camelia **Dană**, Radu **Diaconu**, Gheorghe **Dârstaru,** Daniela **Dibu,** Ginela **Dobrica**, Ana **Dumitru,** Lucian Dan **Grigorie,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ștefan **Gobeş**, Virginia **Grigorescu**, **Dorina** Goiceanu, Ionuţ **Ivănescu,** Ana **Jipescu,** Vasile **Jiglău,** Bela **Kovacs,** Adalbert **Kovacs,** Dragoş **Lăzărescu,** Răzvan **Lupu,** Dorin **Mărghidanu,** Monica **Matei,** Iacob **Meda,** Iulian **Micu,** Mihaela **Mirea,** Mariana **Mitea,** Cristian **Moanţă,** Horia **Muşat,** Ramona **Nălbaru,** Cornelia **Neacşu,** Mihaela **Nascu**, Bianca **Negreţ**, Minodora **Nica**, Constantin **Nicolau**, Cristina Diana **Oprescu**, Petre **Păunescu,** Ion **Pătraşcu,** Oana **Preda,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Delia **Popescu,** Laura **Popescu,** Veronica **Popescu,** Dumitru **Preoteasa**, Constantina **Prunaru**, Florin **Rotaru,** Pal **Orban**, Vlad **Orovniceanu,** Iulia **Sanda**, Dumitru **Săvulescu,** Ilinca **Sebastian,** Roxana **Stanciu**, Ileana **Stanciu**, Liviu **Smarandache,** Livia- Emilia **Stan,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Ovidiu **Ţâţan,** Carmen **Terheci,** Gabriela **Toader,** Rareş **Tudoraşcu,** Eugenia **Turcu,** Lavinia **Trincu,** Carmen **Vlad,** Roxana **Vasile,** Carina-Irina **Viespescu,** Daniel **Văcaru,** Ionuţ Florin **Voinea,** Laura **Zaharia,** Gigi **Zaharia,** Codruţ-Sorin **Zmicală**

REDACTIA
Liceul Tehnologic Meserii și Servicii, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

„ Geometria este un cristal pur cu multe fațete,
– multe au fost cercetate , dar multe încă nu...”

(Gheorghe Țițeica)
(1873-1939)

1. Istoria matematicii

GHEORGHE ȚIȚEICA ȘI DIMITRIE POMPEIU

de prof. Ionel Tudor și **prof. Adrian Stan**

Se împlinesc 150 de ani de la nașterea lui **Gheorghe R. Țițeica** (16.10.1873-05.02.1939) și a lui **Dimitrie D. Pompeiu**(22.09.1873-07.10.1954), doi dintre cei mai mari matematicieni români, savanți cu un mare prestigiu internațional.

Gheorghe Țițeica s-a născut în 4/16 octombrie 1873 la Turnu Severin. Părinții au fost Radu Țițeica, originar din Cilibia-Buzău (fochist pe vapoare austriece și apoi mecanic pe vapoarele ,,Navigației fluviale române”) și soția acestuia Stanca, născută Ciolănescu.

Țițeica și-a făcut studiile primare în Turnu Severin iar liceul l-a urmat în Craiova, la Școala Centrală (actualul Colegiu Național Carol I), unde a fost elev intern și tot timpul bursier, fiind excepțional la toate materiile. În anii 1891-1892, liceul avea ,,Revista Școalei” (a doua revistă din țară, după ,,Recreații Științifice”, de la Iași,1893-1889), cu o rubrică permanentă de matematică. Colaboratorul cel mai activ era elevul Țițeica, aflat în ultima clasă de liceu. Aici el a publicat o notă de aritmetică, mai multe probleme de aritmetică, algebră, geometrie și chiar note de critică literară.

După susținerea examenului de bacalaureat, unde a excelat și a uimit comisia, în 1892 a intrat primul la Școala Normală Superioară din București, condusă de **Alexandru Odobescu**, cu examene foarte riguroase și unde elevii erau și studenți la diverse facultăți din Universitatea București.

Gheorghe Țițeica a urmat timp de trei ani Facultatea de Științe, secția matematici, având ca profesori pe **Spiru Haret**, **David Emmanuel**, **Constantin Gogu** , **Dimitrie Petrescu** și generalul **Iacob Lahovari**. A fost impresionat și atras în mod deosebit de lecțiile de mecanică ale lui **Spiru Haret** (1851-1912), primul matematician român cu doctorat la Sorbona și de lecțiile de geometrie descriptivă ținute de profesorul **Alexandru Orăscu**.

În 1895 și-a luat licența în matematici și este numit profesor la seminarul Nifon . Pregătirea temeinică și marea sa putere de muncă îi confereau lui Țițeica dreptul la o carieră universitară. Atunci nu se putea obține o calificare pentru învățământul superior, decât într-un centru universitar din occident.

În 1896 a plecat în Franța, la Școala Normală Superioară din Paris (fondată în 1794 și având ca director științific pe Jules Tannery) și după un concurs , la care cu mare greutate era admis un străin, **Gheorghe Țițeica** , devine coleg și prieten cu **Henry Lebesque** și **Paul Montel**, viitori

matematicieni străluciți francezi. Ca student la Paris, Țițeica a avut profesori renumiți ca **Emile Picard, Henri Poincaré**, **Edouard Goursat, Jacques Hadamard, Emil Borel , Jules Tannery**, dar cel mai mult a fost îndrumat și format de marele matematician al vremii **Jean Gaston Darboux**.

Țițeica a rămas în Franța trei ani , luându-și din nou licența în matematici (iunie 1897), reușind primul dintre toți licențiații francezi și străini, iar la 30 iunie 1899, după doi ani de muncă intensă își elaborează și susține teza de doctorat ,,Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjuguées" („Asupra congruențelor ciclice și asupra sistemelor triplu conjugate"), în comisia prezidată de Gaston Darboux și având ca membri pe Edouard Goursat și Gabriel Köenigs.

Teza are la bază proprietățile ecuației lui Laplace și se referă la proprietățile unei clase de sisteme de coordonate curbilinii în spațiu, care generalizează sistemele de coordonate carteziene ortogonale.

Gheorghe Țițeica a fost al cincilea matematician român cu doctoratul la Sorbona, după Spiru Haret (1878), David Emmanuel (1879), Constantin Gogu (1882), Nicolae Coculescu (1895) și înaintea lui Anton Davidoglu (1900).

Bucuros că își impresionase profesorul și modelul său în studiul geometriei (Gaston Darboux), **Țițeica** se întoarce în țară chiar în ziua susținerii tezei de doctorat. Își începe bogata activitate de dascăl și savant în școala superioară românească, la Facultatea de Științe a Universității din București, unde în 1899 ține cursul de calcul diferențial și integral iar din 1903 este numit profesor titular la catedra de geometrie analitică și trigonometrie sferică, succedând fostului său profesor Constantin Gogu și unde a funcționat aproape 40 de ani, trecând prin toate gradele (suplinitor, agregat, definitiv). În perioada 1927-1939 a mai funcționat și la Școala Politehnică din București, ca profesor de analiză. A fost decan al Facultății de Științe din București (1919-1923).

Profesorul **Gheorghe Țițeica** era și un pedagog de mare faimă, cursurile sale atrăgeau numeroși tineri studioși. Expunerile lui Țițeica cuprindeau fraze precise și clare, erau însoțite de figuri îngrijite și conduceau asistența într-o lume a eleganței și perfecțiunii. Printre studenții lui Țițeica amintim pe **Dan Barbilian** (1895-1961; din 1926 până în 1932 fiind asistent la catedra lui Țițeica iar în 1929 susține doctoratul având în comisie pe Gheorghe Țițeica , Dimitrie Pompeiu și David Emmanuel), Traian Lalescu, Gheorghe Vrânceanu, Victor Vâlcovici, Grigore Moisil, Gabriel Sudan, Alexandru Froda, Nicolae Mihăileanu care au ajuns și ei mari matematicieni ai țării.

Opera științifică a lui Țițeica cuprinde 96 de memorii științifice, majoritatea din domeniul geometriei diferențiale proiective și afine, unde Țițeica este considerat un precursor de către matematicienii străini. El descoperă în geometria proiectivă suprafețele (1906), curbele (1911) și rețelele (1911) care astăzi poartă numele său. A publicat la Paris volumele ,,Géométrie différentielle projective des réseaux" (în 1923) și ,,Introduction à la Géometrie différentielle projective des courbes" (în 1931) lucrări care l-au consacrat ca geometru de valoare mondială. În anul 1926, Țițeica a ținut la Sorbona mai multe conferințe dedicate curbelor dintr-un spațiu proiectiv cu n dimensiuni și care au fost cuprinse și publicate în colecția ,,Mémorial des Scienses Mathématques".

În anul 1913, profesorul **Gheorghe Țițeica** este ales membru titular al Academiei Române (pe locul vacant al lui Spiru Haret) unde, în 1928 devine vicepreședinte iar apoi secretar general în 1929.

Dar, **Țițeica** a fost ales membru și al mai multor academii străine: în 1930 membru corespondent al Academiei de Științe din Maryland (S.U.A), în 1934 membru al Societății de Științe

din Liège (Belgia), în 1933 membru al Societas Scientiarum Varsviensis iar în 1934 a fost proclamat Doctor Honoris Causa al Universității din Varșovia. Țițeica a ținut cursuri de geometrie la Sorbona (1926,1930,1937 apreciate de matematicienii Paul Montel și Arnaud Denjoy), de asemenea la Bruxelles și la Roma.

La primul Congres al matematicienilor români desfășurat în 1929 la Turnu Severin, matematicienii Paul Montel și Arnaud Denjoy, au menționat că „Universitatea franceză se simte onorată că numără printre profesorii săi pe savanții români Țițeica și Pompeiu”.

Reputația internațională a lui **Gheorghe Țițeica** a fost recunoscută și prin alegerea ca președinte al secției de geometrie la congresele internaționale de matematică desfășurate la Toronto (Canada în 1924), Zürich (Elveția în 1932) și Oslo (Norvegia în 1936).

Țițeica a fost și un mare popularizator al matematicilor elementare prin intrarea (la 1.11.1895) în redacția revistei Gazeta Matematică (apărută la 15 septembrie 1895 , cu apariție neântreruptă până în prezent și înființată de un grup de 10 ingineri de la Școala de Poduri și Șosele din București, dintre care se remarcau **Ion Ionescu** , **Vasile Cristescu** și **Andrei Ioachimescu**). Alături de aceștia, profesorul **Țițeica** devine redactor și raportorul principal, redactând dările de seamă la concursurile elevilor .Profesorul inginer Ion Ionescu (unul dintre fondatorii Gazetei Matematice) spunea despre Țițeica; „a fost cel mai entuziast dintre noii redactori veniți la Gazeta Matematică”. La gazetă a publicat 34 articole, 18 note și 121 probleme originale.

Gheorghe Țițeica a fost „primul doctor, primul profesor universitar și primul academician al Gazetei Matematice“. Activitatea de 44 de ani a lui Țițeica la Gazeta Matematică și în cadrul Societății de Științe Matematice din România, i-a adus binemeritata recunoaștere de „stâlp” al Gazetei Matematice.

La concursul Gazetei Matematice din 1912, ca raportor al concursului, în prezentarea din G.M. 8/1912, **Țițeica** scria: „*În locul întâi se cuvine să numim pe Domnul Barbilian D.din clasa a VI-a la Liceul Lazăr , care a îndeplinit condițiunile pe care le cerem noi pentru această deosebită cinste. Cu o lucrare scrisă de Algebră foarte bună , cu o alta de Geometrie elementară excelentă în care a întrebuințat o metodă ingenioasă admirabilă , cu răspunsurile sale sigure și precise , din care se vedea o gândire bine condusă și cunoștinți întinse , cu aceste însușiri alese Dl.Barbilian și-a cucerit dintr-o dată locul de frunte. Să-i fie de bună prevestire și pentru concursurile viitoare* ”

La sfârșitul raportului la concursul gazetei din 1912 **Gheorghe Țițeica** scria: „*Închei această dare de seamă cu dorința ca din aceste concursuri corespondenții noștri să atragă două foloase, întâi dragostea nestrămutată pentru matematică și al doilea , stăruința de a căpăta cât mai multă siguranță în calcul și limpezime în gândire* ”

La unul din concursurile Gazetei Matematice , cel din 1908 , **Țițeica** propune o teoremă remarcabilă prin frumusețea ei :„*Trei cercuri egale* $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$ *și* $\mathcal{C}(O_3, R)$ *care au un punct comun , luându-le două câte două se mai intersectează în punctele A,B,C. Atunci cercul circumscris triunghiului ABC este egal cu cercurile date*”. Această proprietate găsită întâmplător de Țițeica (pe când desena cercuri cu o monedă de 5 lei), la început a rămas cunoscută sub numele de „problema piesei de 5 lei” , iar apoi de „teorema piesei de 5 lei”. În timp , au fost găsite mai multe demonstrații , generalizări și legături cu alte teoreme și proprietăți de geometrie plană (de exemplu teorema de„închidere” a matematicianului francez Jean Victor Poncelet: „*Dacă există un poligon convex sau stelat , înscris într-o conică* Γ *și circumscris unei alte conice* γ *, atunci există o infinitate de astfel de poligoane*”).

Pentru elevi a publicat culegeri de probleme de geometrie care au rămas de referință și s-au reeditat decenii la rând.

În 1901 s-a constituit „Biblioteca Gazetei Matematice” care publica cărți de matematică și culegeri în sprijinul elevilor care doreau să adâncească studiul matematicii.
Prima carte de matematică tipărită în această bibliotecă , a fost „Culegere de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie ” având ca autori pe cei patru „stâlpi “ai Gazetei Matematice (Ion Ionescu, Gheorghe Țițeica, Andrei Ioachimescu și Vasile Cristescu), care apare chiar în 1901 și care conține peste 3000 exerciții și probleme cu răspunsuri și indicații.

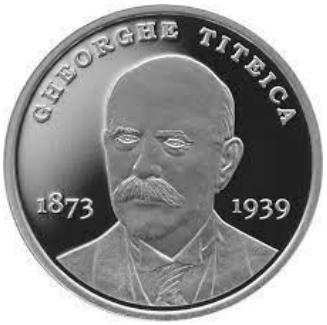
Mai târziu s-a considerat că este mai bine ca cele patru părți să se separe și astfel au apărut în biblioteca gazetei patru culegeri, revizuite și cu un conținut mai bogat. Astfel a doua ediție a culegerii de geometrie a lui Țițeica apare în 1929, ajungând în 1981 la a VI-a ediție (Editura Tehnică) cu circa 1400 de probleme, fiind și acum o lucrare de referință în domeniu.

Ca un omagiu adus marelui savant, din 1979 s-a înființat pentru elevii din gimnazii și licee **Concursul interjudețean de matematică „Gheorghe Țițeica**”, unde participă anual tot mai mulți elevi.

Pentru răspândirea științelor, **Țițeica** înființează în anul 1905 , împreună cu profesorul G.G.Longinescu revista „Natura”, cu apariție până în 1949. În mai multe rânduri, Țițeica a fost președinte al „Societății Matematice din România”, președinte al „Societății române de științe” și mult timp membru în Consiliul superior al Instrucțiunii Publice, unde și-a spus cuvântul în problemele de organizare a învățământului.

Gheorghe Țițeica a fost căsătorit cu Florence Țițeica (născută Thierrin) și a avut trei copii, Radu, Gabriela și Șerban, toți urmând cariere universitare în țară.

Definind matematica , **Gheorghe Țițeica** spunea: „ *Matematica este un mod de exprimare a legilor naturale, este cel mai potrivit chip de a înfățișa o lege generală sau curgerea unui fenomen , este cea mai perfectă limbă în care se poate povesti un fenomen natural*”.



În țară foarte multe școli și licee poartă numele marelui matematician iar Banca Națională a României a lansat anul acesta o monedă de argint care să marcheze cei 150 de ani de la nașterea sa.

La 5 februarie 1939, în vârstă de 65 de ani și în plină activitat, s-a stins cel mai mare geometru al nostru, profesorul și omul **Gheorghe Țițeica**.

Tot anul acesta aniversăm 150 de ani de la nașterea lui **Dimitrie Pompeiu** (22.09.1873-07.10.1954), unul dintre primii matematicieni români de importanță internațională, care au dat un puternic impuls activității creatoare în România.

S-a născut la 22 septembrie 1873 la casa bunicilor din localitatea Dimăcheni, de lângă Dorohoi, unde tatăl a funcționat un timp ca învățător suplinitor iar mai apoi învățător în comuna Broscăuți, tot lângă Dorohoi. Tatăl său era originar de peste Prut și fusese coleg de clasă la Botoșani cu Mihai Eminescu.

După terminarea școlii primare la Dimăcheni, în 1885, **Pompeiu** a intrat la gimnaziul din Dorohoi. Aici, pe lângă preocupări muzicale (cânta la vioară) a început să colaboreze cu rezolvări de probleme de aritmetică la revista „Recreații Științifice” din Iași. În 1889 a absolvit clasa a IV- a cu premiul I.

În perioada 1889-1893 urmează Școala Normală de Institutori din București, unde intră printre primii. La 1 septembrie 1893, **Pompeiu** este repartizat ca institutor la Galați, dar la 1 octombrie 1893 se transferă la Școala primară nr.1 din Ploiești, unde funcționează până în iunie 1898.

În această perioadă își aprofundează studiile matematice și colaborează la scrierea unei geografii a județului Prahova și a unui studiu asupra indicilor de refracție. În anul 1896, la propunerea inginerului și profesorului Andrei Ioachimescu, este admis ca membru al societății „Amicii Științelor Matematice" condusă de Constantin Gogu. La Ploiești s-a căsătorit cu institutoarea Aristia Dragomirescu, cu care a avut cinci copii și care l-a stimulat și sprijinit în proiectele de plecare la Paris pentru a-și perfecționa studiile matematice. Soții Pompeiu au cerut și au obținut un concediu plătit de la catedră (1898-1900) și la 1 septembrie 1898 au plecat la Paris, unde Pompeiu a trebuit să treacă bacalaureatul francez, deoarece Școala Normală de Institutori din București nu se echivala cu acest bacalaureat. Cei trei copii micuți i-au lăsat la Ploiești , la o soră a soției.

În anul școlar 1898-1899, **Pompeiu** a urmat clasa de matematici speciale iar în vara anului 1899 a obținut la universitate acest bacalaureat cu mențiunea „très honorable" după care se înscrie la Sorbona. La această universitate, între 1899 și 1903 obține certificatele de calcul diferențial și integral cu Edouard Goursat, cel de mecanică rațională cu Paul Appel, analiză superioară(teoria funcțiilor) cu Emile Picard și cel de mecanică fizică experimentală cu Gabriel Köenigs. A fost profund impresionat de cursurile lui Henri Poincaré, Emile Picard, Gabriel Köenigs și Paul Appel care îl vor influența în activitatea didactică și științifică. În 1903, **Dimitrie Pompeiu** devine licențiat în matematici la Sorbona și se înscrie la doctorat. Cât a stat la Paris i-a cunoscut pe Traian Lalescu, Petre Sergescu, Florin Vasilescu și Șerban Gheorghiu.

În acești ani la Paris, s-au mai născut alte două fete ale soților Pompeiu. Pentru a-l ajuta , soția lui a revenit la Ploiești cu cele două fetițe și a profesat în continuare ca institutoare. Pentru pregătirea doctoratului, Pompeiu studia foarte mult, câte 12-14 ore pe zi.

La 31 martie 1905 își susține la Sorbona teza de doctorat „Sur la continuite des fonctions de variable complexes"(„ Asupra continuității funcțiilor de variabile complexe" , problemă studiată și de marele geometru german Bernard Riemann cu 60 de ani în urmă).

Dimitrie Pompeiu și-a susținut teza în fața unei comisii prezidată de **Henri Poincaré** și având ca membri pe Gabriel Köenigs și Edouard Goursat. În teză , Pompeiu demonstrează existența unor funcții analitice având mulțimea singulară de măsură pozitivă și fiind continue pe această mulțime.

Pompeiu este inițiatorul teoriei funcțiilor poligene care constituie o extindere naturală a funcțiilor analitice. În acest domeniu a introdus noțiunea de derivată areolară și a extins celebra formulă a lui Cauchy, prin formula cunoscută ca formula lui Cauchy-Pompeiu.

Unele rezultate din teza lui Pompeiu au fost extinse mai târziu de matematicienii români Simion Stoilov Grigore Moisil și Nicolae Victor Teodorescu. Descoperirea fundamentală a lui Pompeiu a condus și la cercetări ale unor matematematicieni străini renumiți precum Arnaud Denjoy, Paul Painlevé ,Pavel Uryson , Nikolai Luzin , Cazimir Kuratowski, Felix Hausdorff.

În lucrarea sa, **Pompeiu** a construit funcția numită acum „funcție Pompeiu", a introdus riguros o noțiune nouă, distanța dintre două mulțimi închise și a dat un rezultat fundamental nou , derivata areolară, privind ecuațiile cu derivate parțiale.

După obținerea titlului de doctor în matematici, **Pompeiu** s-a întors în țară și imediat în 1905 este numit conferențiar de calcul diferențial și integral la Universitatea din Iași. Aici, în 1907, devine profesor titular la catedra de mecanică până în 1912, când vine la Universitatea din București la catedra de mecanică rațională ocupată de Spiru Haret (se pensionase în 1910), până la 1 aprilie 1911 și suplinită de Traian Lalescu până la venirea lui Pompeiu.

La această catedră **Pompeiu** a predat până la 10 octombrie 1930 când trece la catedra de teoria funcțiilor în locul lui David Emmanuel care se pensionase. În locul lui Pompeiu, la mecanică rațională a trecut profesorul Victor Vâlcovici. În 1929, după decesul prematur al lui Traian Lalescu, la Școala Politehnică din București, pe catedra de geometrie analitică rămasă vacantă este numit titular Dimitrie Pompeiu. Astfel , profesorul Pompeiu a funcționat ca titular pe cele două catedre de la Universitatea și Politehnica din București până în 1941 când se pensionează.

În 1919**, Pompeiu** va sprijini organizarea Universității Române din Cluj, unde timp de 15 ani va ține lunar cel puțin o conferință, norma de bază fiind la București. La Cluj, a organizat seminarul de matematici al Universității,după exemplul celebrului seminar de la College de France, ajutat de Niculae Abramescu, Aurel Angelescu, Gheorghe Bratu și Petre Sergescu.

În 1926, **Pompeiu** a fost angajat , ca și Țițeica , pe bază de contract , profesor agregat la Sorbona , unde a predat câte o lună pe an(1926,1929,1931) lecții în special din lucrările sale. Aici a prezidat onorific comisia de doctorat la Sorbona pentru teza profesorului român Nicolae Teodorescu , comisie condusă de Henri Viellat.

În 1931, **Dimitrie Pompeiu** a ținut cursuri la Universitatea din Poitiers(Franța) și a organizat un colocviu franco-român.

În 1929, la Cluj a apărut revista de matematici superioare „Mathematica” de circulație internațională înființată de Pompeiu împreună cu Petre Sergescu și unde Pompeiu cât și Țițeica au fost codirectori. Pompeiu a fost un analist de reputație internațională, prelegerile sale universitare erau urmărite cu interes de studenții săi , dovedind și calități de dascăl riguros dar accesibil , preocupat nu numai de fondul expunerii ci și de forma de realizare a acesteia.Opera lui Pompeiu este răspândită în peste 129 de memorii apărute în periodice din Franța, Germania, Italia, Statele Unite , Japonia,Belgia , Olanda,etc.

Pe lângă activitatea de profesor universitar, **Pompeiu** a îndeplinit în anumite perioade și funcții administrative înalte. Astfel a fost inspector general în Ministerul Instrucțiunii Publice și președinte al Consiliului permanent din Ministerul Instrucțiunii Publice în anii 1917-1918. Pe timpul guvernării lui Nicolae Iorga, Pompeiu a fost președinte al Adunării deputaților. Din 1934 devine membru corespondent al Academiei Române iar din 1948 a fost membru titular.

În 1946, când s-a înființat Institutul de Matematică al Academiei Române, Pompeiu a fost numit director. **Dimitrie Pompeiu** s-a bucurat de mare prestigiu și peste hotarele țării , în 1934 pimind titlul de **doctor honoris causa al Universității din Varșovia** iar în 1937 a prezidat al doilea Congres interbalcanic al matematicienilor, ținut la București.

În 1946, **Pompeiu** a fost președinte al celui de-al treilea Congres al matematicienilor români desfășurat la București.

Pompeiu, profesor și mare pedagog în predarea matematicii , cu o înclinare spre problemele teoretice de filozofia matematicii, se oprea și asupra problemelor de matematici elementare(aritmetică și teoria numerelor, geometrie ,analiză). Astfel în 1937, apare „*teorema lui Pompeiu*”, cunoscută de elevi: „Distanțele de la un punct la cele trei vârfuri ale unui triunghi

echilateral sunt laturile unui triunghi”. Această teoremă a primit mai multe demonstrații, generalizări (în spațiu sau la poligoane cu n laturi) și a dat naștere la numeroase lucrări ale matematicienilor români și străini (D.Barbilian, Paul Montel , Harold Hilton, N.Obreschkoff).

Mai exempificăm și cu o *teoremă a lui Pompeiu* (nota ,,Sur le théorème des accroissements finis (premières notes), publicată în Ann.Sci.de l’Univ.de Jassy, 1906) cu ajutorul căreia se poate demonstra teorema lui Rolle, fără a utiliza proprietatea valorii intermediare a funcțiilor continue definite pe intervale ale axei reale:

Fie $a, b \in R, a < b, f: [a, b] \to R$ o funcție continuă pe $[a, b]$. Atunci există un $c \in [a, b]$ și două șiruri $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ astfel încât :

i) $a < a_n < b_n < b$, pentru orice $n \in N^*$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$

iii) $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pentru orice $n \in N$.

Pentru cinstirea memoriei lui **Dimitrie Pompeiu**, anual se desfășoară la Botoșani ,,**Concursul interjudețean de Matematică Dimitrie Pompeiu**” pentru elevii din preuniversitar, ajuns anul acesta la a XXI-a ediție datorită unor profesori dedicați printre care domnul inspector școlar de matematică **Sebastian Mihalache**, a domnului prof. **Ioan Ciobănașu-** președinte SSMR Botoșani, sau a domnului Artur Bălăucă iar la Botoșani și Dorohoi în zilele de 12-14 mai 2023, s-a desfășurat a XXV-a Conferință Anuală a Societății de Științe Matematice din România, dedicată împlinirii a 150 de ani de la nașterea marelui nostru matematician **Dimitrie Pompeiu**.

Matematicianul și savantul român Octav Onicescu (1892-1983),(originar tot de pe plaiuri botoșănene), student al lui Pompeiu, în cartea ,,Pe drumurile vieții(1981) , își omagiază maestrul cu mare admirație și prețuire: ,,***Un Brâncuși al matematicii, ale cărui creații au fost simple, plastice , globale și încărcate de semnificații în lumea formelor științei sale așa cum erau ale sculptorului în lumea realizărilor lui.***”

Marele nostru profesor și matematician s-a stins din viață la **7 octombrie 1954.**

Bibliografie

1. Adrian Stan și colab. -*O scurtă istorie a matematicii,* Editgraph Buzău.2015

2. Mircea Trifu, Florin Diac, Costel Chiteș-*Școala matematică românească de-a lungul timpului* ,Editura Oscar Print,București.2010

3 . Ion Purcaru ,Octavian Bâscă-*Pagini din istoria matematicii* : *oameni , idei și fapte de referință,* Editura Universitară, București. 2017

4. Florin Diac-*Monografia Societății de Științe Matematice din România,*Editura S.S.M.R.,1998

5. Nicolae Mihăileanu-*Istoria matematicii v*ol. I ,Editura Științifică și Enciclopedică Română București,1974 și vol.II,Editura Științifică și Enciclopedică Română , București. 1981

6 . Gazeta Matematică-*colecție.*

7. Wikipedia

„Înțeleptul e cel care se miră de orice."
Andre Gide
(1869 -1951)

2. Articole și note matematice

În legătură cu două probleme din RMT nr. 3-4/2023

de Titu Zvonaru, Comănești

Problema O.VII.535. **Dacă** $a,b,c>0$, **atunci**

$$2\sqrt{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2}+a+b+c.$$

***Neculai Stanciu**, Buzău*

Soluție*:* Inegalitatea este adevărată pentru orice numere reale a,b,c.

Avem: $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2$.

Aplicând inegalitatea $MA-MP$ obținem:

$$\sqrt{2[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]}=\sqrt{2[(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2]}\ge$$

$$\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2}+|a+b+c|\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2}+a+b+c,$$

Avem egalitate dacă și numai dacă

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$, adică $(a,b,c)=(k,0,0),(0,k,0),(0,0,k)$,

unde k este un număr real.

Problema O.VIII.537. **Dacă** $a,b,c>0$, **atunci** $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Neculai Stanciu, Buzău

Soluții:

1. Aplicând inegalitatea $MA-MG$ pentru patru numere obținem:

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{a}{c^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{b}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{c}{b^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{b^2}+\frac{a}{c^2}\right)\ge 2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$$

2. Eliminând numitorii, inegalitatea se scrie:

$$a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+a^3c^2+a^2c^3\ge 2a^2b^2c+2a^2bc^2+2ab^2c^2,$$

și este adevărată cu *Muirhead* ($(3,2,0)$ majorează $(2,2,1)$).

3. Avem: $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a+b}{c^2}-\frac{2}{c}+\frac{b+c}{a^2}-\frac{2}{a}+\frac{c+a}{b^2}-\frac{2}{b}=$

$$=\frac{a+b-2c}{c^2}+\frac{b+c-2a}{a^2}+\frac{c+a-2b}{b^2}=\frac{a-c+b-c}{c}+\frac{b-a+c-a}{a^2}+\frac{c-b+a-b}{b^2}=$$

$$=(a-b)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{b^2c^2}+\frac{(c+a)(c-a)^2}{c^2a^2}.$$

Asupra unor noi inegalități în triunghi

de prof. dr. Mihaly Bencze

Teoremă. Dacă ABC **este un triunghi, atunci** $\frac{r}{2R}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\cos^2\frac{A}{2}$ **și alte două inegalități similare.**

Demonstrație. Avem: $\sum\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\prod\sin\frac{A}{2}=1$; $\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Deci, $\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1$, iar dacă ținem cont de egalitatea $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$, atunci obținem că: $\frac{r}{2R}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le 1-\sin^2\frac{A}{2}=\cos^2\frac{A}{2}$ și analog se deduc alte două inegalități similare.

Pornind de la teorema de mai sus și folosind unele identități cunoscute:

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}=\frac{4R+r}{2R},\ \sum\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2},\ \sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=1+\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2,$$

$$\sum\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{8R(4R+r)}{p^2},$$ putem obține noi inegalități în triunghi.

Iată câteva dintre aceste inegalități:

1. $\sum\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\le\frac{2R-r}{2R}$; **2.** $\sum\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{p^2+(4R+r)^2}{16R^2}$;

3. $\prod\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\le\left(\frac{p}{4R}\right)^2$; **4.** $\sum\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2\le\frac{(4R+r)^2-p^2}{8R^2}$;

5. $\sum\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^3\le\frac{(4R+r)^2-3p^2(3R+r)}{32R^3}$;

6. $\sum\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2\left(\frac{r}{2R}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\le\frac{(p^2+(4R+r)^2)^2-16p^2R(4R+r)}{256R^4}$;

7. $\prod\left(\frac{r}{R}+2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2})\sin\frac{B}{2}\right)\le\frac{(4R+r)^3+p^2(2R+r)}{32R^3}$;

8. $\prod\left(\frac{r}{R}+2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2})\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{r}{R}+2(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2})\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{5(4R+r)^2+p^2}{16R^2}$;

9. $\sum\frac{\frac{r}{2R}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\le\frac{2\left((4R+r)^2-p^2\right)}{p^2}$;

10. $\sum\frac{\frac{r}{2R}+2(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2})\sin\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}\le\frac{(4R+r)^3+p^2(2R+r)}{2Rp^2}$.

Bibliografie

1. Octogon Mathematical Magazine, 1993 – 2023.
2. Sclipirea Minții, 2008 – 2023.

Inegalități de tip Ionescu – Weitzenböck și Hadwiger – Finsler într-un triunghi

prof. univ. dr. **Emil. C. Popa,** Sibiu

Abstract. În this paper, some inequalities of the **Ionescu – Weitzenböck** type an of the **Hadwiger – Finsler** type are obtained in a triangle.

1⁰. Inegalitatea **Ionescu – Weitzenböck** se referă la faptul că în orice triunghi ABC cu notațiile obișnuite avem $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot S$. (1)

Teorema 1. Notăm $\frac{R}{r}=\alpha \ge 2$ **(Euler) și avem inegalitatea** $a^2+b^2+c^2 \ge 2\sqrt{6\alpha}\cdot S$ (2)

Demonstrație: Plecăm de la $R=\frac{abc}{4S} \le \frac{(a+b+c)^3}{108S}$, apoi $\frac{S}{p}=r=\frac{R}{\alpha} \le \frac{(a+b+c)^3}{108\alpha S}$,

$(a+b+c)^4 \ge 216\alpha S^2$, și $(a+b+c)^2 \ge 6\sqrt{6\alpha}S$. (3).

Dar $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$ așa că $a^2+b^2+c^2 \ge 2\sqrt{6\alpha}\cdot S$.

Observație: Cum $\alpha \ge 2$ din inegalitatea obținută găsim relația (1):

Inegalitatea **Hadwiger – Finsler** este $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. (4)

Teorema 2. Avem inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \ge 2\sqrt{6\alpha}\cdot S+\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$**.** (5)

Demonstrație: Din (3) rezultă că $a^2+b^2+c^2 \ge 6\sqrt{6\alpha}\cdot S-2ab-2bc-2ca$,

$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 6\sqrt{6\alpha}\cdot S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \,|:3$ rezultând c.c.t.d.

Obs. Considerăm următoarele exemple:

a) În triunghiul ABC cu AB=BC=2, AC=1 găsim $S=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $r=\frac{\sqrt{15}}{10}, R=\frac{4}{\sqrt{15}}$ și $\alpha=\frac{8}{3}$. Prin calcul avem $a^2+b^2+c^2 \rangle 4\sqrt{3}\cdot S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \rangle\ 2\sqrt{6\alpha}\cdot S++\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$;

b) În triunghiul ABC cu AB=3, BC=4, AC=5 avem: $S=6,\ r=1, R=\frac{5}{2}$ și $\alpha=\frac{5}{2}$. După calcule găsim: $a^2+b^2+c^2 \rangle 2\sqrt{6\alpha}\cdot S+\frac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \rangle 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Teorema 3. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC și notăm cu x, y, z distanțele de la punctul P la laturile BC, CA respectiv AB. Avem inegalitatea:

P(n): $x\cdot a^n+y\cdot b^n+z\cdot c^n \ge \frac{2^n}{(x+y+z)^{n-1}}S^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$**.** (6)

Demonstrație: Pentru n = 1 avem: $x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c=2S$. Folosim acum inegalitatea C-B-S

$(x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c)^2=\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}a+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}b+\sqrt{z}\cdot\sqrt{z}c\right)^2 \le (x+y+z)\cdot\left(xa^2+yb^2+zc^2\right)$, de unde:

$x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2 \ge \frac{2^2}{x+y+z}S^2$.

Presupunem acum că P(n) este adevărată pentru un $n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$ și avem:

$\left(x\cdot a^n+y\cdot b^n+z\cdot c^n\right)^2=\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}a^n+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}b^n+\sqrt{z}\cdot\sqrt{z}c^n\right)^2 \le (x+y+z)\cdot\left(xa^{2n}+yb^{2n}+zc^{2n}\right)$.

de unde $x\cdot a^n+y\cdot b^n+z\cdot c^n\ge\frac{2^{2n}}{(x+y+z)^{2n-1}}S^{2n}$. Acum:

$$\left(x\cdot a^n+y\cdot b^n+z\cdot c^n\right)^2=\left(\sqrt{x}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x}\cdot a^{\frac{2n-1}{2}}+\sqrt{y}\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{y}\cdot b^{\frac{2n-1}{2}}+\sqrt{z}\cdot c^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{z}\cdot c^{\frac{2n-1}{2}}\right)^2\le\left(xa+yb+zc\right)\cdot\left(xa^{2n-1}+yb^{2n-1}+zc^{2n-1}\right)$$

de unde $x\cdot a^{2n}+y\cdot b^{2n}+z\cdot c^{2n}\ge\frac{2^{2n}}{(x+y+z)^{2n-1}}\cdot S^{2n}$.

Prin urmare inegalitatea (6) fiind adevărată pentru n=2 ea este adevărată pentru n=3 și n=4. Fiind adevărată pentru n=3 ea este adevărată pentru n=5 și n=6 și fiind adevărată pentru n=4 ea este adevărată pentru n=7 și n=8, etc.

Deci inegalitatea (6) este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Obs. Dacă $P\equiv I$ (centrul cercului înscris) atunci $x=y=z=r$. Inegalitatea (6) devine:

$a^n+b^n+c^n\ge\frac{2^n}{3^{n-1}\cdot r^n}S^n$. Din inegalitatea lu Mitrinovici, $p\ge3\sqrt{3}r$ obținem $r^2\le\frac{S}{3\sqrt{3}}$ și deci

$$a^n+b^n+c^n\ge2^n\cdot3^{\frac{4-n}{4}}\cdot S^{\frac{n}{2}}. \qquad (7)$$

iar pentru n = 2 regăsin inegalitatea **Ionescu – Weitzenböck.**

Considerăm acum mulțimea $M=\{m,n,p\}$, $m,n,p\in(0;\infty)$ și permutările: $\sigma_1=\begin{pmatrix}m&n&p\\m&n&p\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}m&n&p\\n&p&m\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}m&n&p\\p&m&n\end{pmatrix}$.

Teorema 4. Avem inegalitatea $\sum_{i=1}^{3}\left(a^{\sigma_i(m)}+b^{\sigma_i(n)}+c^{\sigma_i(p)}\right)\ge3^{\frac{24-m-n-p}{12}}\cdot2^{\frac{m+n+p}{3}}\cdot S^{\frac{m+n+p}{6}}$. (8)

Demonstrație:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(a^{\sigma_i(m)}+b^{\sigma_i(n)}+c^{\sigma_i(p)}\right)=a^{\sigma_1(m)}+a^{\sigma_2(m)}+a^{\sigma_3(m)}+b^{\sigma_1(n)}+b^{\sigma_2(n)}+b^{\sigma_3(n)}+c^{\sigma_1(p)}+c^{\sigma_2(p)}+c^{\sigma_3(p)}=$$

$$=a^m+a^n+a^p+b^m+b^n+b^p+c^m+c^n+c^p\ge3\left(\sqrt[3]{a^{m+n+p}}+\sqrt[3]{b^{m+n+p}}+\sqrt[3]{c^{m+n+p}}\right)\ge$$

$3\left(a^{\frac{m+n+p}{3}}+b^{\frac{m+n+p}{3}}+c^{\frac{m+n+p}{3}}\right)\ge9\cdot\sqrt[3]{(abc)^{\frac{m+n+p}{3}}}=9\left(4RS\right)^{\frac{m+n+p}{9}}=9\cdot4^{\frac{m+n+p}{9}}\cdot(R^2)^{\frac{m+n+p}{18}}\cdot S^{\frac{m+n+p}{9}}$. Din inegalitatea cunoscută $R^2\ge\frac{4S}{3\sqrt{3}}\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a^{\sigma_i(m)}+b^{\sigma_i(n)}+c^{\sigma_i(p)}\right)\ge9\cdot4^{\frac{m+n+p}{9}}\cdot\left(\frac{4S}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{m+n+p}{18}}\cdot S^{\frac{m+n+p}{9}}=$$

$=3^{\frac{24-m-n-p}{12}}\cdot2^{\frac{m+n+p}{3}}\cdot S^{\frac{m+n+p}{6}}$, c. c. t. d.

Observație: Pentru $m=n=p$ obținem $a^m+b^m+c^m\ge3^{\frac{4-m}{4}}\cdot2^m\cdot S^{\frac{m}{2}}$ și pentru m = 2 regăsim inegalitatea (1).

Bibliografie:

[1]. Bătinețu-Giurgiu D.M, Stanciu N, Inegalități de tip Ionescu- Weizenböck,Gazeta matematică B, 118(1), 2013.

[2]. Popa E. C, Diaconu R, Duță M, Oprea A, Culegere de probleme de geometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie, Editura Techno Media, Sibiu, 2020, p. 384-397;

[3]. Rusu C, Asupra inegalităților de tip Ionescu- Weizenböck, Sclipirea Minții, mai 2018.

Prof. univ. dr. **Emil C. Popa**, Universitatea Lucian Blaga, Sibiu

Asupra problemei L. 999 din revista Sclipirea Minții nr. 31

de prof. Marin Chirciu, Pitești[1]

L:999. În triunghiul ΔABC are loc inegalitatea $\sum \frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} \geq 3$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(a^2-(b-c)^2\right)} = \frac{(2p)^2}{2\sum bc - \sum a^2} = \frac{4p^2}{2\left(p^2+r^2+4Rr\right)-2\left(p^2-r^2-4Rr\right)} =$$

$= \frac{4p^2}{16Rr+4r^2} = \frac{p^2}{4Rr+r^2} \overset{(1)}{\geq} 3 = RHS$, unde $\frac{p^2}{4Rr+r^2} \overset{(1)}{\geq} 3 \Leftrightarrow p^2 \geq 12Rr+3r^2$, care rezultă din inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că: $16Rr-5r^2 \geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, vezi inegalitatea lui Euler.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Remarca.

Problema se poate dezvolta.
In triunghiul ΔABC avem

$$\sum \frac{a^2}{\lambda a^2-(b-c)^2} \geq \frac{3}{\lambda}, \text{unde } 1 \leq \lambda \leq 3.$$

Marin Chirciu

Soluție.

Pentru $\lambda \geq 1$ avem $\lambda a^2-(b-c)^2 \geq a^2-(b-c)^2 > 0$.

$$LHS = \sum \frac{a^2}{\lambda a^2-(b-c)^2} \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum\left(\lambda a^2-(b-c)^2\right)} = \frac{(2p)^2}{2\sum bc + (\lambda-2)\sum a^2} =$$

$$\frac{4p^2}{2\left(p^2+r^2+4Rr\right)+(\lambda-2)\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)} = \frac{4p^2}{(2\lambda-2)p^2+(24-8\lambda)Rr+(6-2\lambda)r^2} =$$

$$= \frac{2p^2}{(\lambda-1)p^2+(12-4\lambda)Rr+(3-\lambda)r^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{\lambda},$$

unde $\frac{2p^2}{(\lambda-1)p^2+(12-4\lambda)Rr+(3-\lambda)r^2} \overset{(1)}{\geq} \frac{3}{\lambda} \Leftrightarrow (3-\lambda)p^2 \geq 12(3-\lambda)Rr+3(3-\lambda)r^2$,

care rezultă din ipoteza $(3-\lambda) \geq 0$ și inegalitatea lui Gerretsen $p^2 \geq 16Rr-5r^2$.

Rămâne să arătăm că: $16Rr-5r^2 \geq 12Rr+3r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$, vezi inegalitatea lui Euler.
Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Nota.

Pentru $\lambda = 1$ se obține Problema L:999 din Sclipirea Minții Nr.31/2023.

In ΔABC avem $\sum \frac{a^2}{a^2-(b-c)^2} \geq 3$.

1. Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Pitești

Alte rafinări ale unei inegalități clasice

de Neculai Stanciu, Buzău

Dacă $a,b,c>0$, atunci este binecunoscută inegalitatea $\sum a^2 \ge \sum ab$.

În [1] este prezentată o rafinarea a inegalității de mai sus. Iată alte trei rafinări a inegalității clasice de mai sus.

I. Dacă $a,b,c>0$, atunci $16(\sum a^2 - \sum ab) \ge 3\left(\sum |a-b|\right)^2$

Soluție. Fără pierderea generalității putem presupune că $a \le b \le c$. Fie $x,y \ge 0$ astfel încât $b=a+x, c=a+x+y$.

$\sum a^2 - \sum ab = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right) = x^2+xy+y^2$, atunci inegalitatea din enunț este echivalentă cu $16(x^2+xy+y^2) \ge 3(x+y+x+y)^2 \Leftrightarrow 4(x-y)^2 \ge 0$, evident adevărată.

Deci, am obținut rafinarea: $\sum a^2 \ge \sum ab + \frac{3}{16}\sum |a-b|^2$

II. Dacă $a,b,c>0$, atunci $\sqrt{3}\sum a^2 \ge \sqrt{3}\sum ab + \sum |a-b||a-c|$.

Soluție. Analog ca mai sus, fie $a \le b \le c$ și $x,y \ge 0$ astfel încât $b=a+x,\ c=a+x+y$.

Inegalitatea din enunț devine: $x^2+xy+y^2 \ge \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x(x+y)+xy+y(x+y)\right)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)x^2+(\sqrt{3}-3)xy+(\sqrt{3}-1)y^2 \ge 0$, care este adevărată deoarece discriminantul ecuației $(\sqrt{3}-1)t^2+(\sqrt{3}-3)t+\sqrt{3}-1 \ge 0$ este $\Delta = (\sqrt{3}-3)^2 - 4(\sqrt{3}-1)^2 = 2\sqrt{3}-4 < 0$.

Deci, am obținut rafinarea: $\sum a^2 \ge \sum ab + \frac{\sqrt{3}}{3}\sum |a-b||a-c|$

III. Dacă $a,b,c>0$, atunci $8\sum a^2 \ge 8\sum ab + \sum\left(|a-c|+|b-c|\right)^2$.

Soluție. Analog ca mai sus, fie $a \le b \le c$ și $b=a+x$, $c=a+x+y$ cu $x,y \ge 0$. Atunci, inegalitatea devine $x^2+xy+y^2 \ge \frac{1}{8}\left((x+2y)^2+(2x+y)^2+(x+y)^2\right)$

$\Leftrightarrow 8x^2+8xy+8y^2 \ge 6x^2+10xy+6y^2$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \ge 0$, adevărată.

Deci, am obținut rafinarea: $\sum a^2 \ge \sum ab + \frac{1}{8}\sum\left(|a-c|+|b-c|\right)^2$

Bibliografie

1. Dorin Mărghidanu, *O demonstrație fără cuvinte pentru rafinarea unei inegalități celebre*, Sclipirea Minții, Nr. 31, 2023, 25.

Asupra unei inegalități duble a lui Nicolae Ciorănescu

de Marius Drăgan și Neculai Stanciu

În Gazeta Matematică (G.M.), Vol. XLIII (1937-1938) , 1937, nr. 12, pag. 671, *Nicolae Ciorănescu* a propus

Problema 4993. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci

$$\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2},$$

unde p este semiperimetrul triunghiului.

Problema 4993 nu a fost rezolvată în G.M. dar, a mai fost repetată în G.M. nr.8/1956 (problema 2315) și în G.M. nr.8/1965 (problema 7112). Pentru problema 2315 este publicată soluția autorului. Iată aici o nouă soluție:

Pentru inegalitatea din stânga:

$$\sum \frac{p+a}{b+c} = p\sum \frac{1}{b+c} + \sum \frac{a}{b+c} \underset{Nesbitt}{\overset{Bergstrom}{\ge}} p \cdot \frac{9}{b+c+c+a+a+b} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Pentru inegalitatea din dreapta:

$$2\sum \frac{p+a}{b+c} = \sum \frac{3a+b+c}{b+c} = 3 + 3\sum \frac{a}{b+c} < 3 + 3 \cdot 2 = 9,$$

unde am folosit binecunoscuta inegalitate $\sum \frac{a}{b+c} < 2$.

Inegalitatea *Ciorănescu* a fost generalizată în [1].

- În orice triunghi ABC avem egalitatea: $\frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3p^2 - r^2}{p^2 + r^2 + 2Rr}$.

Demonstrație. Deoarece,

$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 2p(p^2 + r^2 + 4Rr) - 4pRr =$
$= 2p(p^2 + r^2 + 2Rr)$ și $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right) + 3abc$, avem

$$\frac{p+a}{b+c} + \frac{p+b}{c+a} + \frac{p+c}{a+b} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a+b+c}{b+c} + \frac{3b+c+a}{c+a} + \frac{3c+a+b}{a+b}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 + (a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3(3p^2 - r^2)}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

- În orice triunghi ABC sunt adevărate inegalitățile:

$$\frac{15}{4} \le \frac{36Rr - 12r^2}{9Rr - 2r^2} \le \sum_{cyc} \frac{p+a}{b+c} \le \frac{9R^2 + 9Rr + 6r^2}{2R^2 + 3Rr + 2r^2} < \frac{9}{2}.$$

Demonstrație. $\frac{15}{4} \le \frac{36Rr - 12r^2}{9Rr - 2r^2} \Leftrightarrow R \ge 2r$, inegalitatea lui *Euler*.

Folosind inegalitățile lui *Gerretsen* $16Rr - 5r^2 \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, avem

$$\frac{36Rr - 12r^2}{9Rr - 2r^2} \ge \frac{15}{4} \Leftrightarrow R \ge 2r$$

$$\frac{3(3p^2 - r^2)}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)} \ge \frac{36Rr - 12r^2}{9Rr - 2r^2} \Leftrightarrow (p^2 - 16Rr + 5r^2)(2r^2 + 3Rr) \ge 0$$

$$\frac{3(3p^2 - r^2)}{2(p^2 + r^2 + 2Rr)} \le \frac{9R^2 + 9Rr + 6r^2}{2R^2 + 3Rr + 2r^2} \Leftrightarrow (p^2 - 4R^2 - 4Rr - 3r^2)(2r^2 + 3Rr) \le 0$$

$$\frac{9R^2+9Rr+6r^2}{2R^2+3Rr+2r^2}<\frac{9}{2}\Leftrightarrow 3Rr+2r^2>0.$$

- Vom găsi cea mai bună constantă k ([2]) astfel încât:

$$\frac{p+a}{b+c}+\frac{p+b}{c+a}+\frac{p+c}{a+b}\le\frac{135R+30kr}{30R+(8k+12)r},$$

este adevărată în orice triunghi ABC.

Inegalitatea se scrie $\frac{3}{2}\cdot\frac{3p^2-r^2}{p^2+r^2+2Rr}\le\frac{45R+10kr}{15R+(4k+6)r}$.

Deoarece funcția $f:(0,\infty)\to R$, $f(p)=\frac{3p^2-r^2}{p^2+r^2+2Rr}$, $f'(p)=\frac{4rp(3R+2r)}{(p^2+r^2+2Rr)^2}\ge 0$,

este crescătoare conform inegalității lui *Blundon*'s avem

$$f(p)\le f(p_2)\le\frac{45R+10kr}{15R+(4k+6)r},\text{ unde } p_2^2=2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)^3}.$$

Notăm $x=\frac{R}{r}$, și obținem succesiv

$$f(p_2(x))\le\frac{45x+10k}{15x+4k+6}\Leftrightarrow\frac{6x^2+30x-3+6\sqrt{x(x-2)^3}-1}{2x^2+10x-1+2\sqrt{x(x-2)^3}+1+2x}\le\frac{45x+10k}{15x+4k+6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k\le\frac{3}{2}\cdot\frac{9x-2-6\sqrt{x(x-2)}}{x+2+\sqrt{x(x-2)}}=g(x),\ \forall x\ge 2.$$

Deci, cea mai mare valoare a parametrului k este $k_0=\min\limits_{x\ge 2}g(x)=\frac{9}{4}$, și obținem:

$$\sum_{cyc}\frac{p+a}{b+c}\le\frac{9}{4}\cdot\frac{2R+r}{R+r}.$$

- În orice triunghi ascuțitunghic ABC este adevărată inegalitatea:

$$\frac{p+a}{b+c}+\frac{p+b}{c+a}+\frac{p+c}{a+b}\ge\frac{9R^2+36Rr+12r^2}{2R^2+10Rr+4r^2}.$$

Demonstrație. $\frac{3(3p^2-r^2)}{2(p^2+r^2+2Rr)}\ge\frac{9R^2+36Rr+12r^2}{2R^2+10Rr+4r^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(p^2-2R^2-8Rr-3r^2)(2r^2+3Rr)\ge 0$, adevărat conform inegalității lui *Walker* pentru triunghiuri ascuțitunghice: $p^2\ge 2R^2+8Rr+3r^2$.

- *Notă:* Rezultatele de mai sus au fost prezentate la secțiunea problemistică la a XXIV-a Conferință anuală a SSMR, București, 28 octombrie 2022, și de asemenea au fost publicate în [3], dar, aici sunt obținute într-un mod ''elementar'' - pentru care îi mulțumim în mod special dlui *Titu Zvonaru*.

Bibliografie

1. **D. M. Bătinețu-Giurgiu, M. Bătinețu-Giurgiu, D. Sitaru, N. Stanciu**, *About Nicolae Ciorănescu's double inequality*, Octogon Mathematical Magazine, No. 2, October 2019, pp. 832-840.
2. **M. Drăgan, N. Stanciu**, *Cea mai bună constantă pentru unele inegalități geometrice*, Gazeta Matematică-B, nr. 12/2018, pp. 571-577.
3. **M. Drăgan, N. Stanciu**, *Asupra unei probleme din Gazeta Matematică*, Gazeta Matematică Didactica (GMD), Anul XII, Nr. 2, 2022, 51-54.

Asupara unei inegalități a lui Adil Abdullayev

de Gheorghe Ghiță, Buzău

Articolul prezintă câteva remarci asupra **inegalității lui Adil Abdullayev**.

În triunghiul $\Delta\ ABC$ este adevărată inegalitatea:

$$\left(r_a+r_b+r_c\right)\cdot\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\geq\frac{9(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}. \qquad \textbf{(*)}$$

Adil Abdullayev –Azerbaijan

1) În $\Delta\ ABC$ are loc inegalitatea: $\left(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right)\cdot\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)\geq\frac{9(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}$

Soluția 1. Utilizând egalitățile cunoscute în triunghi:

$\sum r_ar_b=p^2,\ \sum\frac{1}{r_ar_b}=\frac{4R+r}{p^2r},\ \prod(a+b)=2p(p^2+r^2+2Rr),\ abc=4pRr$, inegalitatea se rescrie:

$\frac{4R+r}{p^2r}\geq\frac{9(p^2+r^2+2Rr)}{16Rr}\Leftrightarrow 9p^2\leq 64R^2-2Rr-9r^2$ adevărată, pentru că

$9p^2\overset{Gerretsen}{\leq}36R^2+36Rr+27r^2$ și $36R^2+36Rr+27r^2\leq 64R^2-2Rr-9r^2\Leftrightarrow$

$(R-2r)(14R+9r)\overset{Euler}{\geq}0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Soluția 2**.** Aplicând egalitățile cunoscute în triunghi:

$\sum r_ar_b=p^2,\ \sum\frac{1}{r_ar_b}=\frac{4R+r}{p^2r},\ \sum r_a=4R+r,\ \sum\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r}\Rightarrow\ \sum r_ar_b\cdot\sum\frac{1}{r_ar_b}=\sum r_a\cdot\sum\frac{1}{r_a}\Rightarrow$ **(*).**

2) În $\Delta\ ABC$ are loc inegalitatea: $\frac{9(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}\geq\left(h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\right)\cdot\left(\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\right)$

*Soluție***.** Aplicând egalitățile cunoscute în triunghi :

$\sum h_ah_b=\frac{2p^2r}{R},\ \sum\frac{1}{h_ah_b}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4p^2r^2},\ \prod(a+b)=2(p^2+r^2+2Rr),\ abc=4pRr$, inegalitatea se rescrie $\frac{9(p^2+r^2+2Rr)}{16Rr}\geq\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr}\Leftrightarrow p^2\geq 14Rr-r^2$, adevărată, pentru că $p^2\overset{Gerretsen}{\geq}16Rr-5r^2$,

$16Rr-5r^2\geq 14Rr-r^2\Leftrightarrow\ R\overset{Euler}{\geq}2r$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

3) În $\Delta\ ABC$ are loc inegalitatea: $\frac{9R}{2r}\geq\left(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right)\cdot\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)$.

Soluție. Aplicând 1), 2) și egalitățile cunoscute în triunghi, inegalitatea se rescrie

$\frac{9R}{2r}\geq\frac{4R+r}{r}\Leftrightarrow R\overset{Euler}{\geq}2r$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

4) În $\Delta\ ABC$ au loc inegalitățile: $\frac{9R}{2r}\geq\left(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right)\cdot\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)\geq\frac{9(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}$

Soluție: *Se* aplică 1), 2), 3) și inegalitatea mediilor.

$$\frac{9R}{2r}\geq\left(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a\right)\cdot\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)\geq\frac{9(a+b)(a+c)(b+c)}{8abc}\geq\left(h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\right)\cdot\left(\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\right)\geq 9$$

Bibliografie

1. **Romanian Mathematical Magazine – 2018.**
2. **Sclipirea Minții - 2019-2022.**

Despre numerele lui Anderson

de Ion Pătrașcu[1], Ion Cotoi[2]

Abstract : In this paper we try to show how we can find even and odd Anderson numbers.Then we make some remarks and a conjecture about these numbers.
Keywords: Anderson numbers, perfect squares, last digit, even numbers, odd numbers.

În Pascal Contest (grade 9), din 28 febr. 2017, Canada, apare problema nr.23, în care este formulată o cerintă în legătură cu numerele Anderson pare până la 10000.

În continuare, ne propunem să determinăm numerele lui Anderson pare si impare pâna la un miliard, să facem câteva observatii si să formulăm o *conjectură* în legătură cu aceste numere.

Definitie . Un număr natural **k** se numeste număr Anderson daca numărul k^2 se termină cu numărul **k.**

Exemplu: 25 este un număr Anderson pentru că $25^2 = 6\mathbf{25}$.

1.Începem cu determinarea **numerelor Anderson pare**. Clar, există două numere Anderson pare si acestea sunt 0 si 6. Intr-adevăr : $0^2 = 0$ si $6^2 = 3\mathbf{6}$.

Determinăm al treilea număr Anderson par. Acesta nu poate fi terminat in zero deoarece orice număr terminat in zero si ridicat la pătrat se termină in cel putin două cifre de zero. Prin urmare nu există numere Anderson de două cifre terminate in zero. Mai mult, nu există numere Anderson diferite de zero, terminate în zero. Cautam numere Anderson de două cifre, terminate în 6. Este necesar ca

$\underline{a6}^2 = \underline{xa6}$ (1) sau $\underline{a6}^2 = \underline{xya6}$ (2)

Din (1) rezultă: $(10a + 6)^2 = 100x + 10a + 6 \Leftrightarrow 100a^2 + 120a + 36 = 100x + 10a + 6 \Leftrightarrow$
$100a^2 + 110a + 30 = 100x$. Împartind prin 10 rezulta ca $10a^2 + 11a + 3 = 10x$.
Pentru a fi posibilă aceasta egalitate este necesar ca $U(a+ 3) = 0$.

Am notat cu U(n) ultima cifră a lui n, deci este necesar ca cifra a sa fie 7 .
Găsim astfel ca al treilea număr Anderson par este 76.
Intr-adevăr : $76^2 = 57\mathbf{76}$.
Egalitatea (2) conduce tot la a = 7.
Cautăm al patrulea număr Anderson par. Fie acesta $\underline{a76}$.

Vom avea $\underline{a76}^2 = \underline{xya76}$ (3) sau $\underline{a76}^2 = \underline{xyza76}$ (4)

Din (3) obtinem că: $(100a + 76)^2 = 1000\,xy + 100\,a + 76 \Leftrightarrow 100\,a^2 + 151\,a + 57 = xy0$

Această egalitate este posibilă numai dacă $U(a+ 7) = 0$ deci numai dacă a = 3.
Egalitatea (4) conduce de asemenea la a= 3 prin urmare al patrulea număr Anderson par este 376.
Intr-adevăr $376^2 = 141\mathbf{376}$. Procedând analog găsim ca al cincelea număr Anderson par este 9376
Intr-adevăr $9376^2 = 8790\mathbf{9376}$

Propozitia 1. Nu exista numere Anderson pare de cinci cifre.

Demonstratie.

Presupunem că exista **a** cifra nenulă astfel incât $\underline{a9376}^2 = \underline{xyztua9376}$ $(5)^2$

Obtinem ca $10^8 a^2 + 187520000\,a + 87909376 = 10^5 \cdot \underline{xyztu} + 10^4 a + 9376$

$\Leftrightarrow 10^4 a^2 + 18751\,a + 8790 = \underline{xyztuo}$. Această egalitate este posibilă numai dacă a= 0, ceea ce este absurd.

Căutând numere Anderson de 6 cifre de forma $\underline{a09376}$ găsim ca există un singur număr de această forma si anume 109376. Într-adevar $109376^2 = 11963\mathbf{109376}$.

Urmând acelasi procedeu gāsim cā numārul Anderson par de 7 este 7109376, iar de 8 cifre este 87109376 .
Într- adevār: 7109376^2=5054322**7108376**; 87109376^2 = 7588043**387109376**.

De asemenea, procedând in acelasi mod, gāsim ca numārul Anderson par de 9 cifre este 787109376.
Într-adevār 787109376^2 = 619542169**787109376**.

2.Trecem acum la determinarea **numerelor Anderson impare**.
Clar, singurele nunere impare Anderson de o cifrā sunt 1 si 5.Am vāzut deja cā 25 este număr Anderson.
Propozitia 2. Nu există numere Anderson de două cifre cu ultima cifrā 1.
Demonstratie.
Presupunem prin absurd cā exista numere Anderson de forma $\underline{a1}$, evident **a** cifra nenulā.
Atunci $\underline{a1}^2 = \underline{xa1} \Leftrightarrow 100a^2 + 20a + 1 = 100x + 10a + 1 \Leftrightarrow 10a^2 + a = 10x$. Clar această egalitate este posibilā dacā si numai dacā a = 0, ceea ce este în contradictie cu ipoteza facută.
În consecintā, singurul număr Anderson impar de două cifre este 25 si nu există numere Anderson terminate cu cifra 1.
Cautām numerele Anderson impare de trei cifre . Egalitatea $\underline{a25}^2 = \underline{xyza25}$ conduce in urma unor calcule la a= 6. Prin urmare singurul număr Anderson de 3 cifre este 625.
Intr-adevār 625^2 = 390**625**
Propozitia 3. **Nu există numere Anderson impare de patru cifre.**
Demonstratie.
Presupunem cā $\underline{a625}$ este număr Anderson. Atunci ar fi necesar ca $\underline{a625}^2 = \underline{xyzta625}$
Efectuând calculele gāsim cā a = o ceea ce nu convine.
Urmând calea din exemplele anterioare gāsim ca:
Singurul număr Anderson impar de 5 cifre este 90625. Intr-adevār 90625^2 = 8212**890625**
Singurul număr Anderson impar de 6 cifre este 890625. Intr-adevār, 890625^2= 793212**890625**
Singurul număr Anderson impar de 7 cifre este 2890625. Intr-adevār, 2890625^2=835571**2890625**
Singurul număr Anderson impar de 8 cifre este 12890625.
Intr-adevār, 12890625^2=166168**12890625**.
Singurul număr Anderson impar de 9 cifre este 212890625.
Intr-adevār, 212890625^2=45322418**212890625**.
In legāturā cu numerele lui Anderson formulām urmatoarea :
Conjecturā
Dacā A_i este un număr Anderson impar cu mai mult de 6 cifre, atunci numārul Anderson impar A_{i+1} (cel care urmeazā după A_i in sirul numerelor Anderson impare) este $\underline{aA_i}$ unde a este prima cifrā care precede pe A_i in numārul A_i^2 .
De exemplu:
Avem, mai sus, calculat pātratul numārului Anderson impar de 9 cifre . Cifra dinaintea ultimelor 9 cifre ale acestui număr este 8. Numārul Anderson impar de 10 cifre este 8212890625.
De asemenea propunem cititorilor gāsirea de raspunsuri la urmatoarele intrebāri:
1.Există k număr natural mai mare decât 9 astfel incât sā nu existe numere Anderson cu k cifre?
2.Sirul numerelor Anderson este *infinit*?

Bibliografie : Pascal Contest (Grade 9) The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING cemc.uwaterloo.ca 2017

1. Profesor, Colegiul National „Fratii Buzesti" Craiova
2) Profesor pensionar ,Colegiul National "Carol I", Craiova

Substituții în integrale

de **prof. Ovidiu Țâțan[1],** Rm. Sărat

Ideea acestui material a reieșit din următoarele probleme propuse de către subsemnatul în revistele de cultură matematică R.M.T. și G.M. și la concursul interjudețean de matematică "***Speranțe râmnicene***".

Substituția $t = a + b - x$

Enunț: Să se calculeze $\int_a^b \frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx$, $a,b,c \in \mathbb{R}, c > 0$.

Soluție: Notând

$t = a + b - x \Rightarrow dx = -dt,$

$x = a \Rightarrow t = b,$

$x = b \Rightarrow t = a$

și cu $I = \int_a^b \frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx$ obținem: $I = \int_a^b \frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx = \int_a^b \frac{1}{c^{2a+2b-2t-a-b}+1}dt =$

$$= \int_a^b \frac{1}{c^{a+b-2t}+1}dt = \int_a^b \frac{c^{2t-a-b}}{1+c^{2t-a-b}}dt \Rightarrow I + I = \int_a^b \frac{1}{c^{2x-a-b}+1}dx + \int_a^b \frac{c^{2x-a-b}}{1+c^{2x-a-b}}dx = \int_a^b 1dx = b - a \Rightarrow I = \frac{b-a}{2}$$

Substituția $t = \frac{x + ab - a - b}{x - 1}$

Enunț: Să se calculeze $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 2x + 3}dx$.

Soluție: Substituția $t = \frac{x + ab - a - b}{x - 1}$ implică (pe un interval convenabil ales de existență a fracției**)**

$x = a \Rightarrow t = b$ ***și*** $x = b \Rightarrow t = a$. Pentru $a = 2, b = 3 \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}$ și $dx = -\frac{2}{(t-1)^2}dt$.

Atunci când $x = 2 \Rightarrow t = 3, x = 3 \Rightarrow t = 2$. Obținem:

$$I = \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 2x + 3}dx = \int_2^3 \frac{\ln\left(\frac{t+1}{t-1} - 1\right)}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 - 2\frac{t+1}{t-1} + 3} \cdot \frac{2}{(t-1)^2}dt = \int_2^3 \frac{\ln 2 - \ln(t-1)}{t^2 - 2t + 3}dt = \ln 2 \cdot \int_2^3 \frac{1}{t^2 - 2t + 3}dt - I$$

$$\Rightarrow I + I = \ln 2 \cdot \int_2^3 \frac{1}{(t-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}dt \Rightarrow I = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t-1}{\sqrt{2}}\Big|_2^3 = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\frac{2}{\sqrt{2}} - arctg\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2\sqrt{2}} \cdot arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Substituția $t = \frac{ab}{x}$

Enunț: Să se calculeze $\int_a^b \frac{\ln x}{x^2 + cx + ab}dx$, $a,b \in \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}$, cu $x^2 + cx + ab \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Soluție: Folosind schimbarea de variabilă $t = \frac{ab}{x} \Rightarrow x = \frac{ab}{t} \Rightarrow dx = -\frac{ab}{t^2}dt$ și atunci când

$x = a \Rightarrow t = b, x = b \Rightarrow t = a$ obținem

$$I = \int_a^b \frac{\ln x}{x^2 + cx + ab}dx = \int_a^b \frac{\ln\frac{ab}{t}}{\left(\frac{ab}{t}\right)^2 + c\frac{ab}{t} + ab} \cdot \frac{ab}{t^2}dt = \int_a^b \frac{\ln ab - \ln t}{t^2 + ct + ab}dt = \ln ab - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I + I = \ln ab \cdot \int_a^b \frac{1}{x^2 + cx + ab}dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \ln ab \cdot \int_a^b \frac{1}{x^2 + cx + ab}dx$$

Distingem 3 cazuri:

i) $\Delta = c^2 - 4ab < 0$ de unde rezultă că

$$I = \frac{\ln ab}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4ab - c^2}} arctg \frac{2x + c}{\sqrt{4ab - c^2}} \Bigg|_a^b \Rightarrow \Rightarrow I = \frac{\ln ab}{\sqrt{4ab - c^2}} \left(arctg \frac{2b + c}{\sqrt{4ab - c^2}} - arctg \frac{2a + c}{\sqrt{4ab - c^2}} \right)$$

Exemplu . *Să se calculeze integrala:* $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2 + 4x + 8} dx$.

Este un caz particular al cazului ***i)*** când $a = 2, b = 4, c = 4$

Folosind substituția $t = \frac{8}{x}$ și urmând procedeul de calcul de mai sus se obține după un calcul relativ ușor:

$$I = \frac{1}{4} \cdot \ln 8 \cdot (arctg 3 - arctg 2) \Rightarrow I = \frac{1}{4} \cdot \ln 8 \cdot arctg \frac{1}{7}$$

ii) $\Delta = c^2 - 4ab = 0$ de unde rezultă că

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + cx + ab} dx = \int_a^b \frac{1}{x^2 + cx + \frac{c^2}{4}} dx = \int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2} dx = -\frac{1}{x + \frac{c}{2}} \Bigg|_a^b = \frac{4(b - a)}{(2a + c) \cdot (2b + c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \ln ab \cdot \frac{4(b - a)}{(2a + c) \cdot (2b + c)}$$

Exemplu Să se calculeze integrala $I = \int_1^4 \frac{\ln x}{x^2 + 4x + 4} dx.$

Este un caz particular al cazului ***i)*** când $a = 1, b = 4, c = 4$

Aplicând metoda de mai sus se obține: $I = \frac{1}{2} \cdot \ln 4 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow I = \frac{1}{6} \cdot \ln 2$

iii) $\Delta = c^2 - 4ab > 0$

În acest caz $\int_a^b \frac{1}{x^2 + cx + ab} dx = \int_a^b \frac{1}{x^2 + \frac{c}{2}x + \frac{c^2}{4} + ab - \frac{c^2}{4}} dx = \int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{c^2 - 4ab}}{2}\right)^2} dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4ab}} \cdot \ln \left| \frac{2x + c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2x + c + \sqrt{c^2 - 4ab}} \right| \Bigg|_a^b$ de unde obținem că

$$I = \frac{1}{2} \cdot \ln ab \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 - 4ab}} \cdot \ln \left| \frac{2x + c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2x + c + \sqrt{c^2 - 4ab}} \right| \Bigg|_a^b.$$

Exemplu . Să se calculeze integrala $I = \int_1^4 \frac{\ln x}{x^2 + 5x + 4} dx$.

Este un caz particular al cazului ***iii)*** când $a = 1, b = 4, c = 5$

Vom folosi schimbarea de variabilă $x = \frac{4}{t} \Rightarrow dx = -\frac{4}{t^2} dt$. Când $\begin{matrix} x = 1 \Rightarrow t = 4 \\ x = 4 \Rightarrow t = 1 \end{matrix}$.

1. Profesor, Colegiul Național "*Alexandru Vlahuță* ",Râmnicu Sărat

Probleme practice ale matematicienilor antichității

de prof. **Adrian Stan,** Buzău

Problemele practice privind măsurarea distanțelor, calculul ariilor suprafețelor, determinarea unor probleme de moșteniri, a calculului dobânzilor pentru împrumuturi sau pentru diverse construcții sau în observarea cerului au constituit din cele mai vechi timpuri preocupări ale oamenilor care s-au regăsit pe cele mai vechi din manuscrisele descoperite în Egipt, Mesopotamia, Grecia, Asia Mică și Asia Centrală.

În cele ce urmează vom da și noi câteva astfel de exemple:

1. La Muzeul Luvru din Paris se găsește o tăbliță din Mesopotamia ce datează din anul 1700 î. Hr., și pe care s-a putut descifra următoarea problemă: ***"În cât timp se dubleză o sumă de bani dacă este investită cu o dobândă anuală de 20 de procente?*** ([2] pag 21).

Rezolvare:

Așadar, o problemă cu dobânzi în care suma inițială N, se mărește anual cu 20% și se caută după cât timp, fie x acesta, această sumă se dublează, devenind 2N.

Înseamnă că în fiecare an, suma inițială se înmulțelte cu factorul 1,2, devenind după x ani suma $N \cdot 1,2^x$ sau sub forma cunoscută în algebră ca $N \cdot \left(1+\frac{20}{100}\right)^x$. Cum suma inițială se dublează obținem ecuația $N \cdot 1,2^x = 2 \cdot N \Rightarrow 1,2^x = 2$, ceea ce este o ecuație exponențială care se rezolvă cu ajutorul logaritmilor, pe care desigur babilonienii nu îi știau atunci, dar totuși au reușit să găsească soluția $x = 3,7870$ care este foarte aproape de valoarea corectă $x = 3,8018$ însemnând trei ani nouă luni și optsprezece zile.

Cum au reușit să găsească această valoare ținând cont că ei nu cunoșteau sistemul zecimal de astăzi ci foloseau sistemul de numerație sexazecimal care avea baza de numerație 60?

În multe din calculele lor soluțiile găsite erau de fapt aproximări cât mai bune, ca de altfel și aici. Ei știau că $1,2^3 = 1,728$ și $1,2^4 = 2,0736$ și atunci știau că valoarea lui x este între 3 și 4 iar pentru a micșora întervalul care îl conținea pe x, se foloseau de un procedeu pe care astăzi îl numim interpolare liniară, ce constă în determinarea unui număr care împarte intervalul de la 3 la 4 în același raport în care 2 împarte intervalul cuprins între 1,728 și 2,0736. Așadar, calculele lor în sistem sexagesimal și cu ajutorul diveselor tabele în care se găseau puterile numerelor, îi conduceau la o ecuație liniară cu soluția scrisă sub forma $3+\frac{47}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}$ care înseamnă aproximativ 3, 7870.

2. De o parte și de alta a unui râu de lățime 40 m sunt doi palmierii A și B, față în față de înălțime 4 m și 12 m pe care stau două păsări în vârfurile lor. Acestea văd un pește la suprafața apei pe o dreaptă ce unește bazele celor doi pomi și pornesc în același timp spre el și ajung simultan la el.

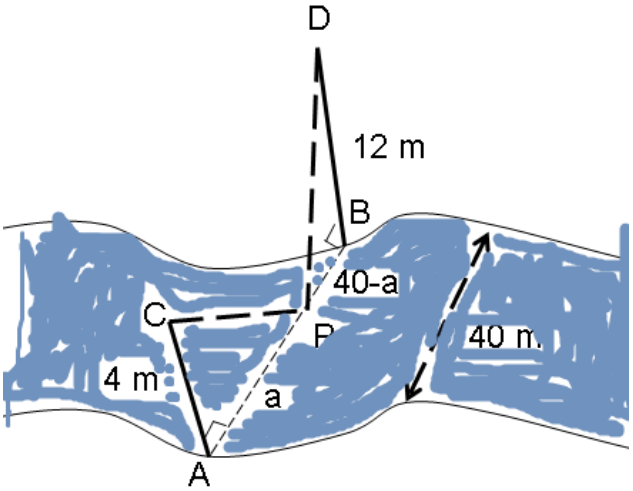
Să se determine la ce distanță de mal se află peștele și distanța parcursă până la el.

(Se consideră că păsările sunt la fel și au aceeași viteză)

Observație:

Problema cu date și enunț modificat dar care păstrează ideea, a apărut în cartea „**Kitab al-kafi fi-l-hisab**”, a matematicianului arab **Abu Bakr Muhammed ibn al- Hasan al – karadji** în 1019.

Rezolvare:



Notăm PC=PD= d și PA= a iar PB= 40 –a deoarece AB = 40 m.

Din PC=PD rezultă cu Teorema lui Pitagora:

$$\sqrt{4^2+a^2}=\sqrt{12^2+(40-a)^2}\,|()^2 \Rightarrow$$

$$16+a^2=144+1600-80a+a^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{4^2+a^2}=\sqrt{12^2+(40-a)^2}\,|()^2 \Rightarrow$$

$$80a=1728 \Rightarrow a\approx 21,6m \Rightarrow b=40-21,6=18,4m\,.$$

Așadar, peștele se află la o distanță de 21,6 metri față de malul unde este A.

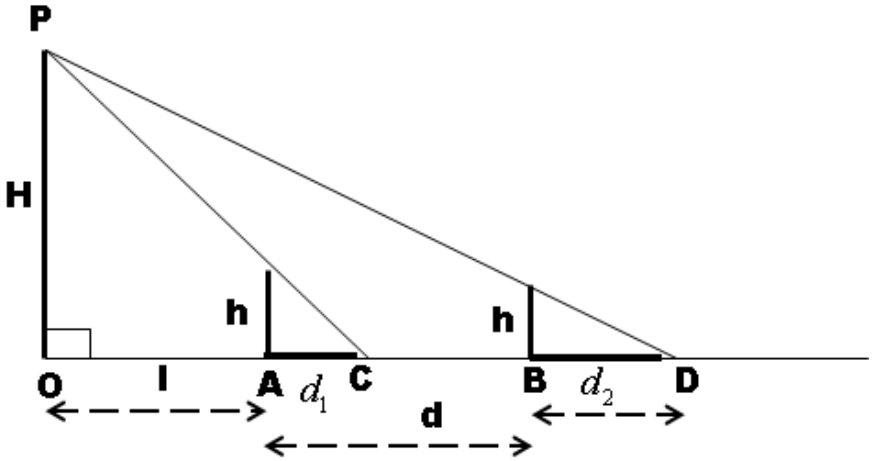
Distanța de la fiecare pasăre la pește este distanța

$$d=PC=PD=\sqrt{16+466,56}\approx 22m$$

Matematicianul chinez **Liu Hui** (225- 295**)** este primul matematician după **Arhimede** (287- 212 î.e.n) care a aproximat mult mai bine valoarea lui pi cu 4 zecimale corecte. În cartea sa “**Nine chapter on the Mathematical Art** “. Într-o altă lucrare de-a sa „**Sea Island Mathematical Manual**” preocupat de probleme practice cum ar fi calculul diverselor înălțimi ale obiectivelor inaccesibile și distanțelor dintre acestea, găsim următoarea problemă.

3. În figura alăturată este prezentată o insulă având forma unui munte care iese din mare iar în linie dreaptă cu baza insulei, pe țărm există doi stâlpi A și B de lungime h = 10 metri iar distanța dintre cei doi stâlpi fiind de d = 2000 m. La o distanță de d_1 = 246 m de primul stâlp și respectiv d_2 = 254 m de al doilea stâlp privind prin vârfurile acestor stâlpi se poate vedea exact vârful insulei. Să se determine care este înălțimea insulei H si distanța de la primul stâlp la baza insulei, l.

Rezolvare:



Să considerăm H înălțimea insulei C și D punctele aflate la distanțele d_1 respectiv d_2 față de A respectiv B. Dacă O este centrul bazei insulei și OP este înălțimea acesteia, obținem din asemănarea triunghiurilor dreptunghice relațiile:

$\frac{d_1}{d_1+l}=\frac{h}{H}$ și $\frac{d_2}{d_2+d+l}=\frac{h}{H}$. Atunci, $\frac{d}{d_1+l}=\frac{d_2}{d_2+d+l}$. De aici se obține după aplicarea proprietății fundamentale a proporțiilor că $l=\frac{d\cdot d_1}{d_2-d_1}$

Din relația $\frac{d_1}{d_1+l}=\frac{h}{H}$ scoatem pe H rezultând

$$H=\frac{(d_1+l)\cdot h}{d_1}=\frac{\left(d_1+\frac{d_1\cdot d}{d_2-d_1}\right)\cdot h}{d_1}=\frac{h\cdot d_1(d_2-d_1)+d_1\cdot d\cdot h}{(d_2-d_1)\cdot d_1}=\frac{h\cdot(d_2-d_1)+d\cdot h}{d_2-d_1}.$$

Dând valorile pentru $d=2000,\ h=10,\ d_1=246,\ d_2=254$ obținem

$$l=\frac{246\cdot 2000}{254-246}=61500m=61{,}5\ km \text{ și } H=\frac{10\cdot 8+2000\cdot 10}{8}=\frac{20080}{8}=2510m=2{,}51\ km.$$

Bibliografie:

1. A. P. Iușkevici. Istoria Matematicii în Evul Mediu. Editura Științifică. București. 1963.
2. Eli Maor. E. Povestea unui număr. Editura Theta. București. 2006

Noțiunile fundamentale ale MATEMATICII (III)

de prof. Daniel Văcaru, Colegiul Economic "Maria Teiuleanu", Pitești

Memoriei tatălui meu, Aurel

Este momentul să trecem puțin și la GEOMETRIE. Ce înseamnă termenul în grecește?: ***măsurarea Pământului*** **(*Geos, Gaia* – Pământ, *metron, metreia* – a măsura)**

În gimnaziu, am auzit cu toții de Thales, Pitagora, Eratostene, Arhimede, Ptolemeu, etc. Îi vom vedea la lucru pe câțiva.

Și acum un preambul. În prima parte a acestei priviri asupra Matematicii și Didacticii sale, spuneam că **numărul** este noțiunea primară a Matematicii. Este adevărat, este prima noțiune apărută **conștient** în viața de zi cu zi a OMULUI, căci avea nevoie să știe câți pterodactili(?)[1] duce la păscut, cam câte pietre sau scoici a strâns, etc. Însă la nivel instictual el simte mai întâi grija mamei, vede fața ei frumoasă, cu forme minunate. Apoi vede Soarele, și toata celelalte. Așadar, omul nu poate să trăiască fără NUMERE, și fără FIGURI GEOMETRICE. Și, firește, toate trebuie să poarte un nume, așadar are nevoie de comunicare, deci de LIMBĂ. ROMÂNĂ, în cazul nostru.

Să ne gândim cu ce număr am putea începe. Aș merge de data aceasta înapoi, și aș ajunge la 1. Desigur, din punct de vedere geometric, cu 0 nu prea poți face mare lucru. Este, însă, nevoie de el. Dar cu 0 elemente nu poți face geometrie. În schimb, 1 (unul) este spațiul și punctul. Adică totalitatea mediului în care se desfășoară geometria (în spațiu), și începutul ei. Căci GEOMETRIE înseamnă puncte, drepte, plane și relațiile dintre ele.

Ca urmare, ne îndreptăm cu viteză către 2. Păi, 2 puncte distincte determină un segment și o dreaptă. Dar și printr – un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu ea[2]. Vom avea nevoie și de *semidreaptă*.

O să vorbim și despre relații. Relația de determinare a unui segment. Ca și relația de *apartenență* sau de *nonapartenență*. A unui (1) punct la o dreaptă(1).

Apare și ***relația de ordine***, la nivel intuitiv, desigur. Dar, ce-i oare GEOMETRIA fără figuri? Să presupunem cunoscute punctele $A, B \in \wp$. Notăm *d* dreapta determinată de punctele *A* și *B*. Apar trei regiuni, două semidrepte și un segment. Așadar, avem

$$XA) \overset{def}{=} \{Y \in d | X - Y - A\}$$

apoi, $[AB] \overset{def}{=} \{X \in d | A - X - B\}$, și, în final, $(BX \overset{def}{=} \{Y \in d | B - Y - X\}$.

Firește, am folosit intuiția, căci am presupus că *A* este situat la stânga lui B.

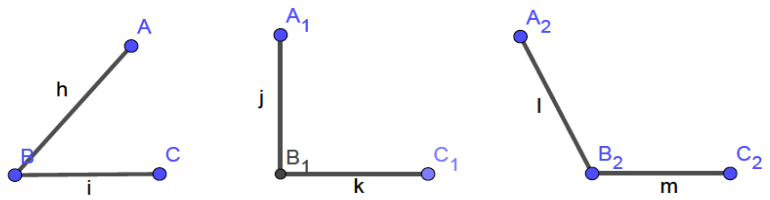
Ce putem face, oare, cu 3 puncte? E simplu, dacă cele trei puncte sunt necoliniare, a apărut primul rock - star major al GEOMETRIEI, triunghiul[3]

Dar cu două semidrepte? Să presupunem că se intersectează, ca și oamenii. Atunci ele au un punct comun, și formează un **unghi**. Și urmează clasificările triunghiurilor, anume după **măsura** lor.[4] Și segmentele au măsură, la ele vorbim despre **lungimea** lor.

---

[1] Oare? Sir Conan Doyle scria o poveste frumoasă
[2] Graba strică treaba! Un bob zăbavă
[3] Ne reamintim cu toții de cărțile regretatului Viorel Gh.Vodă
[4] Nu, nu – i William Shakespeare

Revenind la unghiuri, acestea sunt ***ascuțite,*** dacă măsura lor este mai mică de $90°$, *drepte*, dacă măsura lui este egală cu $90°$, respectiv ***obtuze,*** dacă măsura lor este mai mare de $90°$.



Vorbim, de asemenea, despre ***unghiuri complementare***, dacă suma măsurilor lor este $90°$, respectiv ***suplementare,*** dacă suma măsurilor lor este $180°$.

Și este momentul să vorbim despre **unghiuri congruente** și **segmente congruente.** Două unghiuri sunt congruente dacă *împărtășesc* aceeași măsură, iar două segmente sunt congruente, dacă au aceeași lungime [1].
Cât despre două triunghiuri *ABC* și *A'B'C'*, ele sunt congruente dacă:
$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Leftrightarrow [AB] \equiv [A'B'],\ [BC] \equiv [B'C'],\ [CA] \equiv [C'A'],\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'},\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$
$\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$

Și acum, câteva observații simple.

Unghiul drept este *isteț foc*, căci este congruent cu suplementul său. Să vedem de ce? Să notăm cu *x* măsura unghiului drept. Atunci obținem, știind că el este congruent cu suplementul său, frumoasa **ecuație** (la nivel de măsuri ale unghiurilor),
$x + x = 180° \Leftrightarrow 2x = 180° \Leftrightarrow x = 90°$.

Iată din nou un <u>cuvânt – cheie</u>: ecuație. Matematicienii din Grecia antică încercau să pună toate problemele sub formă geometrică.

Să reamintim cazurile de congruență.
Cazul I (Latură – Unghi – Latură). Două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sunt congruente dacă și numai dacă $[BA] \equiv [B'A'], \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C}, [CA] \equiv [C'A']$.
Cazul II (Unghi – Latură – Unghi) Două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$sunt congruente dacă și numai dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C', [BC] \equiv [B'C']$ și$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A''C'B'$.
Cazul III (Latură – Latură – Latură) Două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sunt congruente, dacă $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, $[CA] \equiv [C'A']$.

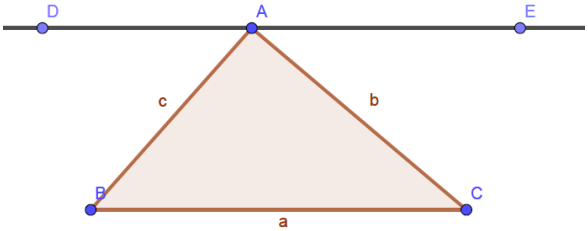
Și iată, este momentul să vorbim despre ceea ce face diferența și îmbogățește **geometria elementară**. Anume, despre relația de paralelism între drepte.

Spunem că dreptele d_1 și d_2 **sunt paralele** și scriem $d_1 \parallel d_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

Și acum, surle și trâmbițe, aplauze și ovații pentru **axioma paralelor.**
Anume, **printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură dreaptă paralelă cu aceasta.** Aici, dragi elevi, vă sfătuiesc să vă uitați prin manualul de clasa a VI-a.

Una dintre cele mai importante consecințe ale acestei axiome este cea asupra **sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.**
Așadar, ***în orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor acestuia este*** $180°$ **.**

[1] Nu-i așa că avem o limbă frumoasă?



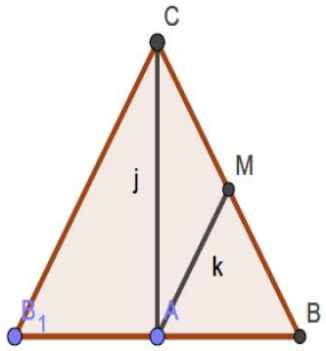
Am contruit prin *A* paralela la *BC*[1]. Atunci, folosind criteriul de paralelism, pe care am uitat să – l enunț[2], că $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle ABC)$ și $m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle ACB)$. Atunci, $180°$ (căci aceasta este măsura unui unghi alungit[3]) este descompusă în

$$180° = m(\measuredangle DAB) + m(\measuredangle BAC) + m(\sphericalangle EAC) = m(\measuredangle ABC) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ACB),$$

ceea ce încheie demonstrația acestei celebre teoreme.

O altă teoremă frumoasă este **teorema 30 – 60 - 90[4],** a cărei demonstrație se găsește în orice manual de geometrie de clasa a VI – a.

Fie un triunghi dreptunghic *ABC*, cu $m(\measuredangle BAC) = 90°$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30°$. Atunci $AB = \frac{BC}{2}$.



Să (mai!) scriem totuși o demonstrație, cu ajutorul unei construcții auxiliare.

Să considerăm punctul $M \in [BC]$ astfel încât $m(\sphericalangle BAM) = 60°$. Cum $m(\sphericalangle B) = 90° - 30° = 60°$, triunghiul *BMA* este echilateral. De asemenea, $m(\sphericalangle CAM) = 30°$. Așadar, cele două triunghiuri formate ΔCAM și ΔBAM sunt isoscele. Obținem că

$[CM] \equiv [MA] \equiv [MB]$,

și, în plus, $[MA] \equiv [AB] \equiv [MB]$. De aici, deducem că

$$CB = CM + MB = AB + AB \Leftrightarrow AB = \frac{CB}{2},$$

ceea ce era dorința noastră. Apropo, cine este *M*, astfel construit?

Încercați să contruiți punctul B_1, simetricul lui *B* față de *A*. Ar fi o altă idee, dar este momentul să cam încheiem povestea!

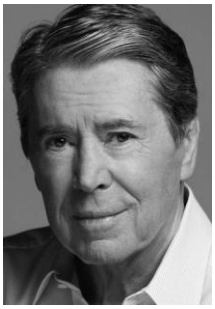
Promit că materialul va fi continuat! E puțin, foarte puțin[5]! Doar clasa a VI-a, și nici ea toată.

---

[1] Aș fi zis o paralelă, dar... De ce am folosit articolul hotărât?
[2] De, maturitatea asta....
[3] Și pe unghiul nul l – am uitat! Dar voi sunteți isteți, deja ați observat acest lucru, și ați aflat ce măsură are el!
[4] Nu, nu sunt măsurile vreunui supermodel!
[5] A zis – o Dem Rădulescu

„ Îl poți învăța pe un elev o lecție pe zi, dar dacă-l educi să învețe din curiozitate, el va continua să învețe toată viața.

Clay P. Bedford
(1903- 1991)



3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1159. Suma a șaptesprezece numere naturale consecutive este 2023. Aflați numerele.

Elena Alexie, **Laura Zaharia**, Craiova

Rezolvare: Fie n al nouălea număr. Atunci,
$(n-8)+(n-7)+...+(n-1)+n+(n+1)+.....+n+8=2023$.

Obținem $17n=2023 \Rightarrow n=\frac{2023}{17}=\frac{17^2\cdot 7}{17}=119$. Așadar, numerele sunt $111;112;113;.....;126;127$.

G:1160. Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_{2022} \rangle 0$ **astfel încât** $S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{2}{x_2+1}+....+\frac{2022}{x_{2022}+1}=2023.$

Calculați suma $S^I=\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{2x_2}{x_2+1}+....+\frac{2022x_{2022}}{x_{2022}+1}$. **Ginela Dobrica**, Bechet

Rezolvare: Observăm că
$S+S^I=1+2+3+...+2022=1011\cdot 2023 \Rightarrow S^I=1011\cdot 2023-2023=2043230$.

G:1161. Într-un bloc sunt apartamente cu 2 camere, respectiv 3 camere, în total 56 apartamente și 148 camere.
a) Este posibil ca numărul apartamentelor cu câte 3 camere să fie 40? Justificare.
b) Aflați câte apartamente de fiecare fel sunt.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare
a) Dacă ar fi 40 apartamente de 3 camere, atunci numărul celor de 2 camere ar fi 56-40=16. În acest caz, numărul total de camere ar fi 40·3+16·2=152>148. Deci nu pot fi 40 apartamente cu 3 camere.
b) Se utilizează metoda falsei ipoteze. Presupunem că toate apartamentele ar avea câte 2 camere. În acest caz ar fi 56·2=112 (camere). Apare diferența 148-112=36 (camere), dar și diferența 3-2=1. În fine, 36:1=36. Așadar, sunt 36 apartamente cu câte 3 camere și 56-36=20 apartamente cu câte 2 camere.

G:1162. Pentru $n\in\mathbb{N}$**, să se compare numerele:** $A=(3\cdot 83^{2n})^2+(5\cdot 83^{2n})^2+(7\cdot 83^{2n})^2$ **și** $B=(83^n)^4+(83^n)^4+(3\cdot 83^n)^4$**.** **Ionel Tudor**, Călugăreni

Rezolvare:
$A=(3\cdot 83^{2n})^2+(5\cdot 83^{2n})^2+(7\cdot 83^{2n})^2=\left(3^2+5^2+7^2\right)\cdot 83^{4n}=83^{4n+1}$,

$B=(83^n)^4+(83^n)^4+(3\cdot 83^n)^4=\left(1+1+3^4\right)\cdot 83^{4n}=83^{4n+1}$. Numerele sunt egale.

G:1163. Determinați trei numere naturale știind că mediile aritmetice ale oricăror două numere este egală cu 24. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

Din $\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{2}=\frac{c+a}{2}=24 \Rightarrow a+b=b+c=a+c=48 \Rightarrow a+b+c=72$. Atunci, $a=b=c=24$

G:1164. Comparați numerele $a=2025\cdot 2^{224}$ și $b=800\cdot 3^{150}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare:

$a=3^4\cdot 5^2\cdot 2^{224}=3^4\cdot 5^2\cdot 2^5\cdot 2^{219}$ și $b=2^5\cdot 5^2\cdot 3^{150}=2^5\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 3^{146}$ Cum

$2^{219}=2^{3\cdot 73}=8\cdot 2^{73}\langle\ 3^{2\cdot 73}=9\cdot 3^{73}=3^{146} \Rightarrow a\langle b$.

G:1165. Fie x, y$\in$N*. Demonstrați că, dacă suma $x+4y$ este divizibilă cu 7, atunci fracția $\frac{x+4y}{2x+y}$ este reductibilă. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

$7|(x+4y),\ 7|(7x+7y) \Rightarrow 7|(6x+3y)$. $\Rightarrow 7|3(2x+y)\ dar\ (7;3)=1 \Rightarrow 7|(2x+y)$.

Rezolvare:

$\left.\begin{matrix}7|(x+4y)\\7|(2x+y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ fracția se simplifică prin 7 $\Rightarrow$ fracția este reductibilă.

G:1166. Să se determine numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab}=2a^3+5b^2$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare:. Avem: $10a+b=2a^3+5b^2 \Leftrightarrow 2a(a^2-5)=b(1-5b)$. Dacă $b=0$ atunci $10a=2a^3 \Rightarrow a^2=5$, fals. Dacă $b\geq 1 \Rightarrow b(1-5b)<0 \Rightarrow 2a(a^2-5)<0 \Rightarrow a^2-5<0 \Rightarrow a\in\{1,2\}$. După analiza celor două cazuri obținem $\overline{ab}=21$.

G:1167. Există numere naturale x și y pentru care $x^4+y^4=2023$? Justificați.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Cum $\forall a\in\mathbb{N}$, avem $U(a^4)\in\{0,1,5,6\}$, iar din $x^4\leq 2023 \Rightarrow x<7\left(7^4=2401;\ 6^4=1296\right)$

Vom analiza cazurile:

$x=0 \Rightarrow U(y^4)=3$ contradicție.; $x=1 \Rightarrow U(y^4)=2$ contradicție.

$x=2 \Rightarrow U(y^4)=U(2023-2^4)=7$ contradicție.; $x=3 \Rightarrow U(y^4)=U(2023-3^4)=2$ contradicție.

$x=4 \Rightarrow U(y^4)=U(2023-4^4)=7$ contradicție.; $x=5 \Rightarrow U(y^4)=U(2023-5^4)=8$ contradicție.

$x=6 \Rightarrow U(y^4)=U(2023-6^4)=7$ contradicție. Așadar, ecuația nu are soluții în mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

G:1168. Determinați cele mai mici numere naturale x,y,z cu proprietățile: $\frac{14x}{27y}=\frac{9y}{7z}=\frac{3z}{2x}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Relația dată se mai scrie $\frac{14x}{27y}=\frac{27y}{21z}=\frac{21z}{14x}=t \Rightarrow$

$t^3=\frac{14x}{27y}\cdot\frac{27y}{21z}\cdot\frac{21z}{14x}=1 \Rightarrow 14x=27y=21z=n\in\mathbb{N}$, unde n este cel mai mic număr natural pentru care n este divizibil în același timp cu 14, 27, 21.

Numărul n trebuie să respecte condiția $n\geq c.m.m.c(14,27,21)=126 \Rightarrow$

$14x\geq 126;\ 27y\geq 126;\ 21z\geq 126$. Rezultă x = 9, y = 5; z = 6.

▪ Clasa a VI-a

G:1169. Două robinete, deschise siimultan, pot umple un bazin în 6 ore. Dacă însă, primul robinet curge singur 3 ore, după care se deschide și al doilea robinet, bazinul se umple acum în 4 ore. Să se afle în câte ore ar umple bazinul fiecare robinet curgând singur.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

Considerăm capacitatea bazinului egală cu unitatea și notăm cu x și y numărul de ore în care primul, respectiv al doilea robinet ar umple bazinul, curgând singure. Dacă, în primul caz, ele umplu bazinul în 6 ore, atunci, într-o oră umplu a șasea parte din bazin, adică $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1). În mod similar, în al doilea caz, avem $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ (2). Scăzând egalitatea (1) din (2), se obține $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$, adică $\frac{2}{x}=\frac{1}{12}$, de unde x = 24 (ore). Apoi, $\frac{1}{y}=\frac{1}{6}-\frac{1}{24}$ înseamnă $\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$, deci y = 8 (ore).

G:1170. **Găsiți o scriere a numărului 2022 în forma** $2022=2x+3y+5z+5t$ **unde** x,y,z,t **și** $x+y+z+t$ **sunt numere naturale prime.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Din $2022=2(x+z+t)+3(y+z+t)\Rightarrow(x+y+z)\vdots 2$.

Cum $x+y+z+t=x+2k,\ k\in\mathbb{N}^*$ este prim impar rezultă că x este prim impar și atunci, fie $x=3\Rightarrow y=2l+1=7$. Mai departe se arată că $z=2,t=397$ sau $z=397,t=2$.

G:1171. **Determinați numerele de forma** $\overline{5x3y}$ **care dau restul 7 la împărțirea cu 12.**

elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

Rezolvare: $\overline{5x3y}=12k+7,\ k\in N,\ x,y\,cifre$;

$\overline{5x3y}=12k+4+3=M_4+3$ sau $\overline{5x3y}=12k+6+1=M_3+1$.

Cum $\overline{5x3y}$ este impar $\Rightarrow y\in\{1,3,5,7,9\}$

Din $\overline{5x3y}=12k+4+3=M_4+3\ \Rightarrow\overline{3y}\in\{31,35,39\}\Rightarrow y\in\{1,5,9\}$ Se analizează cele trei cazuri:

Cazul I: $y=1\Rightarrow\overline{5x3y}=\overline{5x31}=M_3+1\Leftrightarrow x+9=M_3+1\Leftrightarrow x\in\{1,4,7\}\Rightarrow 5131,5431,5731.$

Cazul II: $y=5\Rightarrow\overline{5x3y}=\overline{5x35}=M_3+1\Leftrightarrow x+13=M_3+1\Leftrightarrow x\in\{3,6,9\}\Rightarrow 5335,5635,5935.$

Cazul III: $y=9\Rightarrow\overline{5x3y}=\overline{5x39}=M_3+1\Leftrightarrow x+17=M_3+1\Leftrightarrow x\in\{2,5,8\}\Rightarrow 5239,5539,5839.$

G:1172. **Arătați că există trei numere naturale m, n, p pentru care** $99^{2023}=m^3+n^3+p^3$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare:

$99^{2023}=99^{2022}\cdot 99=\left(99^{674}\right)^3\cdot(2^3+3^3+4^3)\Rightarrow\ 99^{2023}=\left(99^{674}\cdot 2\right)^3+\left(99^{674}\cdot 3\right)^3+\left(99^{674}\cdot 4\right)^3$, c.c.t.d

G:1173. **Determinați numerele întregi nenule a, b, c, d pentru care:**

$\frac{15}{a+b+c}=\frac{30}{b+c+d}=\frac{45}{c+d+a}=\frac{60}{d+a+b}$ și $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)=1944$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Notând valoarea comună a rapoartelor cu k și înlocuind în relația a doua obținem:

$\frac{15}{k}\cdot\frac{30}{k}\cdot\frac{45}{k}\cdot\frac{60}{k}=1944\Rightarrow\frac{5^4}{k^4}=1\Rightarrow k=5$. Pentru k = 5 avem

$a+b+c=3;\ b+c+d=6;\ \ c+d+a=9;\ d+a+b=12$ și adunându-le rezultă $a+b+c+d=10$.
Obținem: $a=4;\ b=1;\ c=-2;\ d=7$.

G:1174. Fie $a,\ b,\ c$ numere întregi nenule și $A=a^{n+10}\cdot b^{3n^2}\cdot c^{2n^2+9}, B=a^{n^2}\cdot b^{3n}\cdot c^{2n+11}$. Arătați că numerele *A* și *B* au același semn.

Iuliana Trașcă, Slatina,Olt

Rezolvare: Avem $AB=a^{n^2+n+10}\cdot b^{3\ n^2+n}\cdot c^{2\ n^2+n\ +20}>0$ pentru că n^2+n este număr par. Deci *A* și *B* au același semn.

G:1175. Calculați: $\frac{1}{5^{-2023}+1}+\frac{1}{5^{-2022}+1}+...+\frac{1}{5^{2022}+1}+\frac{1}{5^{2023}+1}$. **Iuliana Trașcă**, Slatina, Olt

Rezolvare: $\frac{1}{5^{-2023}+1}=\frac{5^{2023}}{5^{2023}+1}$, deci suma dintre primul și ultimul termen este egală cu 1.
Analog se demonstrează că suma dintre al doilea termen și penultimul este 1 ș.a.m.d.
Rămâne termenul din mijloc egal cu $\frac{1}{2}$.Rezultatul este 2023+$\frac{1}{2}$

G:1176. Numerele naturale nenule x și y au proprietatea că numărul $x^{2023}+x+y^2$ este divizibil cu xy. Demonstrați că x este pătrat perfect.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Fie d = c.m.m.d.c (x;y), atunci $x=d\cdot a,\ \ y=d\cdot b,\ \ (a;b)=1$. Relația din enunț devine:
$d^{2023}a^{2023}+da+d^2b^2 \vdots d^2ab \Rightarrow dab$ divide pe $d^{2022}a^{2023}+a+db^2\ \ (*)$. Obținem că
$a|db\ \ si\ \ d|a \Rightarrow d=a \Rightarrow x=d^2$, deci este pătrat perfect.

G:1177. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $xy+py-x+y-1=0$ unde p este un număr prim dat.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: $y(x+p+1)=x+1\Rightarrow(x+p+1)|x+1\Rightarrow(x+p+1)|(x+p+1-x-1)\Rightarrow(x+p+1)|p\Rightarrow$
Mulțumea soluțiilor $S=\{(-1;0),(-p;-p+1),(-p-2;p+1),(-2p-1;2);\ p\ \text{număr prim}\}$.

G:1178. Arătați că dacă numerele raționale și nenule, x și y verifică relația $2x^2+5xy+3y^2=0$ atunci, $3x+4y\neq 0$ și $\frac{4x+y}{3x+4y}\in\mathbb{Z}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

Din $2x(x+y)+3y(x+y)=0\Leftrightarrow(x+y)(2x+3y)=0\Rightarrow\ x+y=0$ sau $2x+3y=0$.
Dacă și $x+y=0$ și $2x+3y=0$ în același timp rezultă $y=2x+3y-2(x+y)=0-0=0$ ceea ce e fals deoarece y este nenul.

Fie $x+y=0\Rightarrow y=-x\Rightarrow\frac{4x+y}{3x+4y}=\frac{3x}{-x}=-3\in\mathbb{Z}$.

Fie $2x+3y=0\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x\Rightarrow\frac{4x+y}{3x+4y}=\frac{4x-\frac{2}{3}x}{3x-4\cdot\frac{2}{3}x}=\frac{10x}{x}=10\in\mathbb{Z}$.

▪ Clasa a VII-a

G:1179. a) Să se descompună în factori primi numărul n=240219;
b) Arătați că numărul a= 240219001 este pătrat perfect. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) $n = 240219 = 3^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 41$; b) $a = 1000n + 1 = 10^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 41 + 1 = 123 \cdot 124 \cdot 125 \cdot 126 + 1$.

Notând pe 123 *cu* x se arată că $a = x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 =$

$= (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x)+1 = \left(x^2+3x+1\right)^2$. Deci $a = \left(123^2 + 3 \cdot 123 + 1\right)^2 = 15499^2$.

G:1180. Determinați numerele naturale a și b astfel încât

$$\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{a^3+b^3}{2} + \frac{a^4+b^4}{4} = \frac{b+3}{b+1}.$$

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: După aducerea la același numitor în stânga, relația dată se mai scrie

$$\frac{a^2+2a^3+a^4}{4} + \frac{b^2+2b^3+b^4}{4} = \frac{b+1+2}{b+1} \Leftrightarrow \frac{(a+a^2)^2}{4} + \frac{(b+b^2)^2}{4} = 1 + \frac{2}{b+1}. \quad \textbf{(*)}$$

Cum a și a^2 au aceeași paritate rezultă $a+a^2$ este un număr par iar $\left(a+a^2\right)^2$ este multiplu de 4.

În relația (*) membrul stâng este natural, rezultă că și membrul drept trebuie să fie natural.

Rezultă: $1 + \frac{2}{b+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow b+1 \mid 2 \Rightarrow b \in \{0;1\}$.

Dând valori lui b obținem doar soluția $b = 1 \Rightarrow \frac{(a+a^2)^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 1$.

G:1181. Determinați numerele a și b care verifică egalitatea
$3a + 3b + 28 = 8\sqrt{3a+5} + 6\sqrt{3b-2}$ **și calculați** $(a-b-1)^{2022}$. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+5 \ge 0 \Rightarrow a \ge -\frac{5}{3} \\ 3b-2 \ge 0 \Rightarrow b \ge \frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{Notăm} \quad \left.\begin{array}{l} \sqrt{3a+5} = x,\ x \ge 0 \Rightarrow 3a = x^2-5 \\ \sqrt{3b-2} = y,\ y \ge 0 \Rightarrow 3b = y^2+2 \end{array}\right\} \text{Egalitatea devine}$$

$x^2 + y^2 + 25 = 8x + 6y \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 4, y = 3 \Rightarrow a = b = \frac{11}{3} \Rightarrow$

$(a-b-1)^{2022} = (-1)^{2022} = 1$

G:1182. Fie numărul A în baza trei cu n cifre, $A = 222....2_{(3)}$. **Scrieți numărul A^2 în baza trei.**
Dorina Goiceanu, Iulia Sanda, Craiova

Rezolvare:

$$A = 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + ... + 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} \Rightarrow A^2 = \left(3^n - 1\right)^2 = 3^{2n} - 2 \cdot 3^{2n} + 1 = 3^n(3^n - 1) - 3^n + 1$$

$A^2 = 3^n(3-1) \cdot \left(3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3 + 1\right) - 3^n + 1 = 3^{2n-1} + 2 \cdot 3^{2n-2} + ----+2 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 3^n - 3^n + 1$

$= 222....221000.....01_{(3)}$. Numărul A^2 are n-1 cifre de 2 si n-1 cifre de 0.

G:1183. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^2 = y^2 + py$ **unde p este un număr prim impar.** **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare:

Ecuația dată devine $4x^2=4y^2+4py \Leftrightarrow 4x^2+p^2=(2y+p)^2 \Leftrightarrow (2y+p)^2-(2x)^2=p^2 \Leftrightarrow$ $(2y+p-2x)(2y+p+2x)=p^2$. Se analizează situațiile

$\left((2y+p-2x),(2y+p+2x)\right)\in\left\{(1;p^2),(-1;-p^2),(p;p),(-p;p),(p^2;1),(-p^2;-1)\right\}$

G:1184. Calculați $\sqrt{1+2021\cdot\sqrt{1+2022\cdot\sqrt{4+2022\cdot\sqrt{1+2025\cdot 2027}}}}$. **Nicolae Ivășchescu**, Canada

Rezolvare: Se calculează din aproape în aproape:

$\sqrt{1+2025\cdot 2027}=\sqrt{1+(2026-1)(2026+1)}=2026$, $\sqrt{4+2022\cdot 2026}=\sqrt{4+(2024-2)(2024+2)}=2024$;

$\sqrt{1+2022\cdot 2024}=\sqrt{1+(2023-1)(2023+1)}=2023$, În final a rămas,

$\sqrt{1+2021\cdot 2023}=\sqrt{1+(2022-1)(2022+1)}=2022$.

G:1185. Demonstrați că pentru $a,b\rangle 0$ **și** $a\cdot b=1$ **are loc inegalitatea** $\sqrt{a+2025b}+\sqrt{b+2025a}\geq 46\sqrt{2}$. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

***Rezolvare*:**

Din $\sqrt{x+y}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}}$, $\forall x,\ y>0$ avem $\sqrt{a+2025b}\geq\frac{\sqrt{a}+45\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{b+2025a}\geq\frac{\sqrt{b}+45\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$

$S\geq\frac{46\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{2}}\overset{MA\geq MG}{\geq}\frac{46\cdot 2\sqrt{ab}}{\sqrt{2}}\overset{\text{cum } a\cdot b=1}{=}46\sqrt{2}$, cu egalitate pentru $a=b$.

G:1186. Se consideră trapezul ABCD cu AB∥CD și punctul O intersecția diagonalelor sale. Se știe că $A_{AOD}+A_{BOC}=OB\cdot OC$. Să se arate că trapezul este ortodiagonal.
Dacă aria trapezului este egală cu 160 cm², să se afle valoarea produsului AC·BD.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Se utilizează faptul că triunghiurile AOD și BOC sunt echivalente: într-devăr, $A_{DAB}=A_{CAB}$, având aceeași bază AB și înălțimile, din D și C egale. Atunci, din $A_{AOD}+A_{AOB}=A_{BOC}+A_{AOB}$, rezultă $A_{AOD}=A_{BOC}$. Acum, $A_{AOD}+A_{BOC}=OB\cdot OC$ se mai scrie $2\cdot A_{BOC}=OB\cdot OC$, sau $A_{BOC}=\frac{OB\cdot OC}{2}$, ceea ce înseamnă $OB\perp OC$, adică trapezul este ortodiagonal.

Aria unui patrulater ortodiagonal este egală cu $A_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}$, de unde $AC\cdot BD=2\cdot 160=320$.

G:1187. Arătați că aria S a unui triunghi de laturi a, b, c și înălțimi h_a,h_b,h_c **este**

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}}}.$$

Oana Preda, **Călina Doina Cristina**, Craiova

Rezolvare: Cum $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c=2S\Rightarrow a=\frac{2S}{h_a},\ b=\frac{2S}{h_b},\ c=\frac{2S}{h_c}$, și

$ab+bc+ca=4S^2\left(\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{h_ch_a}\right)$ de unde se obține relația cerută.

G:1188. Fie ABCD un trapez cu $AD\parallel BC$ **și M mijlocul lui** $[AD]$**. Fie** $\{N\}=BD\cap CM$**. Arătați că** $BC=CN$ **dacă și numai dacă** $AN\perp BD$**.** **Simona Chiriță, Grigorie Dan**, Craiova

Rezolvare:

„$\Rightarrow$" **Fie** $BC=CN$. Atunci, triunghiul BCN este isoscel și $\sphericalangle(NBC)\equiv\sphericalangle(BNC)\equiv\sphericalangle(MND)$.

Cum $AD\parallel BC$ rezultă $\sphericalangle(NBC)\equiv\sphericalangle(BDM)\Rightarrow\Delta MND$ este isoscel cu $MN=MD$. Cum

$AM = MD \Rightarrow NM = \frac{AD}{2}$ adică triunghiul AND este dreptunghic în N. Rezultă $AN \perp BD$ (mediana este jumătate din latura pe care cade).

,,$\Leftarrow$" Fie $AN \perp BD \Rightarrow NM$ este mediană în triunghiul dreptunghic AND. Rezultă $NM = AM = MD \Rightarrow \Delta NMD$ este isoscel. Rezultă $\sphericalangle(MDN) \equiv \sphericalangle(MND) \equiv \sphericalangle(BNC)$ (opuse la vârf). Cum $AD \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle(NDM) \equiv \sphericalangle(NBC) \Rightarrow \sphericalangle(CBN) \equiv \sphericalangle(CNB) \Rightarrow \Delta CBN$ este isocel cu $BC = CN$.

▪ Clasa a VIII-a

G:1189. Numerele reale x și y verifică simultan relațiile: $x^4 + 24y = 6x^3 - y^2 + 119$ **și** $y^4 + 24x = 6y^3 - x^2 - 151$. **Calculați** $x^2 + y^2$. **Dana Camelia, Ramona Nălbaru**, Craiova

Rezolvare: Adunând cele două relații și grupând convenabil obținem: $(x^2 - 3x - 4)^2 + (y^2 - 3y - 4)^2 = 0$. Se obțin soluțiile $x \in \{-1; 4\}$, $y \in \{-1; 4\}$. Convine doar $x = -1, y = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 17$.

G:1190. Fie $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ **care verifică relațiile** $\begin{cases} a^3 - b^3 = x\sqrt{18} + y\sqrt{8} \\ a - b = xy\sqrt{2} \end{cases}$. **Arătați că** $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Știm că $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Din relațiile date în enunț obținem $(xy\sqrt{2})^3 = x \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}y - 3abxy\sqrt{2} \Rightarrow$

$$ab = \frac{3x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}y - x^3y^3 \cdot 2\sqrt{2}}{3xy\sqrt{2}} = \frac{3x + 2y - 2x^3y^3}{3xy} \in \mathbb{Q}$$

G:1191. Arătați că numărul $A = 2023 \cdot 2025^3 - 2024 \cdot 2022^3$ **este cub perfect.**

Carmen Vlad, Mihaela Daianu, Craiova

Rezolvare: Se arată în general că expresia $A = (a+1)(a+3)^3 - (a+2)a^3$, $\forall a \in \mathbb{N}$ este cub perfect. $A = (a+1)(a^3 + 3 \cdot 3a^2 + 3 \cdot 3^2 a + 3^3) - a^4 - 2a^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27 = (2a+3)^3$. Pentru $a = 2022 \Rightarrow A = (2 \cdot 2022 + 3)^3 = 4047^3$.

G:1192. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **ecuația** $4x^2 - y^2 + 2(x^2y^2 - 1) = 2022$

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare: Facem observația că $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$

Ecuația se scrie: $4x^2 + 2x^2y^2 - y^2 - 2 = 2022 \Leftrightarrow 2x^2(2 + y^2) - (2 + y^2) = 2022 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x^2 - 1)(y^2 + 2) = 2022$ .Rezultă $|x| = 13$,$|y| = 2 \Rightarrow \{(-13; -2); (-13; 2); (13; -2); (13; 2)\}$.

G:1193. a) Rezolvați în numere naturale ecuația: $8(7x^2 + y^2) - 7(x - y)^2 = 40484484$**;**

b) Determinați $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$**, pentru care** $8(7x^2 + y^2) - (7x + y)^2$ **este cub perfect.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: a) $(7x + y)^2 = 2022^2 \Rightarrow 7x + y = 2022 \Rightarrow 6x + x + y = 6 \cdot 337 \Rightarrow (x + y) \vdots 6 \Rightarrow x + y = 6k,\ k \in \mathbb{N}$.

După înlocuire se obține $x = 337 - k,\ y = 7x - 337,\ \forall k \in \{49, 50, ..., 337\}$.

b) Din a) rezultă $8(7x^2 + y^2) - (7x + y)^2 = 7(x - y)^2$ este cub perfect dacă $x = mk^3, y = (m-7)k^3,\ m \in \{7; 8; ...\}, k \in \mathbb{N}$.

G:1194. Fie $x \rangle y \rangle 0$ astfel încât $x^{2023}+y^{2023}=x-y$. Arătați că $x^{2022}+y^{2022} \langle 1$.

Simona Chiriță, Ana Jipescu, Craiova

Rezolvare: $\frac{x^{2023}-y^{2023}}{x-y} \langle \frac{x^{2023}+y^{2023}}{x-y} = 1 \Rightarrow \frac{x^{2023}-y^{2023}}{x-y} \langle 1 \Leftrightarrow$

$x^{2022}+y^{2022} \langle x^{2022}+x^{2021}\cdot y+x^{2020}\cdot y^2+...+x\cdot y^{2021}+y^{2022} \langle 1$.

G:1195. Fie $\lambda \geq 0$ fixat. Rezolvați în numere reale $(2\lambda+1)\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=x+2\lambda^2+2\lambda+1$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare: Condiții de existență pentru radical: $x+y\geq 0, x-y\geq 0$.

$\begin{cases}\sqrt{x+y}=a\\ \sqrt{x-y}=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=a^2\\ x-y=b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{a^2+b^2}{2}\\ y=\frac{a^2-b^2}{2}\end{cases}$. Ecuația se scrie: $(2\lambda+1)a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+2\lambda^2+2\lambda+1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-(2\lambda+1)a-2b+4\lambda^2+4\lambda+2=0 \Leftrightarrow (a-2\lambda-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow (a,b)=(2\lambda+1,1)$.

Obținem $\begin{cases}x=\frac{(2\lambda+1)^2+1^2}{2}\\ y=\frac{(2\lambda+1)^2-1^2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\lambda^2+2\lambda+1\\ y=2\lambda^2+2\lambda\end{cases}$. Reciproc $(x,y)=(2\lambda^2+2\lambda+1, 2\lambda^2+2\lambda)$ verifică ecuația. Deducem că $(x,y)=(2\lambda^2+2\lambda+1, 2\lambda^2+2\lambda)$ este soluția unică a ecuației.

G:1196. Dacă $n\geq \frac{1}{4}$ și $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a+b+c\geq 3$ atunci:

$\sqrt{na^2+a+1}+\sqrt{nb^2+b+1}+\sqrt{nc^2+c+1}\geq 3\sqrt{n+2}$.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare. Se aplică inegalitatea $\sqrt{nt^2+t+1}\geq \frac{(2n+1)t+3}{2\sqrt{n+2}}$ pentru $t=a,b,c$ și se adună relațiile.

G:1197. În tetraedrul regulat VABC aflați suma distanțelor de la O (proiecția vârfului pe bază) la fețele acestuia.

Ion Stănescu, Buzău

Rezolvare:

Suma distanțelor este egală cu $3OD=3\cdot\frac{OV\cdot OM}{VM}$, unde D este proiecția lui O pe planul (VBC).

G:1198. Se dă prisma dreaptă din figura alăturată. Determinați volumul prismei știind că aria totală este 3648 cm ^{2}.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Observăm că $(16x)^2+(12x)^2=(20x)^2$, așadar baza este triunghi dreptunghic. $A_t=A_l+2A_b=720x^2+2\cdot 96x^2=912x^2$. Cum aria totală este 3648 cm ^{2} rezultă $912x^2=3648$. Atunci, $x=2\Rightarrow V=A_b\cdot h=11520cm^3$.

G:1199. În tetraedrul regulat ABCD, fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei AD. Știind că MN=$4\sqrt{2}$ cm, să se calculeze aria totală a tetraedrului.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Notăm AB= x. Triunghiul BCN este isoscel, de bază BC. Cum M este mijlocul lui BC, NM este și înălțime. Se aplică teorema lui Pitagora în ΔBMN: BM=$\frac{x}{2}$, iar BN=$\frac{x\sqrt{3}}{2}$ și MN=$4\sqrt{2}$.

Atunci $BN^2-BM^2=MN^2$; $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$; $\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{4}=32$; $\frac{x^2}{2}=32$, de unde x = 8. Aria totală a tetraedrului este $4\cdot\frac{64\sqrt{3}}{4}=64\sqrt{3}$ (cm^2).

G:1200. În tetraedrul $ABCD$ notăm cu E și F proiecțiile punctelor A, respectiv B pe dreapta CD. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, $[AE]\equiv[BF]$ și $MN\perp CD, N\in CD$, arătați că $MN\perp AB$. elev **Gobej Ștefan**, Curtea de Argeș

Rezolvare: Fie $\alpha=(BCD)$ și $\left.\begin{matrix} pr._\alpha A=P \\ pr._\alpha B=B \end{matrix}\right\}\Rightarrow pr._\alpha[AB]=[PB]$

Cum M - mijlocul lui $[AB]$ $\Rightarrow pr._\alpha M=Q$ e mijlocul lui $[PB]$ deducem $PE\perp CD$ (cu reciproca 1 a teoremei celor 3 perpendiculare).
Din $BF\perp CD, PE\perp CD\Rightarrow BFEP$ trapez .

Cum $QN\perp CD$(reciproca 1 a teoremei celor 3 perpendiculare) avem $\left.\begin{matrix} QN\parallel BC\parallel PE \\ Q-mijl.[BP] \end{matrix}\right\}\Rightarrow[QN]$ e linie mijlocie în trapez $\Rightarrow N$ mijlocul $[EF]\Rightarrow[NE]\equiv[NF]$.
$\triangle BFN\equiv\triangle AEN\,(c.c.)\Rightarrow[AN]\equiv[BN]$ deci $\triangle ANB$ isoscel, $[AB]$ bază și $[NM]$ mediană $\Rightarrow NM$ înălțime $\Rightarrow NM\perp AB$

▪ Clasa a IX-a

L:989. Să se determine funcția de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că graficul lui f trece prin punctul $A(0;6)$ și că $f(f(x+1))+f(f(x-1))=8x+36,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Fie $f(x)=ax+b$. **Din** $A(0;6)\in G_f\Rightarrow f(0)=6\Rightarrow b=6$

$f(x+1)=a(x+1)+6,\quad f(x-1)=a(x-1)+6\ \Rightarrow\ \Rightarrow 2a^2x+12a+12=8x+36\Rightarrow a=2\ \Rightarrow f(x)=2x+6$.

L:990. Să se arate că $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=198$.

Elena si Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare:

Se aplică inegalitatea $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ și dând valori lui n de la 1 la 10000 se obține după adunarea relațiilor că $2\left(\sqrt{10001}-1\right)<s<2(100-0)$ adică $[s]=2\cdot 99=198$.

L:991. Să se rezolve ecuația : $\frac{[2x+1]}{[x]+1}+\frac{[x]+1}{[2x+1]}=2, x\in\mathbb{R}_+$

Elena si Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvar: Dacă $\frac{[a]}{[b]}+\frac{[b]}{[a]}=2$ atunci $\frac{([a]-[b])^2}{[a][b]}=0\Rightarrow[a]=[b]$,
deci $[2x+1]=[x]+1\Rightarrow[2x]+1=[x]+1\Rightarrow[2x]=[x]$ cu soluția $0<x<0{,}5$ Atunci $[2x]=[x]=0$.

L:992. **Se consideră numerele reale strict pozitive** $x_1, x_2, ..., x_n$, **astfel încât** $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$. **Demonstrați că** $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n} \le x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Din $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}_{=1}} \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n \ge n \quad (1)$

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$n(x_1 + x_2 + ... + x_n) = (1^2 + 1^2 + ... + 1^2)\left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2}\right)^2 + ... + \left(\sqrt{x_n}\right)^2\right) \ge \left(1\sqrt{x_1} + 1\sqrt{x_2} + ... + 1\sqrt{x_n}\right)^2,$$

deci $n(x_1 + x_2 + ... + x_n) \ge \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n}\right)^2 \quad (2)$

Din (2) și (1) $\Rightarrow \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n}\right)^2 \le n(x_1 + x_2 + ... + x_n) \overset{(1)}{\le} (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$, c.c.t.d..

L:993. **Fie** $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*_+$. **Arătați că**

$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{b+c}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c+d}{c^2 - cd + d^2} + \frac{d+a}{d^2 - da + a^2} \le 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$. **În ce caz avem egalitate** ?

Laura Popescu, Iulian Micu, Craiova

Rezolvare:

Cum $x^2 - xy + y^2 \ge xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ pentru $x, y \rangle 0 \Rightarrow \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \le \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (*) cu egalitate pentru $x = y$. Atunci, aplicând relația (*) pentru fiecare raport obținem cerința problemei. Avem egalitate dacă $a = b, \ b = c, \ c = d, \ d = a \Rightarrow a = b = c = d$

L:994. **Dacă** $a, b, c \rangle 0$ **cu** $a^2 + b^2 + c^2 \le 3$ **atunci** $\frac{a+2b}{2a+b} + \frac{b+2c}{2b+c} + \frac{c+2a}{2c+a} \ge 2(a+b+c) - 3$.

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: $\left(\sum_{cyc} \sqrt{(a+2b)(2a+b)} \cdot \sqrt{\frac{a+2b}{2a+b}}\right)^2 = \left[\sum_{cyc}(a+2b)\right]^2 = 9(a+b+c)^2 \Rightarrow$

$$\sum_{cyc} \left(\sqrt{(a+2b)(2a+b)}\right)^2 \cdot \sum_{cyc} \left(\sqrt{\frac{a+2b}{2a+b}}\right)^2 \ge 9(a+b+c)^2.$$

Cum $\sum_{cyc} \left(\sqrt{(a+2b)(2a+b)}\right)^2 = \sum_{cyc}(a+2b)(2a+b) = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)$.

$\sum_{cyc} \frac{a+2b}{2a+b} \ge \frac{9(a+b+c)^2}{4(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)} \ge 2(a+b+c) - 3$ deoarece $(a+b+c)^2 \ge 6(a+b+c) - 9$ și $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 \le 3$.

L:995. **Dacă** $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$ **atunci,** $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

$$LHS = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \sum x} \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{1+x}} \overset{CBS}{\ge} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum \sqrt{1+x} \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{1+x}} \overset{CS}{\ge} \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 9 = \frac{3\sqrt{3}}{2} = RHS.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=\frac{1}{3}$. Se poate folosi și inegalitatea mediilor.

L:996. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+1=2[y] \\ y^2+1=2[z] \\ z^2+1=2[x] \end{cases}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. **Ionuț Ivănescu**, Craiova

Rezolvare: $[a]\le a \Rightarrow -[a]\ge -a$. Atunci $0=x^2+1-2[y]\ge x^2+1-2y$. Analog și pentru celelalte relații și prin însumarea lor se obține $0\ge (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \Rightarrow x=y=z=1$.

L:997. Să se rezolve sistemul de inecuații $\begin{cases} a^3+4\le 3b+9c \\ b^3+2\le 3c^2 \\ c^3+27\le 3a^2 \end{cases}$ în numere reale pozitive.

Daniel Vacaru, Pitești

Rezolvare:

Din $(a-2)^2\cdot(a+1)\ge 0 \Rightarrow a^3+4\ge 3a^2$, $(b-1)^2\cdot(b+2)\ge 0\Rightarrow b^3+2\ge 3b$, $(c-3)^2\cdot(c+3)\ge 0\Rightarrow c^3+27\ge 3c^2+9c$. Prin adunarea relațiilor se obține că $a^3+b^3+c^3+33\ge 3a^2+3c^2+3b+9c$ iar dacă adunăm relațiile sistemului obținem relația $a^3+b^3+c^3+33\le 3a^2+3c^2+3b+9c$. Prin urmare există egalitate între cei doi termeni și inclusiv la inegalitățile din sistem. Rezultă a = 2, b = 1, c = 3.

Altfel, (**Titu Zvonaru**) se poate folosi inegalitatea mediilor:

$\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}+4\ge 3a^2$, $b^3+1+1\ge 3b$, $\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+9+\frac{c^3}{2}+9+9\ge 3c^2+9c$. etc.

L:998. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{\sin x}$, $2-2^{\sin x+\cos x}$, $2^{\cos x}$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. **Virginia Grigorescu, Daniela Barbu**, Craiova

Rezolvare: Din condițiile problemei obținem $\left(2-2^{\sin x+\cos x}\right)^2=2^{\cos x}\cdot 2^{\sin x}\Leftrightarrow$ $4^{\sin x+\cos x}-5\cdot 2^{\sin x+\cos x}+4=0\Rightarrow$ $y^2-5y+4=0$ cu $y\in\{1;4\}$ unde $y=2^{\sin x+\cos x}\rangle 0$.

Din $2^{\sin x+\cos x}=4\Rightarrow \sin x+\cos x=2$, ecuația nu are soluții deoarece $|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$ și din $2^{\sin x+\cos x}=1\Rightarrow \sin x+\cos x=0\Rightarrow tgx=-1\Rightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

L:999. Arătați că lungimile $a,b,c\rangle 0$ ale laturilor unui triunghi, verifică inegalitatea:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(c-a)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}\ge 3.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

Rezolvări: Inegalitatea dată este echivalentă cu

$\frac{a^2}{(a-b+c)(a+b-c)}+\frac{b^2}{(b-c+a)(b+c-a)}+\frac{c^2}{(c+b-a)(c+a-b)}\ge 3$. Cum într-un triunghi avem $a\langle b+c$ și analoagele, atunci notăm cu $x=-a+b+c\rangle 0$ și analoagele $y=a-b+c\rangle 0$, $z=a+b-c\rangle 0$.

Inegalitatea dată devine $\frac{\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}{yz}+\frac{\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}{xz}+\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{xy}\ge 3\Leftrightarrow$

$(x+y)^2z+(y+z)^2x+(z+x)^2y\ge 12xyz$, adevărată cu $(x+y)^2z\ge 4xyz$ și analoagele.

L:1000. Să se arate că în orice triunghi cu lungimile laturilor a, b, c are loc inegalitatea:
$\left(\frac{1}{a^2}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{b^2}+2\right)\cdot\left(\frac{1}{c^2}+2\right)\geq\frac{9}{R^2}$. **D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București, **Ionel Tudor**, Călugăreni

Rezolvare: Folosim inegalitatea $(x^2+2)\left(y^2+2\right)(z^2+2)\geq 3(x+y+z)^2,\ x,y,z\rangle 0$ (HOJO LEE), pentru $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ și inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$ (Constantin – Ionescu –Țiu).

L:1001. Să se arate că în triunghiul ascuțitunghic ABC, are loc relația:
$\sum_{cyc}\frac{9a^3b^3c^3}{b^2+c^2-a^2}\geq 2s\left[8F(R+r)\right]^2$ **, unde F reprezintă aria triunghiului ABC**.

Florică Anastase, Lehliu-Gară

Rezolvare:

Presupunem că $a\geq b\geq c$, atunci $\begin{cases}\sin A\geq\sin B\geq\sin C\\ \frac{1}{\cos A}\geq\frac{1}{\cos B}\geq\frac{1}{\cos C}\end{cases}$. Aplicăm inegalitatea lui Cebâșev

$$tgA+tgB+tgC\geq\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)=\frac{1}{3}\sum\sin A\cdot\frac{\sum\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

Cunoaștem că $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}$, $\frac{1}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}\geq 8$ și $tgA=\frac{4F}{b^2+c^2-a^2}$

$$\sum_{cyc}\frac{4F}{b^2+c^2-a^2}\geq\frac{8s}{3R}\cdot\sum\cos A\cos B\geq\frac{8s}{9R}(\cos A+\cos B+\cos C)^2\Leftrightarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{9\cdot 4F}{b^2+c^2-a^2}\geq 8s\cdot\left(1+\frac{r}{R}\right)^2\Leftrightarrow\ \sum_{cyc}\frac{9\cdot abcR^2}{b^2+c^2-a^2}\geq 8s\cdot\left(R+r\right)^2,\text{ c.c.t.d.}$$

L:1002. Să se arate că în orice triunghi are loc dubla inegalitate:

$$3\leq\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\leq\sqrt{\frac{4R+r}{r}}.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Pentru prima parte a dublei inegalități, avem:

$$\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}\cdot\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}\cdot\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}}=3\cdot\sqrt[6]{\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}}=3\cdot\sqrt[6]{\frac{S^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot\frac{abc}{8S^2}}=3\cdot\sqrt[6]{\frac{R}{2r}}\geq 3,$$

(I. Euler) iar pentru partea a doua avem:

$$\left(\left(\sqrt{r_a}\right)^2+\left(\sqrt{r_b}\right)^2+\left(\sqrt{r_c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{h_a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{h_a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{h_a}}\right)^2\right)\overset{Cauchy-Schwarz}{\geq}\left(\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq\left(\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\right)^2\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$(4R+r)\cdot\frac{1}{r}\geq\left(\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{r_a}{h_a}}+\sqrt{\frac{r_b}{h_b}}+\sqrt{\frac{r_c}{h_c}}\leq\sqrt{\frac{4R+r}{r}},\text{ unde}$$

$(*): r_a+r_b+r_c=4R+r, \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral.

L:1003. În triunghiul ABC cu punctele $M\in[BC],\ N\in[CA],\ P\in[AB]$ **au loc relațiile**

$\frac{AB^2}{MC}+\frac{AC^2}{MB}\le\frac{(AB+AC)^2}{BC}$ **respectiv** $\frac{BC^2}{NA}+\frac{BA^2}{NC}\le\frac{(BC+BA)^2}{AC}$ **și** $\frac{AC^2}{PB}+\frac{AB^2}{PC}\le\frac{(AC+AB)^2}{BC}$

Stabiliți cine sunt punctele *M, N, P*? Sunt dreptele *AM, BN, CP* concurente? Dacă da, ce reprezintă punctul de intersecție al acestora? Caracterizați vectorial punctul de intersecție obținut.

Elena Codeci, Daniel Codeci, Daniel Văcaru, Pitești

***Rezolvare*:** Inegalitatea adevărată întotdeauna, conform inegalității Cauchy – Buniakowski – Schwartz este $\frac{AB^2}{MB}+\frac{AC^2}{MC}\ge\frac{(AB+AC)^2}{BC}$. Deducem că avem proporționalitatea $\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{MC}\Leftrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{MB}{MC}$. Așadar, *M* este piciorul bisectoarei din *A*.

Analog *N* este piciorul bisectoarei din *B*, iar *P* este piciorul bisectoarei din *C*.

Utilizând teorema lui Ceva, deducem concurența dreptelor *AM*, *BN*, *CP*.

▪ Clasa a X-a

L:1004. a) Dacă $m\rangle n\ge 2$ **sunt numere naturale, să se scrie numărul** $\left(m^2+n^{10}\right)\cdot\left(n^2+m^{10}\right)$ **ca sumă a două pătrate perfecte. b) Descompuneți în factori primi numărul** $(2^6+3^6)^2+(6^5-6)^2$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Rezolvare: Considerăm numerele complexe $z_1=m^5+ni$ **și** $z_2=n^5+mi$. Avem $z_1\cdot z_2=(mn)^5-mn+(m^6+n^6)i$ și din egalitatea $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ rezultă $\sqrt{m^{10}+n^2}\cdot\sqrt{n^{10}+m^2}=\sqrt{\left[(mn)^5-mn\right]^2+(m^6+n^6)^2}$, Ridicând la puterea a doua se obține cerința

b) În a) se ia m = 2 și n = 3.

L:1005. Rezolvați în $\mathbb{R}_+$ **ecuația** $3^{4\cdot\log_3^2 x}=27x$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: Logaritmăm ecuația în baza 3: $\log_3\left(3^{4\cdot\log_3^2 x}\right)=\log_3(27x)\Rightarrow$

$4\cdot\log_3^2 x=\log_3 3^3+\log_3 x\Rightarrow$ Notăm $\log_3 x=t\Rightarrow 4\cdot t^2+t-3=0\Rightarrow t\in\left\{-\frac{3}{4};1\right\}\Rightarrow$

$\log_3 x=1\Rightarrow x=3$ și $\log_3 x=-\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}$.

L:1006. Fie $x,y,z\rangle 0$. **Arătați că** $(x^2y^2+1)(y^2z^2+1)(z^2x^2+1)\left(\frac{1}{(x+y)^4}+\frac{1}{(y+z)^4}\frac{1}{(z+x)^4}\right)\ge\frac{81}{64}$.

D.M. Bătinețu- Giurgiu, București**, Ionel Tudor**, Călugăreni

Rezolvare: Conform inegalității lui Arkady M. Alt avem $\prod_{ciclic}(u^2+t^2)\ge\frac{3}{4}t^4\left(u+v+w\right)^2,\ \forall t,u,v,w\rangle 0.$

$\prod_{ciclic}(u^2+1)\ge\frac{3}{4}\left(u+v+w\right)^2,\ \forall u,v,w\rangle 0.$ Pentru $u=xy,\ v=yz,\ w=zu$ obținem

$\prod_{ciclic}(x^2y^2+1)\ge\frac{3}{4}\left(xy+yz+zx\right)^2,\ \forall x,y,z\rangle 0.$ Atunci,

$$\prod_{ciclic}(x^2y^2+1)\cdot\sum_{ciclic}\frac{1}{(x+y)^4}\ge\frac{3}{4}\left(xy+yz+zx\right)^2\cdot\sum_{ciclic}\frac{1}{(x+y)^4}\ge\frac{81}{64}$$

deoarece s-a folosit inegalitatea J. Chen: $(xy+yz+zx)\cdot\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4},\ \forall x,y,z\rangle 0$

L:1007. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ **.**

Calculați $f\left(\frac{9}{2}\right)$ **Demonstrați că** $\operatorname{Im} f=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$**.**

Ciobîcă Constantin; Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

Rezolvare:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\sqrt{\frac{2x+2\sqrt{2x-1}}{2}}=\sqrt{\frac{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2}}.$$

Analog, $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}$. Atunci,

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4x-2}\Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right)=\sqrt{4\cdot\frac{9}{2}-2}=\sqrt{18-2}=\sqrt{16}=4$$

Se arată că funcția $f:[1,+\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{4x-2}$ este strict crescătoare

$\Rightarrow \operatorname{Im} f=[f(1),+\infty)=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

L:1008. Demonstrați că $\log_9 14<\sqrt{(\log_7 11)\cdot(\log_7 12)}$ **fără a utiliza tabelele de logaritmi.**

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Prin ridicare la pătrat obținem $\underbrace{\frac{\log_9 14}{\log_7 11}}_{=f_1}<\underbrace{\frac{\log_7 12}{\log_9 14}}_{=f_2}$. Vom demonstra că $f_1<1$ și $f_2>1$. (R_1)

Cum $f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}$, facem observația: $\log_{\frac{14}{9}}7<\log_{\frac{14}{9}}9\Leftrightarrow\log_7\frac{14}{9}>\log_9\frac{14}{9}$ (R_2).

Dar $\frac{14}{9}<\frac{11}{7}\Rightarrow\log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{11}{7}$ și folosind (R_2) obținem

$\log_9\frac{14}{9}<\log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{11}{7}\Leftrightarrow\log_9 14-1<\log_7 11-1\Rightarrow\log_9 14<\log_7 11\Rightarrow f_1=\frac{\log_9 14}{\log_7 11}<1$ și prima inegalitate din (R_1) este demonstrată.

Pentru a doua inegalitate din (R_1) observăm $\frac{12}{7}>\frac{14}{9}\Leftrightarrow\log_7\frac{14}{9}<\log_7\frac{12}{7}\Leftrightarrow\log_{\frac{14}{9}}7>\log_{\frac{12}{7}}7$ și

(R_2) se completează $\log_7\frac{12}{7}>\log_7\frac{14}{9}>\log_9\frac{14}{9}\Leftrightarrow\log_7 12-1>\log_9 14-1\Rightarrow\log_7 12>\log_9 14\Rightarrow$

$\Rightarrow f_2=\frac{\log_7 12}{\log_9 14}>1$ și problema este demonstrată.

L:1009. Să se arate că în triunghiul ABC are loc relația $\left(\frac{AG}{bc}\right)^3+\left(\frac{BG}{ca}\right)^3+\left(\frac{CG}{ab}\right)^3\geq\frac{1}{9R^3}$**.**

Marin Chirciu, Pitești

***Rezolvare*:** Folosind $AG=\frac{2}{3}m_a$ inegalitatea se scrie

$$\left(\frac{2m_a}{3bc}\right)^3+\left(\frac{2m_b}{3ca}\right)^3+\left(\frac{2m_c}{3ab}\right)^3\ge\frac{1}{9R^3}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{2m_a}{3bc}\right)^3\ge\frac{1}{9R^3}\Leftrightarrow\sum\left(\frac{m_a}{bc}\right)^3\ge\frac{3}{8R^3}.$$

Lema: In ΔABC - $\sum\left(\frac{m_a}{bc}\right)^3\ge\frac{3}{8R^3}$.

<u>Demonstrație</u> $\sum\left(\frac{m_a}{bc}\right)^3\overset{Bergstrom}{\ge}\frac{\left(\sum\frac{m_a}{bc}\right)^3}{9}\ge\frac{\left(\frac{3}{2R}\right)^3}{9}=\frac{3}{8R^3}$. (Ineg. Radon)

Am folosit: <u>Lema</u> In ΔABC $\sum\frac{m_a}{bc}\ge\frac{3}{2R}$.

<u>Demonstrație</u> $\sum\frac{m_a}{bc}\overset{Tereshin}{\ge}\sum\frac{\frac{b^2+c^2}{4R}}{bc}=\frac{1}{4R}\sum\frac{b^2+c^2}{bc}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{1}{4R}\sum 2=\frac{1}{4R}\cdot 6=\frac{3}{2R}$.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

L:1010. Să se rezolve ecuația: $a\left(\sin x_1\ln(\sin x_1)+\sin x_2\ln(\sin x_2)+.....+\sin x_n\ln(\sin x_n)\right)$ $=(1-\sin x_1)(1+a\sin x_1)+(1-\sin x_2)(1+a\sin x_2)+.....+(1-\sin x_n)(1+a\sin x_n)$**, unde** $a\rangle 0$**.**

Gheorghe Ghita, Buzău

Rezolvare: Ecuația are sens pentru $\sin x_k\rangle 0,\ k=\overline{1;n}$.

$$a\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k+\sin x_k\ln(\sin x_k)\right)=\sum_{k=1}^{n}(a\sin x_k-\sin x_k)+n.$$

Fie $f(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+a\ln x,\ a\rangle 0$, strict crescătoare și $g:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=a-1+\frac{1}{x}$ strict descrescătoare. Cu ajutorul monotoniei obținem: $f(y_k)\le f(1)=a=g(1)\le g(y_k)$, $k=\overline{1;n}$. Avem egalitate pentru $y_k=1,\ k=\overline{1;n}$.

Atunci, $ay_k+a\ln y_k\le a-1+\frac{1}{y_k}\Leftrightarrow ay_k\ln y_k\le(1-y_k)(1+ay_k)\ k=\overline{1;n}$. După înlocuirea lui y_k și însumarea relațiilor obținem $a\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\cdot\ln(\sin x_k)\le\sum_{k=1}^{n}(1-\sin x_k)(1+a\sin x_k)$ cu egalitate pentru $y_k=1,\ k=\overline{1;n}$. Adică când $\sin x_k=1,\ k=\overline{1;n}$. Ecuația are soluțiile $x_1=x_2=...=x_n=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

▪ Clasa a XI-a

L:1011. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}}\frac{x^2-3x}{2}\cdot\left[\frac{3}{x^2-4x+3}\right]$**,** $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ **unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\frac{3}{x^2-4x+3}-1\langle\left[\frac{3}{x^2-4x+3}\right]\le\frac{3}{x^2-4x+3}\Big|\cdot\frac{x^2-3x}{2}.$$ Cum $\frac{x^2-3x}{2}\langle 0,\ \forall x\in(0;3)$ rezultă

$$\frac{3x(x-3)}{2(x-1)(x-3)}\le\frac{x^2-3x}{2}\cdot\left[\frac{3}{x^2-4x+3}\right]\langle\ \frac{x(4-x)x(x-3)}{(x-1)(x-3)\cdot 2}$$

$$\frac{3x}{2(x-1)}\le\frac{x^2-3x}{2}\cdot\left[\frac{3}{x^2-4x+3}\right]\langle\ \frac{x(4-x)x}{(x-1)\cdot 2}.$$

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}}\frac{3x}{2(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\langle 3}}\frac{x(4-x)x}{2(x-1)}=\frac{9}{4}$ rezultă că limita cerută este egală cu $\frac{9}{4}$.

L:1012. Construiți o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care este de 2022 ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ și nu este de 2023 de ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare: Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^{2023},\ x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$ este continuă și derivabilă de 2022 de ori peste $\mathbb{R}$. Cum $f^{(2022)}(x)=\begin{cases}2022'x,\ x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$, iar această funcție este continuă pe $\mathbb{R}$, dar nu este derivabilă în $x=0$, deci nu e derivabilă de 2023 de ori peste $\mathbb{R}$.

L:1013. Fie $\lambda\ge 2$ fixat. Dacă $a,b,c>0, a+b+c=3$ atunci să se găsească minimul expresiei $E=2\lambda\left(\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\right)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

Folosim următoarea **Lemă:** **Dacă** $0<a<3$ **atunci** $2\lambda\cdot\frac{a}{3-a}-a^2\ge\frac{(3\lambda-4)a+2-\lambda}{2}$.

Demonstrație

Fie funcția $f:(0,3)\to\mathbf{R}$ $f(x)=2\lambda\cdot\frac{x}{3-x}-x^2$ în $x_0=1$. Avem $f(1)=\lambda-1$.

Ecuația tangentei în punctul $x_0=1$ este $y-(\lambda-1)=\frac{3\lambda-4}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{(3\lambda-4)x+2-\lambda}{2}$.

Arătăm că: $f(x)=2\lambda\cdot\frac{x}{3-x}-x^2\le\frac{(3\lambda-4)x+2-\lambda}{2}\Leftrightarrow 2x^3+(3\lambda-10)x^2+(14-6\lambda)x+3\lambda-6\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)^2(2x+3\lambda-6)\ge 0$, care rezultă din condiția din ipoteză $\lambda\ge 2$, cu egalitate pentru $x=1$.

Să trecem la rezolvarea problemei din enunț.

Folosind **Lema** obținem:

$$E=\sum\left(2\lambda\cdot\frac{a}{15-a}-a^2\right)\overset{Lema}{\ge}\sum\frac{(3\lambda-4)a+2-\lambda}{2}=\frac{(3\lambda-4)\sum a+3(2-\lambda)}{2}=$$

$$=\frac{(3\lambda-4)\cdot 3+3(2-\lambda)}{2}=3(\lambda-1).$$ Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$.

Deducem că $\min E=3(\lambda-1)$ pentru $(a,b,c)=(1,1,1)$.

L:1014. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$, ecuația $\sqrt[5]{x^2+7}+\sqrt[5]{x^2+218}=x$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Rezolvare: Evident, $x\rangle 0$. Se arată că ecuația are soluția unică 5.

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[5]{x^2+7}+\sqrt[5]{x^2+128}-x$ care este derivabilă cu derivata

$f^I(x)=\dfrac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2+7)^4}}+\dfrac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2+128)^4}}-1,\forall x\rangle 0.$ Se arată că $\dfrac{x}{\sqrt[5]{(x^2+7)^4}}\langle 1;\ \dfrac{x}{\sqrt[5]{(x^2+128)^4}}\langle 1$ adică

$f^I(x)\langle 0,\ \forall x\rangle 0$, deci f(x) este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$. Rezultă că ecuația dată are cel mult o soluție, adică x = 5 este soluție unică.

L:1015. Fie $k\rangle\ 0$ și $a,b,c\rangle\ 0$ astfel încât $a+b+c=ab+bc+ac$. Să se arate că
$(b+c)\sqrt{ka^2+2ka+k+1}+(c+a)\sqrt{kb^2+2kb+k+1}+(a+b)\sqrt{kc^2+2kc+1}\ge 6\sqrt{4k+1}$.

Gheorghe Ghita, Buzău

Rezolvare: $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{kx^2+2kx+k+1}$,

$f^I(x)=\dfrac{k(x+1)}{\sqrt{kx^2+2kx+k+1}},\qquad f^{II}(x)=\dfrac{k}{\sqrt{(kx^2+2kx+k+1)^2}}\rangle 0\Rightarrow$ f este convexă.

Avem: $\sum(b+c)\sqrt{ka^2+2ka+k+1}=\sum(b+c)f(a)=2(a+b+c)\sum\frac{b+c}{2(a+b+c)}f(a)\overset{f\ convexă}{\geq}$

$2(a+b+c)f\left(\sum\frac{b+c}{2(a+b+c)}a\right)=2(a+b+c)f\left(\sum\frac{ab+ac}{2(a+b+c)}\right)=$

$2(a+b+c)f\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}\right)\overset{\sum a=\sum ab}{=}2(a+b+c)f(1)=2(a+b+c)\sqrt{4k+1}=$

$2\sqrt{4k+1}\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}\overset{\sum a=\sum ab}{=}2\sqrt{4k+1}\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=2\sqrt{4k+1}\frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum ab}\overset{\sum a^2\geq\sum ab}{\geq}6\sqrt{4k+1}.$

▪ Clasa a XII-a

L:1016. Fie mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{R}\ si\ a^2\neq b^2\right\}$. Determinați subgrupurile finite ale grupului $(G,\cdot)$ unde " $\cdot$" este înmulțirea matricelor. elev **Ionuț Florin Voinea**, București

Rezolvare:

Se știe că subgrupurile finite sunt părțile stabile ale lui G în raport cu operația de înmulțire pe G.

Dacă $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\in G$, folosind metoda inducției matematice obținem că

$A^n=\begin{pmatrix}\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}&\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}\\\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}&\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}\end{pmatrix},\ \forall n\ge 1.$ Fie $H\neq\varnothing,\ H\subset G$ o parte stabilă finită și

$A\in H$. Atunci $\{A;A^2;...;A^n;...\}\subset H$ și cum H-finită, rezultă că există $i,j\in\mathbb{N}^*,\ i\langle j$ astfel încât $A^i=A^j$. Cum $\det A=a^2-b^2\neq 0$, obținem că matricea A este inversabilă și din $A^i=A^j$ se obține că $A^{j-i}=I_2$. Deci există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k=I_2\Rightarrow\ (a+b)^k+(a-b)^k=1$ și $(a+b)^k-(a-b)^k=0$.

Astfel, obținem că $a+b=\pm 1$ și $a-b=\pm 1$ cu $a\neq\pm b$ de unde

$A=\left\{I_2;-I_2,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$. Se verifică ușor că părțile stabile finite căutate sunt

$\{I_2\},\{I_2;-I_2\},\left\{I_2;\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},\left\{I_2;\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ și $\left\{I_2;-I_2;\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$.

L:1017. Determinați polinoamele $P\in\mathbb{C}[X]$ astfel încât $P(2023x)=2022P(x)+x$, $\forall x\in\mathbb{C}$ și $P(1)=1$. **Ana Jipescu, Mihaela Daianu**, Craiova

Rezolvare:

$x=1\Rightarrow P(2023)=2023$, $x=2023\Rightarrow P(2023^2)=2023^2$; $x=2023^2\Rightarrow P(2023^3)=2023^3$, prin inducție se arată că $P(2023^k)=2023^k$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Fie $\mathbb{Q}\in\mathbb{C}[X]$ cu Q = P-X se constată că are o infinitate de rădăcini 1, 2023, 2023^2, …, 2023^k prin urmare este polinom identic nul, deci P(X)=X, singura soluție a problemei.

L:1018. Se consideră ecuația $x^4-6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=0$. Arătați că ecuația nu are nicio rădăcină reală și rezolvați ecuația în numere complexe. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Dacă ecuația ar avea o soluție reală x atunci $\bar{x}=x$ și din

$\overline{x^4-6ix^2+8i\sqrt{i}x+3}=x^4-6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=0$ rezultă

$\overline{x^4}-6\bar{i}x^2+8\bar{i}\sqrt{\bar{i}}x+3=0\Rightarrow x^4+6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=0$. (1). Din (1) și relația din enunț rezultă

$x^4+6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=x^4-6ix^2+8i\sqrt{i}x+3=0$ adică $4x\sqrt{i}\left(3\sqrt{i}x+2-2i\right)=0\Rightarrow x=0\in\mathbb{R}$ dar care nu verifică ecuația și $3\sqrt{i}x+2-2i=0\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{2}}{3}i\notin\mathbb{R}$. (S-a folosit $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$). Deci rădăcinile ecuației sunt toate complexe nereale.

Cu notațiile $m=\sqrt{i}\neq 0$ și $t=\frac{x}{m}$ ecuați adată devine $t^4+6t^2+8t-3=0$ cu soluțiile

$t_1=t_2=t_3=1,\ t_4=-3$ adică $x\in\left\{\sqrt{i};-3\sqrt{i}\right\}$. Cum $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ putem scrie

$x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}i}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}$. Ecuația nu are rădăcini pur complexe conjugate două câte două deoarece ecuația nu are toți coeficienții numere reale.

L:1019. Fie funcția f: [0 ;∞)→ R ; f(x) = $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$. Determinați primitiva funcției f știind că graficul primitivei trece prin punctul A(9;10) și arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe [0; ∞) **Nica Silvioara Minodora**, Buzău

Rezolvare: f (x) = $\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}=\left|\sqrt{x}-1\right|=\begin{cases}\sqrt{x}-1;x\in[1;\infty)\\1-\sqrt{x};x\in[0;1)\end{cases}$

F(x)= $\begin{cases}\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}-x+c_1, daca\ x\geq 1\\ x-\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+c_2, daca\ x\in[0;1)\end{cases}$ F primitivă a funcției f $\Rightarrow$F derivabilă $\Rightarrow$Fcontinuă

$\Rightarrow c_1-\frac{2}{3}=c_2$, F(x)=$\begin{cases}\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}-x+k; daca\ x\geq 1\\ x-\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+k-\frac{2}{3}; daca\ x\in[0;1)\end{cases}$ F (9)=10 $\Rightarrow$ k=1

Deci F(x)= $\begin{cases} \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}-x+1, daca\ x\geq 1 \\ x-\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{3}, daca\ x\in[0;1) \end{cases}$

Fie F o primitivă a funcției f pe [0; ∞) $\Rightarrow F'(x)=$ f(x)= $\left|\sqrt{x}-1\right|\geq 0;(\forall)x\in[0;\infty)\Rightarrow$

F este funcție crescatoare pe [0; ∞) .

L:1020. **Să se calculeze** $\int_0^1 \frac{x^2-2x+4}{(x^2+4)^2\cdot e^{-x}+e^x}dx$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare:

$$\int_0^1 \frac{(x^2-2x+4)\cdot e^x}{(x^2+4)^2+e^{2x}}dx=\int_0^1 \frac{\frac{(x^2-2x+4)\cdot e^x}{(x^2+4)^2}}{\frac{(x^2+4)^2+e^{2x}}{(x^2+4)^2}}dx=\int_0^1 \frac{\left(\frac{e^x}{x^2+4}\right)^I}{1+\left(\frac{e^x}{x^2+4}\right)^2}dx=arctg\frac{e^x}{x^2+4}\Big|_0^1=arctg\frac{e}{5}-arctg\frac{1}{4}.$$

L:1021. **Fie** $f,g:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ **indefinit derivabile,** $g^{II}(0)\neq 0$ **și notăm pentru fiecare** $n\in\mathbb{N}^*$**;**

$a_n=4n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^3)dt-4f(0),\ \ b_n=4n^4\int_0^{\frac{1}{n}} g(t^3)dt-4n^3g(0)-g^I(0).$ **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ **.**

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Vom calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3a_n}{n^3b_n}$ folosind în mod repetat **regula lui L`Hospital.**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\left(\frac{4}{x^4}\int_0^x f(t^3)dt-\frac{4}{x^3}f(0)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{4\int_0^x f(t^3)dt-4xf(0)}{x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{4f(x^3)-4f(0)}{4x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{12x^2f^I(x^3)}{12x^2}=f^I(0)$$

așadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3a_n\right)=f^I(0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\left(\frac{4}{x^7}\int_0^x g(t^3)dt-\frac{4}{x^6}g(0)-\frac{1}{x^3}g^I(0)\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{4\int_0^x f(t^3)dt-4xf(0)}{x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{4g(x^3)-4g(0)-4x^3g^I(0)}{7x^6}=$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\rangle 0}}\frac{12x^2g^I(x^3)-12x^2g^I(0)}{42x^5}=....=\frac{2}{7}g^{II}(0)$, așadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3b_n\right)=\frac{2}{7}g^{II}(0)$. În final $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{7f^I(0)}{2g^{II}(0)}$.

L:1022. **Calculati** $\int(x+2)\cdot\left(6^x+6^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{x}{3}}+....+6^{\frac{x}{20}}\right)dx, x\in\mathbb{R}$.

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare:

$$f'(x)=6^x+6^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{x}{3}}+...+6^{\frac{x}{20}}\Rightarrow f(x)=\int\left(6^x+6^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{x}{3}}+...+6^{\frac{x}{20}}\right)dx=$$

$$f(x)=\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{2}{\ln 6}\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+\frac{20}{\ln 6}\cdot 6^{\frac{x}{20}}=\frac{1}{\ln 6}\cdot\left(6^x+2\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+20\cdot 6^{\frac{x}{20}}\right)$$

$g(x)=x+2\Rightarrow g'(x)=1$. Aplicăm (f.i.p.):

$$I=(x+2)\cdot\frac{1}{\ln 6}\cdot\left(6^x+2\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+20\cdot 6^{\frac{x}{20}}\right)-\frac{1}{\ln 6}\cdot\int\left(6^x+2\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+20\cdot 6^{\frac{x}{20}}\right)dx=$$

$$=(x+2)\cdot\frac{1}{\ln 6}\cdot\left(6^x+2\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+20\cdot 6^{\frac{x}{20}}\right)-\frac{1}{\ln^2 6}\cdot\left(6^x+2^2\cdot 6^{\frac{x}{2}}+...+20^2\cdot 6^{\frac{x}{20}}\right)+c$$

L:1023. **Calculati.** $\int x\cdot[\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)]dx, x>0$

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare: $f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}$

$$g(x)=\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)\Rightarrow g'(x)=\frac{2}{2x}+\frac{4}{4x}+...+\frac{10}{10x}==\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x}}_{de\ 5\ ori}=\frac{5}{x}.$$

Aplicăm (f.i.p): $\frac{x^2}{2}\cdot[\ln(2x)+\ln(4x)+...+\ln(10x)]-\frac{5}{4}\cdot x^2+c=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(2^5\cdot 5!\cdot x^5)-\frac{5}{4}\cdot x^2+c$

L:1024. **Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)}{2(\sin x\cdot\cos x-1)}dx$.

Adrian Stan, Buzău, **Radu Diaconu,** Sibiu

Rezolvare:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)}{2(1-\sin x\cdot\cos x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cdot\cos x)-(\sin x+\cos x)}{2(1-\sin x\cdot\cos x)}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{2(1-\sin x\cdot\cos x)}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x)}dx=$$

$$=1-arctg(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-arctg1+arctg(-1)=1-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=1+\frac{\pi}{2}.$$

L:1025. **Să se calculeze** $\int\frac{x^{4n}-1}{x^{n+1}\sqrt{x^{4n}+x^{3n}-x^n+1}}dx,\ x\rangle 0$.

Gheorghe Ghită, Buzău

Rezolvare:

$$I=\int\frac{(x^{2n}-1)(x^{2n}+1)}{x^{2n+1}\cdot\sqrt{x^{2n}+x^n-\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}}}dx=\int\frac{x^n(x^n-\frac{1}{x^n})x^{n+1}(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n+1}})}{x^{2n+1}\cdot\sqrt{\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2+x^n-\frac{1}{x^n}+2}}dx=$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{(x^n-\frac{1}{x^n})(x^n-\frac{1}{x^n})^I}{\sqrt{\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2+x^n-\frac{1}{x^n}+2}}dx.$$ Notăm $x^n-\frac{1}{x^n}=t\Rightarrow dx=\left(nx^{n-1}+\frac{n}{x^{n+1}}\right)dt\Rightarrow$

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{t}{\sqrt{t^2+t+2}}dt=\frac{1}{2n}\int\frac{2t+1-1}{\sqrt{t^2+t+2}}dt=\frac{1}{n}\sqrt{t^2+t+2}-\frac{1}{2n}\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+2}\right)+C.$$

$$I=\frac{\sqrt{x^{4n}+x^{3n}-x^n+1}}{4x^n}-\frac{1}{2n}\ln\frac{2x^{2n}+x^n-2+\sqrt{x^{4n}+x^{3n}-x^n+1}}{x^n}+C$$

L:1026. Se definește integrala având limita superioară infinită prin egalitatea: $\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. **Să se calculeze integrala:** $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^5}dx$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

Rezolvare: Notăm: $I=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^5}dx$. Integrala se poate calcula folosind integrarea prin părți, adaptată situației din problema noastră (limita superioară de integrare tinde la infinit).

Utilizăm formula cunoscută: $\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

Avem: $u=\ln(1+x)$; $dv=\frac{1}{(x+1)^5}dx$; $du=\frac{1}{1+x}dx$; $v=-\frac{1}{4(x+1)^4}$

Deci: $I=-\frac{1}{4}\left(\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^4}\right)\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^5}dx$ Deoarece $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^4}=0\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^5}dx$.

Pentru a calcula această integrală folosim primitiva funcției de sub semnul integrală.

$$\int\frac{1}{(x+1)^5}dx=-\frac{1}{4(x+1)^4}+C=F(x)+C$$

Utilizăm formula Leibniz-Newton adaptată situației din problema noastră (limita superioară de integrare tinde la infinit). $\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^5}dx=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)=\frac{1}{4}$

Rezultă valoarea integralei din enunțul problemei: $I=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{(x+1)^5}dx=\frac{1}{16}$ Astfel, problema este rezolvată.

Observație

Integrala se mai poate calcula folosind primitiva funcției de integrat din enunțul problemei (formula Leibniz-Newton) adaptată situației din problema noastră (limita superioară de integrare tinde la infinit).

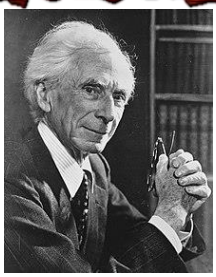
L:1027. Să se calculeze $\int_0^1\frac{e^x(x-1)}{e^{2x}+x^2}dx$. **Adrian Stan, Stefan Pirlog**, Buzău

Rezolvare:

$$\int_0^1\frac{2e^x(x-1)}{2(e^{2x}+x^2)}dx=\int_0^1\frac{2xe^x-2e^x}{(e^x+x)^2+(e^x-x)^2}dx=\int_0^1\frac{\dfrac{(e^x-x)^I\cdot(e^x+x)-(e^x-x)(e^x+x)^I}{(e^x+x)^2}}{\dfrac{(e^x+x)^2+(e^x-x)^2}{(e^x+x)^2}}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{\left(\dfrac{e^x-x}{e^x+x}\right)^I}{1+\left(\dfrac{e^x-x}{e^x+x}\right)^2}dx=arctg\,\frac{e^x-x}{e^x+x}\Bigg|_0^1=arctg\,\frac{e-1}{e+1}-arctg1=arctg\,\frac{e-1}{e+1}-\frac{\pi}{4}.$$

„Întreaga problemă a lumii noastre este că proștii și fanaticii sunt foarte siguri pe ei, în timp ce înțelepții au întodeauna îndoieli."
Bertrand Russell
(1872- 1970)



4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1201. Arătați că nu există un număr de patru cifre $\overline{abcd}$ astfel încât $\overline{abcd} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$.
Cornelia Neacșu, Laura Zaharia, Craiova

G:1202. Arătați că numărul a = 4 094 552^n + 2023^{n+1} – 2024^n – 2023, n $\in N^*$, este compus.
Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1203. Functia Smarandache este definită astfel: S(n) este cel mai mic numar întreg m astfel încât factorialul său m! se divide la n. (Exemplu: S(6) = 3 deoarece 3! = 1·2·3 = 6, iar 6 se divide la 6, iar 3 este cel mai mic cu aceasta proprietate, deoarece 2! = 1·2 = 2 nu se divide la 6.)
Sa se calculeze S(7) si S(8).
Nicolae Ivaschescu, Canada

G:1204. Se consideră un număr natural $\overline{abc}$ scris în baza 10.
Care din cele trei cifre trebuie suprimată astfel încât numărul obținut să fie de 11 ori mai mic decât $\overline{abc}$? În cazul când b=3, să se afle numerele $\overline{abc}$.
Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1205. Determinați raportul cu cea mai mare valoare, format dintr-un număr natural de 3 cifre, scris în baza 10 și suma cifrelor sale.
Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1206. Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n! se divide cu n+1.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n! nu se divide cu n+1.
($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n,\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0! = 1$). **Mihaela Dăianu**, Craiova

G:1207. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = n! - 39$ să fie pătrat perfect ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*,\ 0! = 1$). **Alexie Elena**,Craiova

G:1208. Să se determine mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \ \middle| \ \overline{ab} = a + bc^c \right\}$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

G:1209. Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $\varphi(n) = \frac{2n}{5}$, unde $\varphi(n)$ reprezintă indicatorul lui Euler (numărul de numere prime cu n și mai mici decât n).
Simona Chiriță, Cârcea, **Ginela Dobrică**, Bechet

G:1210. Să se arate că dacă numerele $2 + \overline{ab}$ și $2 \cdot \overline{ab}$, sunt răsturnate unul celuilalt, atunci numărul $\overline{ab}$, este număr prim. **Ionel Tudor,** Călugăreni , Giurgiu

G:1211. Dacă $A = \underbrace{333.....333}_{2021\ de\ 3}$ și $A = \underbrace{666.....666}_{2021\ de\ 6}$, determinați a 2022-a cifră numărând de la stânga și a 2022-a cifră numărând de la dreapta în produsul $A \cdot B$. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:1212. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $A = 28^n + 19^n + 10^n + 3^{n+1} + 5$ să fie pătrat perfect **Veronica Popescu** ,Craiova

G:1213. Arătați ca există o scriere a numărului 2022 ca sumă a unui număr minim de numere naturale nenule și ca produsul acelor numere naturale. **Ionel Tudor**, Călugăreni**,** Giurgiu

G:1214. Reconstituiți înmulțirea $p^q \cdot \overline{pq} \cdot \overline{nn} = \overline{pmpr}$ știind că p, q, r sunt consecutive.

Nicolae Ivășchescu, Canada

▪ Clasa a VI-a

G:1215. Un număr natural n împărțit la 7 dă restul 3, iar împărțit la 4 dă restul 1. Ce rest se obține la împărțirea lui n la 28? **Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1216. Arătați că ecuația $8x^2 - 5y^2 = 7$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Ileana Stanciu, Craiova

G:1217. Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea $1 + 2^{3n} + 3^{3n} \le 6^{3n}$. **Constantin Nicolau** , Curtea de Argeș

G:1218. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \cdot S(n) = n + 2023$ unde S(n) reprezintă suma cifrelor numărului natural n. **Grigorie Dan**,Craiova

G:1219. Determinați primele 605 zecimale după virgulă ale numărului $\frac{1}{2^{2022}}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1220. Câte numere naturale sunt divizibile cu 2022 și au exact 2022 divizori naturali ?

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin și **Neculai Stanciu,** Buzău

G:1221. Determinați numărul natural $\overline{a(a-4)(a-3)}$ știind că el este egal cu cubul sumei cifrelor sale. **Nicolae Ivășchescu,** Canada

G:1222. Arătați că ecuația $y^2 = 25x^2 + 26$ nu are soluții numere întregi.

elevi **Mușat Horia, Vlad Oroviceanu**, Craiova

G:1223. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + py + p = xy + (2p+1)x$, unde p este un număr prim dat.

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1224. Se consideră mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 17\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid (n-22) \vdots 23\}$. Arătați că $2023 \in A \cap B$. **A**flați câte numere naturale mai mici decât 10000 se găsesc în mulțimea $A \cap B$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1225. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Să se determine numerele a, b, c știind că: $2^a + 2^{b+1} + 2^{c+2} = 56$. **Lăzărescu Dragoș, Ovidiu Țâțan**, Râmnicu Sărat

G:1226. În triunghiul ΔABC se cunosc AB=7cm și AC=4cm. Perpendiculara dusă prin mijlocul D al lui BC , pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, intersectează această bisectoare , în punctul M. Dacă $AB \cap DM = \{E\}$ și $AC \cap DM = \{F\}$ să se calculeze BE și AF.

Ionel Tudor , Călugăreni, Giurgiu

G:1227. Fie **ABCD** un dreptunghic cu $AB = l,\ BC = 2l$ și M un punct în interiorul său astfel încât $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle MBA) = 15^0$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului MCD.

Dan Grigorie, Lucian Tuțescu - Craiova

▪ Clasa a VII-a

G:1228. Să se afle numerele naturale x, y și z ($z \neq 0$), știind că $\frac{29}{6} = \frac{xyz + x + z}{yz + 1}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1229. Să se arate că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{11}$ este irațional.

Radu Diaconu, Sibiu

G:1230. Fie $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $(2023 + \sqrt{q})(2023 + \sqrt{q+1})$ este număr rațional. Arătați că q = 0.

Lavinia Trincu, Craiova

G:1231. Determinați numerele prime p astfel încât numărul

$A = 5^{p^3} + 7^{p^3} + 9^{p^3} + 11^{p^3} + 13^{p^3} + 15^{p^3} + 17^{p^3}$ să se dividă cu p. **Grigorie Dan**,Craiova

G:1232. Să se calculeze media geometrică a numerelor

$a = \sqrt{(2 + 4 + 6 + 8 + ... + 4044) + 2023}$ și $b = 6 \cdot \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{48 - 24\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 7}$.

Adrian Stan, Buzău

G:1233. Rezolvați în $\mathbb{Z}$, inecuațiile a) $(x+1)^2 \leq 3 \leq (x+2)^2$, b) $(x+2)^2 \leq 3 \leq (x+1)^2$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1234. Aflați cifra x știind că: $\overline{1,1(x)} + \overline{2,2(x+1)} + \overline{3,3(x+2)} + \overline{4,4(x+3)} + \overline{5,5(x+4)} = \overline{16,7(x)}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1235. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+x} = \frac{2023}{1012}$

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1236. Arătați că dacă x, y sunt numere naturale nenule care respectă relația

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2022}$, atunci $A = \sqrt{\left(\frac{x}{6} - 337\right)\left(\frac{y}{6} - 337\right)}$ este număr natural.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1237. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = p^2 - 1$ unde p este un număr prim.

Gheorghe Ghiță , Buzău

G:1238. Pentru un număr $k \in \mathbb{N}^*$ să se calculeze diferența $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)$ și suma $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$. Deduceți formula pentru suma pătratelor primelor n numere naturale nenule:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1239. Determinați aria trapezului $ABCD$ cu laturile paralele AB și CD de lungimi 15 și 30 și laturile AD și BC de lungimi 9 și 12.

Neculai Stanciu, Buzău

G:1240. Într-un triunghi oarecare ABC ,înălțimea [AN], $N \in (BC)$

se prelungește cu $[ND] \equiv [AN]$ iar mediana $[AM]$, $M \in (BC)$ se prelungește cu $[ME] \equiv [AM]$.

Să se arate că :

a) Patrulaterul ABDM este un deltoid convex

b) Patulaterul BCED este trapez isoscel. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VIII-a

G:1241. Fie ecuația $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.
a) Arătați că ecuația nu are soluții numere naturale;
b) Găsiți relațiile în numere întregi ale ecuației.

Răzvan Lupu, Roxana Vasile, Craiova

G:1242. Demonstrați că
$(x-y)^{2023}(x-z)^{2023} + (y-x)^{2023}(y-z)^{2023} + (z-x)^{2023}(z-y)^{2023} \geq 0, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1243. Pentru $a,b,c \rangle 0$, $\sqrt{abc} \rangle 3$, calculați $\frac{1}{\sqrt{abc}-3} \cdot \sqrt{\frac{abc+9}{a} - 6 \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}}}$. **Adrian Stan**, Buzău

G:1244. Descompuneți în factori numărul 454950. Arătați că numărul $m = 1 + 674^{2023} + 674^{2024}$ este divizibil cu 454951 **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

G:1245. Se consideră ecuația $x^3 + 10x^2 - 80x - 801 = 0$. Arătați că orice soluție reală a ecuației este mai mică decît 9. Rezolvați ecuația. **Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

G:1246. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ nu toate egale astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = (px + qy + rz)^2 + (qx + ry + pz)^2 + (rx + py + qz)^2$. Arătați că dacă $p + q + r = 1$ atunci $pq + qr + rp = 0$. **Grigorie Dan**, Craiova

G:1247. Dacă x este un număr real, atunci aflați cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia $E(x) = \frac{x^2 + 2023}{\sqrt{x^2 + 2022}}$. **Neculai Stanciu,** Buzău

G:1248. Demonstrați inegalitatea $\frac{5a}{3(2b+3c)} + \frac{5b}{3(3a+2c)} + \frac{5c}{3(2a+3b)} \geq 1, \ \forall a,b,c > 0$.

Neculai Stanciu, Buzău

G:1249. Demonstrați că dacă $a \in [-21,21], b \in [-8,8], c \in [-1,1]$, atunci:
$$(a+21)^2 + (b+8)^2 + (c+1)^2 \leq 2024.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1250. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul
$$\begin{cases} x^5 - y^4 = 2022 \cdot 2023^4 \\ y^5 - x^4 = 2022 \cdot 2023^4 \end{cases}$$
eleve **Viespescu Carina Maria** , București, **Zetu Caterina** , București

G:1251. Determinați numerele reale x astfel încât expresia $\frac{x}{x^2 - 3x + 5}$ să fie număr întreg.

Eleve **Viespescu Carina, Militaru-Cismaru Gabriela,** Craiova

G:1252. Considerăm numerele $a,b \rangle 0$. Arătați că are loc inegalitatea $\frac{9a^2 + 4b^2}{36} + \frac{4a^2 + 9b^2}{6ab} \rangle \frac{ab}{3} + 2$

Constantin Nicolau , Curtea de Argeș

G:1253. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (-1;1)$; $n \geq 2$ astfel încât $n \in \mathbb{N}$ $\frac{x_1^{2023}}{x_2} + \frac{x_2^{2023}}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}^{2023}}{x_n} + \frac{x_n^{2023}}{x_1} = 0$
a) Pentru n = 2024 dați exemple de astfel de numere
b) Arătați că n este număr natural divizibil cu 4. **Grigorie Dan Lucian,.Lupu Răzvan**, Craiova

G:1254. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{n+1}{2(n+2)} \le \frac{1}{n+1\cdot 2}+\frac{2}{n+2\cdot 3}+\frac{3}{n+3\cdot 4}+....+\frac{n}{n+n\cdot(n+1)} \le \frac{n(n^2+5)}{2(n+2)^2},\ \forall n \ge 1.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

G:1255. Într-o piramidă patrulateră regulată VABCD se dau AB = $4\sqrt{6}$, VO (înălțimea piramidei) = 8, M = mijlocul lui VA, N = mijlocul lui VC. Aflați aria triunghiului BMN.

Ion Stănescu, Buzău

G:1256. În prisma triunghiulară regulată ABCA`B`C` toate muchiile sunt congruente între ele și se notează cu M mijlocul muchiei A`B`.
Să se calculeze valoarea sinusului unghiului C`BM.
Dacă aria triunghiului C`BM este egală cu $2\sqrt{15}$ cm^2, să se afle aria laterală a prismei.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

▪ Clasa a IX-a

L:1028. Demonstrați că nu există numere raționale a și b astfel încât $a^b = 2$.

Oprescu Cristina Diana, Ploiești

L:1029. Fie $x, y, z \in \mathbb{R},\ x, y, z \rangle\ 2023$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{2023}$. Să se arate că $\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-2023}+\sqrt{y-2023}+\sqrt{z-2023}$.

Adrian Stan, Buzău

L:1030. Fie $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R},\ a_1 \ne a_2$ și $a_2 \in \mathbb{R}$. Dacă rădăcinile ecuației $(x-a_1)(x-a_2)=a$ sunt $b_1,\ b_2 \in \mathbb{R},\ si\ b_1 \ne b_2$ aflați rădăcinile ecuației $(x+b_1)(x+b_2)=-a$.

Doina Calina, Mihaela Nascu, Craiova

L:1031. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x-1$. Rezolvați inecuația $f(f(x)) \le 0$.

Lavinia Trincu, Monica Matei, Craiova

L:1032. Fie $a_1,\ a_2,....,a_n \in \mathbb{R}$ strict pozitive cu $a_1\cdot\ a_2\cdot....\cdot a_n = 1,\ (n \ge 2)$. Aflați minimul expresiei

$$E = a_1+a_2+...+a_n+\frac{a_1^{\ 6}}{a_1^{\ 4}+1}+\frac{a_2^{\ 6}}{a_2^{\ 4}+1}+.....+\frac{a_n^{\ 6}}{a_n^{\ 4}+1}.$$

Constantina Prunaru, Luiza Cremeneanu, Craiova

L:1033. a) Arătați că nu există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)\cdot f(y)+f(x+y)+x+y=0,\ \forall x, y \in \mathbb{R};$$

b) Găsiți $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\cdot f(y)+f(x+y)=x+y+xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

Gigi Zaharia, Doina Calina, Craiova

L:1034. Fie $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, astfel încât $x+y+z=a$ și $x^3+y^3+z^3=a^3$. Demonstrați că $x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}=a^{2023}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

L:1035. Fie $0\langle a_1 \le a_2 \le ..... \le a_n,\ n \ge 3$ cu $a_2a_{n-1}+a_3a_{n-2}+...+a_na_1=n-1$. Să se arate că $a_2+a_3+...+a_n \ge n-1$.

Emil C. Popa, Sibiu

L:1036. Fie $b_n=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+.....+\frac{1}{p^n}, n\in N^*$, unde p- număr natural nenul. Să se arate că :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{p^k-1}{p^{k+1}-1}\cdot p\cdot b_{k+1}>\frac{n}{p^n}$, $p\neq 1$ iar dacă $p=1$ atunci $\sum_{k=1}^{n}\frac{p^{k-1}+p^{k-2}+.....+p+1}{p^k+p^{k-1}+.....+p+1}\cdot p\cdot b_{k+1}=\frac{n(n+1)}{2}$

Constantin și Elena Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

L:1037. Dacă $x,y,z>0$, $xyz=x+y+z+2$ atunci să se arate că $xy+yz+zx\geq 12$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1038. Arătați că numărul $8\cdot 2^{2023}+15\cdot 3^{578}\cdot 5^{1156}$ este divizibil cu 23.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

L:1039. Se consideră ecuația $6x^3-5mx^2+(m^2+3)x-m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Determinați m și rezolvați ecuația astfel încât toate rădăcinile să fie reale. Arătați că ecuația nu poate avea toate rădăcinile numere întregi. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:1040. Dacă $ABCD$ este un patrulater convex cu $AD=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt[4]{5}$, iar O este un punct interior astfel încât $OA\perp OB$, $OC\perp OD$, $OA=OB=1$, $OC=OD$, atunci aflați OC .

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:1041. Fie triunghiul ΔABC în care AM - mediană , BD - bisectoare . Să se arate că :

$\overline{AM}+\overline{BD}=-\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}+\frac{a+3c}{2(a+c)}\cdot\overline{AC}$. (a=BC,b=AC,c=AB). **Constantin și Elena Ciobîcă**, Fălticeni

L:1042. Considerăm un triunghi ABC cu $A,B,C\in\left(0^0;120^0\right]$. Să se arate că

$$S\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\min\left(\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}},\ \frac{1}{b^{-2}+c^{-2}},\ \frac{1}{c^{-2}+a^{-2}}\right).$$

Emil C. Popa, Sibiu

L:1043. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}>3$.

(Notațiile fiind cele cunoscute). **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

L:1044. Într-un triunghi arbitrar de laturi a,b,c notăm cu m_a,h_a lungimile medianei , respectiv înălțimii aferente laturii a, e.t.c . Presupunând că laturile triunghiului verifică inegalitatea $a\geq b\geq c$, demonstrați că : $\frac{m_b}{h_b}+1\geq\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_c}{h_c}$. **Vasile Jiglău**, Arad

L:1045. Fie $a,b,c\rangle 0$ astfel încât $abc=k^3$, $k\rangle$ 0. Să se arate că $\sum\frac{a^n+b^n}{c^{n-1}}\geq\sqrt{k^{3n}}\sum\frac{1}{\sqrt{a^{8n-2}}}+3k$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1046. Demonstrați egalitatea: $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{9}}-\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{9}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

▪ Clasa a X-a

L:1047. Fie p un număr prim. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor $a=(p-1)!+1$ și $b=\left((p-1)!\right)!+1$. **Meda Iacob**, Craiova

L:1048. Determinați cel mai mic număr natural nenul n astfel încât $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$, $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ și $\sqrt[7]{\frac{n}{7}}$ să fie numere raționale. **Ana Dumitru, Dan Grigorie**, Craiova

L:1049. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2} \rangle 5-x$.

Eugenia Turcu, Carmen Terheci, Craiova

L:1050. Fie $f:[1;8]\to\mathbb{R},\ f(x)=(\log_2 x)^2\cdot\left[(\log_2 x-2)\cdot(\log_2 x-3)+\log_2\frac{8}{x}\right]$. Să se determine valoarea lui x pentru care f să aibă valoarea maximă. **Adrian Stan,** Buzău

L:1051. Fie $n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 4$. Să se determine numerele reale $x,y,z\in[1;\infty)$ știind că

$$\sqrt{a_1}+\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[4]{a_3}+....+\sqrt[n]{a_{n-1}}+\sqrt[n+1]{\frac{1}{a_{n-1}}}\leq n,\text{ unde } a_n=\frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^k+y^k+z^k},\ k=\overline{1,n-1}.$$

Emil C. Popa, Sibiu

L:1052. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $4^x-2\cdot 5^{2x}\langle 10^x$. elev **Bianca Negreț**, Craiova

L:1053. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{x}{x^2+4}=4^{x^4-8\cdot x^2+15}$ b) $\frac{x}{x^2+3}=4^{x^4-10\cdot x^2+8}$ **Ovidiu Țâțan,** Râmnicu Sărat

L:1054. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} x+\sqrt[3]{y}=2\\ y+\sqrt[3]{z}=2\\ z+\sqrt[3]{x}=2\end{cases}$.

Matei Monica, Gigi Zaharia,Craiova

L:1055. Determinați toate tripletele (x,y,z) de numere reale astfel încât:

$$\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{15+y}=\sqrt[4]{2-y}+\sqrt[4]{15+z}=\sqrt[4]{2-z}+\sqrt[4]{15+x}=3.$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:1056. Să se arate că în triunghiul ΔABC are loc relația:

$$\frac{16}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^4\leq\sum\left(\frac{bc}{m_bm_c}\right)^2\leq\frac{4}{3}\left(\frac{3R^2}{r^2}-\frac{6R}{r}+4\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

L:1057. Rezolvați ecuația: $\sin 3x+2\cos 2x+3\sin x+4=0$. **Popescu Delia**, Craiova

L:1058. Rezolvați ecuația $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$.

Ginela Dobrică , Bechet

L:1059. Fie $a>0, a\neq 1$. Rezolvați ecuația $x^{3+\log_a x}<a^2x^2$.

Iacob Meda, Vlad Carmen, Craiova

L:1060. Fie $a\rangle 1$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică proprietatea $f(a^x)+f(a^{2x})+f(a^{4x})+f(a^{8x})=f(a^3),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Verificați dacă funcția f este injectivă.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

L:1061. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}\setminus\{0;1;2\}$, ecuația $tg^2\frac{\pi}{2(n-1)}+tg^2\frac{5\pi}{2(n-1)}=2n$

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

L:1062. Să se rezolve ecuația $x^a - x^b = x^c$, unde $a = \dfrac{lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\log_3 2}$, $b = \dfrac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log_2 3-1}$, $c = \dfrac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2\log_6 3-2\log_6 2}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a XI-a

L:1063. Fie $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale astfel încât $x^{a_1 x} + x^{a_2 x} + ... + x^{a_n x} \geq n \cdot x^n$, $\forall x \rangle 0$. Arătați că $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$.

Dorina Goiceanu, Elena Alexie, Craiova

L:1064. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ care comută între ele astfel încât $\det\left(A^2 - xAB - xyBC + 2yAC + x^2B^2 + y^2C^2\right) = 0$, atunci $\det\left(A + xB + yC\right) = 3\det(a - xB + yC)$

Gheorghe Ghiță, Buzău

L:1065. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = -2$. Arătați că $\det(A^2 - 2I_2) + \det(A^2 - A + 2I_2) = 14$.

Radu Diaconu, Sibiu

L:1066. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $Tr(AB) = Tr(AB)^2$. Să se arate că egalitatea $(AB)^k = I_2$ este imposibilă, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Radu Diaconu, Sibiu

L:1067. Să se compare numerele $a = \left(\dfrac{19}{9}\right)^9$ și $b = \left(\dfrac{21}{11}\right)^{11}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1068. Determinați o soluție rațională a ecuației $36^x - 9^x - 4^x = \dfrac{4}{3} \cdot x$. Arătați că ecuația $36^x \cdot \ln 36 - 9^x \cdot \ln 9 - 4^x \cdot \ln 4 = \dfrac{4}{3} \cdot x$ are o singură soluție reală, care aparține intervalului (0,1).

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1069. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt două șiruri de numere reale cu termeni pozitivi definite de $a_0 = b_0 = 1$ și de recurențele $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = (n^2 + n + 1)a_n + b_n$, $a_1 = b_0 = 1$, $\forall n \geq 1$, atunci calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n}{(na_1) \cdot (na_2) \cdot ... \cdot (na_n)}}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

L:1070. Fie $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f(nx)}{x^2} = \dfrac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(3x)}...\sqrt[2n+1]{f(nx)}}{x^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1071. Dacă $n > 1$ este un număr natural, atunci demonstrați că există $c \in (0,1)$ astfel încât $\left[\dfrac{c}{1} + \dfrac{c^2}{2} + ... + \dfrac{c^{n-1}}{n-1}\right] = 0$, unde am notat cu [x] partea întreagă a numărului real x.

Marius Drăgan, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a XII-a

L:1072. Să se calculeze integrala $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2 + 4 \cdot x + 8} dx$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:1073. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ care verifică condițiile:
a) $f(x)\cdot F(4-x)=x-6$; b) $f(2)=1$, unde F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}_+^*$.

Adrian Stan, Ștefan Pîrlog, Buzău

L:1074. Se consideră funcția $f_n:[n,+\infty)\to R;\ f_n(x)=\sqrt{n+\sqrt{2nx-n^2}}+\sqrt{n-\sqrt{2nx-n^2}};\forall n\geq 1$.

Arătați că: $\int_n^{2n} f_n(x)dx=\frac{n\sqrt{n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$

Demonstrați că $\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{2}\left(9-\sqrt{3}\right)$,unde $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$

Constantin și Elena Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

L:1075. Să se demonstreze că polinomul $P(x)=(x-1)^2\cdot(x-6)^2+1$ nu se poate descompune într-un produs de două polinoame cu coeficienți numere întregi. **Radu Diaconu**, Sibiu

L:1076. Să se arate că dacă într-un inel A avem $x^{24}=x,\ \forall x\in A$ atunci:
a) $x^2=x,\ \forall x\in A$; b) inelul A este comutativ. **Radu Diaconu**, Sibiu

L:1077. Fie matricea $A(a)=\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{1}\\ \bar{2} & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_6)$ și mulțimea $M=\left\{a\in\mathbb{Z}_6 \middle| A(a)\ \textit{este inversabilă}\right\}$.

Determinați mulțimea M. Rezolvați în $M_2(\mathbb{Z}_6)$ ecuația $A(1)\cdot X\cdot A(3)=A(5)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1078. Se consideră ecuația $4x^4-8(m+1)x+4m^2+8m+5=0,\ m\in\mathbb{R}$. Arătați că pentru orice m real , ecuația nu are toate rădăcinile reale. Aflați rădăcinile reale ale ecuației.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1079. Fie funcția $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ a\langle b$ continuă pe $[a;b]$. Să se arate că există $c\in(a;b)$ astfel încât $a\int_b^c f(x)dx+b\int_a^c f(x)dx=c(a+b-2c)f(c)$. **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Știați că ...

…….în teza sa de doctorat din 1905, **Dimitrie Pompeiu** s-a ocupat cu studiul funcțiilor analitice, construind o funcție derivată care oscilează pe anumite intervale și se anulează pe altele, fără a fi identic nulă și pe care a denumit-o "funcție Köpcke" după numele matematicianului A. Köpcke care între anii 1887- 1899 a avut ideea construirii celor dintâi funcții derivabile în orice punct și care oscilează în orice interval.

Mai mult, în 1907 a publicat un material în "Mathematische Annallen" în care a construit o clasă de funcții continue, strict crescătoare, cu derivată mărginită și ale cărei zerouri formează o mulțime densă. Sesizând originalitatea autorului român față de noua clasă de funcții, diferită de cea a lui Köpcke, matematicienii Ernest Hobson și James Pierpont le-au denumit **funcții Pompeiu** rămânând astfel cu această denumire în cultura matematică.

„ It is better to solve one problem five different ways, than to solve five problems one way."

George Polya
(1887 - 1985)

5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before March 01, 2024.

PROPOSALS – QUICKIES

Q93. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. Prove that in all triangle ABC with usual notations, holds the following inequality: $\sum \frac{m_a^{k+1}}{m_b + m_c - m_a} \geq \sum m_a^k$ for all $k \in N$.

Q94. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Find $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+1)!!)^b} - \sqrt[n]{(n!)^a((2n-1)!!)^b}\right)$, where $a+b=1$.

Q95. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that the equation $2010^n + 2038^n = 2024^n$ doesn't have solutions in positive integers for $n > 2$.

Q96. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that the equation $x^4 + y^4 + z^4 = 2u^2$ has infinite solutions in positive integers.

Q97. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ and $a_1 + a_2 + ... + a_n = S$, then prove that

$$\left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}} + \left(a_1^{a_2} a_2^{a_3} ... a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}} + ... + \left(a_1^{a_n} a_2^{a_1} ... a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}} \leq S.$$

Q98. Proposed by Rovsen Pirkuliyev, Azerbaijan. Prove that in all triangle ABC (with usual notations) holds the following inequality: $\sum \left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^2 \geq \frac{1}{R^2}$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q88. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.
If $a \geq 1$ then prove that $\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3 + \left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3 \geq 2$. When does the equality holds ?

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. Using AM – GM, we obtain

$\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3 + \left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3 \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}} \cdot \sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3} = 2$. The equality holds if and only if $\frac{a}{[a]} = \frac{[a]}{a} \Leftrightarrow a = [a]$, hence a is a positive integer.

Solution 2 by Daniel Văcaru, Pitești, Romania. $\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3=\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}+\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)\left(\frac{a}{[a]}+\frac{[a]}{a}-1\right)$, so by $a+\frac{1}{a}\ge 2, \forall a>0$ it follows that $\sqrt{\frac{a}{[a]}}+\sqrt{\frac{[a]}{a}}\ge 2$ and $\frac{a}{[a]}+\frac{[a]}{a}-1\ge 1$. Hence,

$$\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3=\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}+\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)\left(\frac{a}{[a]}+\frac{[a]}{a}-1\right)\ge 2\cdot 1=2.$$

Solution 3 by author. Lemma. If $x,y>0$ then $\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2\ge\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3$.

Proof. $\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2\ge\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^6-2x^4y^2+4x^3y^3-3x^2y^4+y^6\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^4+2x^3y+2xy^3+y^4\right)\ge 0$, with equality when $x=y$.

Using Lemma for $(x,y)=\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}},\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)$ we obtain:

$$LHS=\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^3}{2}\right)^2\overset{Lema}{\ge}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{[a]}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{[a]}{a}}\right)^2}{2}\right)^3=\left(\frac{\frac{a}{[a]}+\frac{[a]}{a}}{2}\right)^3\overset{(1)}{=}\left(\frac{2}{2}\right)^3=1=RHS,$$

$\frac{a}{[a]}+\frac{[a]}{a}\ge 2$, with equality for $a=[a], a\ge 1\Leftrightarrow a\in\mathbf{N}^*$. So, we have equality for $a\in\mathbf{N}^*$.

Also solved by Rovsen Pirguliyev, Sumgait City, Azerbaijan.

Q89. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that in any triangle ABC is true the following inequality: $\frac{m_a^2}{h_a^2}+\frac{m_b^2}{h_b^2}+\frac{m_c^2}{h_c^2}\le\frac{3R^4}{16r^4}$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. By the well-known inequality of Panaitopol $\frac{m_a}{h_a}\le\frac{R}{2r}$, it suffices to prove that $\frac{3R^2}{4r^2}\le\frac{3R^4}{16r^4}\Leftrightarrow 2r\le R$, which is Euler's inequality.

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania. *Lemma.* In all triangles ΔABC holds:

$$\sum\frac{m_a^2}{h_a^2}=\frac{p^2\left(p^2+10r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{8p^2r^2}.$$

Proof. $\sum\frac{m_a^2}{h_a^2}=\sum\frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}{\frac{4S^2}{a^2}}=\frac{1}{16S^2}\sum a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)=\frac{1}{16S^2}\left(4\sum b^2c^2-\sum a^4\right)=$

$=\frac{p^2\left(p^2+10r^2-8Rr\right)+r^2\left(4R+r\right)^2}{8p^2r^2}$. We used:

$\sum b^2c^2 = p^4 + p^2\left(2r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R+r\right)^2$ and $\sum a^4 = 2p^4 - 2p^2\left(8Rr + 6r^2\right) + 2r^2\left(4R+r\right)^2$.

We we prove the following $\frac{m_a^2}{h_a^2} + \frac{m_b^2}{h_b^2} + \frac{m_c^2}{h_c^2} \le \frac{3R^2}{4r^2} \overset{Euler}{\le} \frac{3R^4}{16r^4}$, which is stronger that the given inequality.

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a^2} = \frac{p^2\left(p^2 + 10r^2 - 8Rr\right) + r^2\left(4R+r\right)^2}{8p^2r^2} = \frac{1}{8r^2}\left[p^2 + 10r^2 - 8Rr + \frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{p^2}\right] \overset{Gerretsen}{\le}$$

$$\overset{Gerretsen}{\le} \frac{1}{8r^2}\left[4R^2 + 4Rr + 3r^2 + 10r^2 - 8Rr + \frac{r^2\left(4R+r\right)^2}{\frac{r\left(4R+r\right)^2}{R+r}}\right] = \frac{4R^2 - 3Rr + 14r^2}{8r^2} \overset{Euler}{\le} \frac{6R^2}{8r^2} = \frac{3R^2}{4r^2}.$$

Equality holds iff triangle is equilateral.

Solution 3 by author. Using Chebyshev' s inequality to (m_a^2, m_b^2, m_c^2) and $\left(\frac{1}{h_a^2}, \frac{1}{h_b^2}, \frac{1}{h_c^2}\right)$ we deduce that

$$\frac{m_a^2}{h_a^2} + \frac{m_b^2}{h_b^2} + \frac{m_c^2}{h_c^2} \le \frac{1}{3}\sum m_a^2 \sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\sum a^2 \sum \frac{1}{h_a^2} \overset{Leibniz}{\le} \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} 9R^2 \sum \frac{1}{h_a^2} =$$

$$= \frac{9R^2}{4}\sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{9R^2}{4}\cdot\frac{\sum a^2}{4S^2} \overset{Leibniz}{\le} \frac{9R^2}{4}\cdot\frac{9R^2}{4S^2} = \frac{81R^4}{16S^2} = \frac{81R^4}{16p^2r^2} \overset{Mitrinovic}{\le} \frac{81R^4}{16r^2}\cdot\frac{1}{27r^2} = \frac{3R^4}{16r^4}.$$

Also solved by Rovsen Pirguliyev, Sumgait City, Azerbaijan.

Q90. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania. If $x, y, z > 0$, then prove that in any triangle ABC with area F holds the inequality $\frac{x+y}{z}a + \frac{y+z}{x}ab + \frac{z+x}{y}bc^2 \ge 8\sqrt{3}F$.

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. Using AM – GM inequality and item 4.14 from O. Bottema, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969, we obtain

$$\frac{x+y}{z}a + \frac{y+z}{x}ab + \frac{z+x}{y}bc^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}(abc)^2} \ge 3\sqrt[3]{8\left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3} = 8\sqrt{3}F.$$

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

$$LHS = \frac{x+y}{z}a + \frac{y+z}{x}ab + \frac{z+x}{y}bc^2 \overset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\frac{x+y}{z}a\cdot\frac{y+z}{x}ab\cdot\frac{z+x}{y}bc^2} =$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}a^2b^2c^2} \overset{Cesaro}{\ge} 3\sqrt[3]{8a^2b^2c^2} = 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \overset{Carlitz}{\ge} 6\cdot\frac{4F}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}F = RHS.$$

We used: $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right) \ge 8xyz$, $\left(Cesaro\right)$ and $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge \frac{4F}{\sqrt{3}}$, $\left(Carlitz\right)$.

The equality holds if the triangle is equilateral and $x = y = z$.

Also solved by Rovsen Pirguliyev, Sumgait City, Azerbaijan.

Solution 3 by author. $\frac{x+y}{z}a + \frac{y+z}{x}ab + \frac{z+x}{y}bc^2 \ge \frac{2\sqrt{xy}}{z}a + \frac{2\sqrt{yz}}{x}ab + \frac{2\sqrt{zx}}{y}bc^2 =$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}a + \frac{\sqrt{yz}}{x}ab + \frac{\sqrt{zx}}{y}bc^2\right) \ge 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{xy}}{z}a\cdot\frac{\sqrt{yz}}{x}ab\cdot\frac{\sqrt{zx}}{y}bc^2} = 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \overset{Carliz}{\ge}$$

$$\overset{Carliz}{\ge} 2\cdot 4\sqrt{3}F = 8\sqrt{3}F.$$

Q91. Proposed by Dorin Mărghidanu, Corabia, Romania. If $a,b,c>0$, then prove that

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\geq 1.$$

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. Using the known inequality $9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$, Nesbitt's inequality and AM – GM inequality, we obtain $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\geq$

$$\geq\frac{8}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\right)\geq$$

$$\geq\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{3\big(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\big)+6abc}{3(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania. The inequality is equivalent to $\prod\left(a^2+b^2+c(a+b)\right)\geq\prod(a+b)^2$. Since $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$ it suffices to prove that :

$$\prod\left(\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)\right)\geq\prod(a+b)^2\Leftrightarrow\prod\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\geq\prod(a+b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\prod(a+b+2c)\geq 8\prod(a+b)\Leftrightarrow 2\sum a^3+7\sum ab(a+b)+16abc\geq 16abc+8\sum ab(a+b)\Leftrightarrow$$

$2\sum a^3\geq\sum ab(a+b)$, which yields from $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ by summing.

The equality occurs if and only if $a=b=c$.

Solution 3 by author. We have successively using QM-AM, respectively AM-GM inequalities:

$$\prod\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)=\prod\frac{a^2+b^2+c(a+b)}{(b+c)(c+a)}\overset{QM-AM}{\geq}\prod\frac{\frac{1}{2}(a+b)^2+c(a+b)}{(b+c)(c+a)}=$$

$$=\prod\frac{(a+b)(a+b+2c)}{2(b+c)(c+a)}=\prod\frac{(a+b)\big[(a+c)+(b+c)\big]}{2(b+c)(c+a)}\overset{AM-GM}{\geq}\prod\frac{(a+b)\sqrt{(a+c)(b+c)}}{(b+c)(c+a)}=$$

$=\prod\frac{a+b}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}=1$. Equality occurs if $a=b=c$.

Also solved by Rovsen Pirguliyev, Sumgait City, Azerbaijan.

Q92. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. Solve for real numbers the equation

$$x^5+6^x+\log_6(x^5+6x)=x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x+\log_6(x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x).$$

Solution 1 by Titu Zvonaru, Comănești, Romania. Using the fact that the function $f(t)=\log_6 t+t$ is strictly increasing, so injective on R_+^*, we obtain $x^5+6^x=x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x\Leftrightarrow(2^x-x^2)(3^x-x^3)=0$.

Using „Lambert W function" we obtain that the equation $x^2=2^x$ has the solutions $x_1=2,x_2=4,x_3=-0{,}76666469$, but for the last solution $x^5+6^x<0$. If we consider the function $f(t)=\frac{\ln t}{t}$, we deduce that for $t>e$ this function is monotone, so injective. Then the equation $x^3=3^x$ has an unique solution $x=3$. Hence we obtain the solutions: $x_1=2,x_2=3,x_3=4$.

Solution 2 by Marin Chirciu, Pitești, Romania and author. Using the fact that the function $f(t)=\log_6 t+t$ is strictly increasing, so injective on R_+^*, we obtain $x^5+6^x=x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 2^x\Leftrightarrow(2^x-x^2)(3^x-x^3)=0\Rightarrow x_1=2,x_2=3,x_3=4$.

Also solved by Rovsen Pirguliyev, Sumgait City, Azerbaijan.

„Este adevărat că un matematician care nu are ceva de poet în el, nu va fi niciodată un matematician perfect.”
Karl Weierstrass
(1815 - 1897)

6. Caleidoscop matematic

Metagramă
xxOxxxx

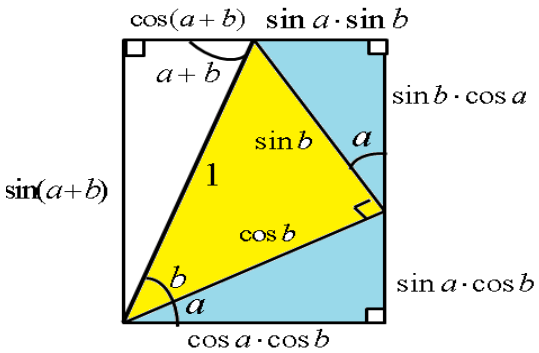
Nu e nicio îndoială
Că stă doar pe verticală.
O distingi ușor în ele:
Și-n matrice și-n tabele.

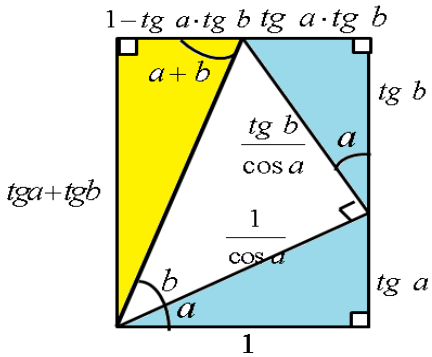
Printre figuri circulare,
Din două cercuri apare,
Și ca două nume să aibă,
Tehnic, mai este și... șaibă.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Descoperiți două noțiuni din matematică, ascunse în fiecare strofă.
Notă. Metagrama este o problemă de enigmistică din rebus, în care, dat fiind un cuvânt, înlocuind o literă cu o altă literă, se obține un nou cuvânt cu un alt înțeles.
Răspuns la pagina 68

DEMONSTRAȚII FĂRĂ CUVINTE





$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$$

$$tg(a+b)=\frac{tg\ a+tg\ b}{1-tg\ a\cdot tg\ b}$$

$$1+tg^2a=\frac{1}{\cos^2 a}$$

Calendarul matematicienilor români
Aniversări și comemorări în anul 2023

de prof. Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

În acest an avem mai multe aniversări și comemorări ale unor matematicieni și profesori români de mare prestigiu.

GHEORGHE ȚIȚEICA (16.10.1873-5.02.1939) S-au împlinit 150 de ani de la nașterea matematicianului și profesorului **Gheorghe Țițeica** , unul dintre fondatorii școlii românești de matematică. S-a născut la Drobeta Turnu Severin , unde a făcut și studiile primare. A urmat liceul în Craiova la actualul Colegiu Carol I , unde a fost elev intern și bursier , excepțional la toate materiile. În 1892 a intrat prin examen la Școala Normală Superioară din București și a urmat Facultatea de Științe , secția matematici , având ca profesori pe Spiru Haret , David Emmanuel , Constantin Gogu , Dimitrie Petrescu și generalul Iacob Lahovari. A fost impresionat de dascălul și omul Spiru Haret , primul nostru doctor în matematici la Sorbona și cel mai mare ministru român al învățământului.

În 1896, Țițeica își susține examenul de capacitate și devine profesor la liceul Vasile Alecsandri din Galați , dar în toamna anului 1896 , pleacă la Paris , fără bursă ci doar cu salariul de la postul din Galați.

La Paris este admis la prestigioasa Școală Normală Superioară iar în 1899 își trece din nou licența în matematici , fiind primul dintre toți licențiații francezi și străini. În același an susține la Sorbona teza de doctorat în matematici , într-o comisie prezidată de renumitul matematician francez Gaston Darboux care îi fusese și profesor.

Întors în țară , începe activitatea de dascăl și savant în școala superioară românească, la Universitatea din București. În 1903 este numit profesor titular la catedra de geometrie analitică și trigonometrie în jurul căreia va fonda școala românească de geometrie .

În 1909 devine membru corespondent al Academiei Române , apoi titular în 1913, vicepreședinte în 1928 și secretar general în 1929.

Dar **Țițeica** a fost membru și al unor academii străine: Academia de științe din Maryland(S.U.A.,1930),Societatea de Științe din Liège(Belgia, 1934) ,Doctor Honorius Causa al Universității din Varșovia(1934).

În 1919 **Gheorghe** Țițeica a participat la fundarea Universității din Cluj , și a prezidat numirile profesorilor universitari de matematici.

Opera științifică a lui **Țițeica** cuprinde peste 400 de lucrări publicate.Majoritatea sunt legate de geometria diferențială creată de Euler(1707-1783), Monge(1746-1818) și Gauss(1777-1855) la care a mai contribuit și profesorul său Gaston Darboux.

Țițeica a avut preocupări și pentru matematicile elementare, fiind unul dintre „ stâlpii” Gazetei Matematice(înființată la 15 septembrie 1895 , la o zi după inaugurarea podului de la Cernavodă construit de inginerul român Anghel Saligni), alături de inginerul Ion Ionescu , inginerul Vasile Cristescu și inginerul profesor Andrei Ioachimescu.

Țițeica a fost și un mare pedagog, lecțiile sale erau fermecătoare , de înaltă valoare pedagogică și educativă . În cultura românească, Țițeica nu a fost numai cel mai mare geometru român și primul inițiator al școlii matematice românești , ci și „unul dintre cei mai mari profesori pe care i-a avut universitatea noastră “ , sublinia profesorul George Andonie în lucrarea de referință „Istoria matematicii în România” (vol I,1965)

DIMITRIE POMPEIU (22.09.1873-7.10. 1954)

A fost unul dintre cei mai renumiți matematicieni români , profesor la Universitățile din Iași , București și Cluj , membru titular al Academiei Române.

S-a născut în urmă cu 150 de ani , la 22 septembrie 1873 în localitatea Broscăuți , lângă Dorohoi , în județul Botoșani. Școala primară și gimnaziul le urmează în Dorohoi , apoi la București studiază la Școala Normală de Institutori. Încă din școala primară colaborează cu rezolvări de probleme de aritmetică la revista „Recreații Științifice " din Iași (prima revistă de matematică din România care a apărut în perioada 15.01.1883-decembrie 1888).

În anii 1893-1898 a funcționat ca institutor la Galați , apoi la Ploiești unde s-a căsătorit și stabilit.

Fiind pasionat de studiile matematice , **Dimitrie Pompeiu** și soția sa (tot institutoare), în anul 1898 obțin un concediu plătit și pleacă la Paris , unde își completează studiile secundare în anul școlar 1898-1899 și trece bacalaureatul francez cu mențiunea „très honorable" .

Se înscrie apoi la Universitatea Sorbona (1899-1903) unde are ca profesori pe renumiții Henri Poincaré , Emile Picard , Edouard Goursat , Gabriel Köenigs și Paul Appel. Își ia licența în matematici în anul 1903 și se înscrie la doctorat .

La 31 martie 1905 , **Pompeiu** susține la Sorbona , în comisia formată din Henri Poincaré , Gabriel Köenigs și Edouard Goursat , celebra sa teză de doctorat „Asupra continuității funcțiilor de o variabilă complexă" în care a demonstrat existența funcțiilor analitice continue pe mulțimea singularităților lor (numite acum funcții Pompeiu).

La revenirea în țară , în 1905 , Dimitrie Pompeiu ocupă un post de conferențiar de analiză matematică și din 1907 pe cel de profesor de mecanică , la Universitatea din Iași.În 1912 se transferă la Universitatea din București , ca succesor al lui Spiru Haret .În 1930 , după pensionarea lui David Emmanuel devine profesor titular pe catedra de teoria funcțiilor. **Dimitrie Pompeiu** a fost ales în 1934 membru titular al Academiei Române , iar din 1943 a fost membru titular al Academiei de Științe din România.

Opera matematică a lui **Pompeiu** conține circa 150 lucrări publicate cu numeroase contribuții în domeniul analizei matematice , al teoriei funcțiilor de variabilă compexă și al mecanicii raționale. **Pompeiu** este creatorul școlii matematice românești de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale și a școlii românești de mecanică. Pompeiu a introdus noțiunea de derivată areolară și a extins celebra formulă a lui Cauchy , prin formula numită acum formula Cauchy –Pompeiu. De asemenea , Pompeiu a introdus noțiunea de distanță între două mulțimi și a construit funcții reale neconstante , a căror derivată se anulează în orice interval , denumite funcții Pompeiu.

Profesorul **Dimitrie Pompeiu** și-a adus contribuția și la organizarea învățământului matematic românesc . Astfel în anul 1919 a sprijinit înființarea Universității Române din Cluj unde a organizat un seminar de matematică după modelul celebrului seminar de la College de France. În anul 1929 , împreună cu profesorul Petre Sergescu a înființat la Universitatea din Cluj , revista „Mathematica" cu o largă circulație internațională. Dimitrie Pompeiu a avut un mare prestigiu internaționl.

În 1934 este Doctor Honoris Causa al Universității din Varșovia iar în 1937 a prezidat al doilea Congres interbalcanic al matematicienilor, la București. În 1946 , Pompeiu a fost președintele celui de-al trei-lea Congres al matematicienilor români , desfășurat la București.

GHEORGHE LAZĂR (5.06.1779-17.09.1823)

La 17 septembrie s-au împlinit 200 de ani de la moartea lui **Gheorghe Lazăr** , mare pedagog, teolog și inginer român , considerat fondatorului învățământului în limba română și al școlii tehnice românești din Țara Românească. În 1818 a înființat la București prima școală cu predare în limba română , școala de la Sfântul Sava .Gheorghe Lazăr a fost primul inginer cadastral român.

S-a născut în satul Avrig lângă Sibiu și a fost fiul unor țărani înstăriți. După studiile primare la Sibiu , a urmat filosofia și dreptul la Cluj. În 1806 primește o bursă imperială pentru a studia teologia la Viena , absolvind cu distincție în 1809.În paralel a urmat și cursuri la Politehnica din Viena , unde se preda și matematica.

În 1811 revine la Sibiu și este numit profesor la Institutul Teologic nou înființat.A intrat în conflict cu episcopul Vasile Moga care era adept al învățământului în limba slavonă și a interzis tipărirea manualelor școlare în limba română .

În urma unui proces disciplinar în 1815 , este destituit din funcția de episcop de către guvernatorul Transilvaniei. **Gheorghe Lazăr** vine în anul 1816 la București și ajunge cunoscut ca inginer hotarnic. În acest timp , sprijinit de banul Costache Bălăceanu care făcea parte din Eforia școlilor , obține actul de întemeiere a Școlii naționale de inginerie a lui **Gheorghe Lazăr** de la Sfântul Sava la 6 martie 1818, iar în august 1818 se deschide școala de inginerie hotarnică românească. Aici erau predate cursuri elementare, secundare și universitare. Însuși Lazăr se ocupa de învățământul secundar și de cel superior iar ca profesor de matematici preda aritmetica , geometria și trigonometria. Dintre elevii lui Gheorghe Lazăr sunt de menționat Ion Heliade Rădulescu , Petrache Poenaru , Teodor Palade și Eufrosin Poteca care au devenit mari personalități culturale și sociale în Țara Românească din secolul XIX.

În anii 1919 și 1923 s-au tipărit manualele de trigonometrie, respectiv aritmetică aflate în manuscrisele lui Lazăr.Pentru lucrarea sa „Aritmetica matematicească” , **Gheorghe Lazăr** s-a inspirat dintr-o lucrare a lui Cristian Wolff din 1713 , tipărită la Halle în limba latină.Din aceasta , Lazăr a tradus doar acele părți care erau de folos elevilor săi , simplificând unele demonstrații și adaptând problemele la unitățile de măsură din Țara Românească. Manuscrisul de trigonometrie „Trigonometria cea dreaptă “ a fost tradus după trigonometria lui G.I.Metzburg.

Traducerile lui **Gheorghe Lazăr** reprezintă primele cursuri universitare în limba română din Țara Românească. Prin ele , Lazăr introduce în limba română pentru prima dată concepte de matematică precum linie, punct ,unghi, paralel, triunghi, catetă, ipotenuză, pătrat, trapez, cerc, poligon, prismă, sin, cos, logaritm,etc.

Datorită lipsei dascălilor specialiști , pentru a acoperi programul de instrucție , Gheorghe Lazăr a predat și cursuri de istotie și geografie.

Perioada în care **Gheorghe Lazăr** a înființat școala cu caracter național,era frământată de evenimente social-politice care au culminat cu mișcarea revoluționară din 1821 , condusă de Tudor Vladimirescu. Din cauza acesteia școala românească de la Sfântul Sava a fost închisă iar Lazăr a fost scos din postul de director și profesor al școlii. În iunie 1823 , ajuns la starea de sărăcie și grav bolnav , a fost luat de un frate la Avrig , unde se stinge din viață pe 17 septembrie 1823.

Gheorghe Lazăr are meritul de a fi pus bazele învățământului și în Țara Românească și în Transilvania, prin Școala națională de la Sf.Sava și prin Institutul teologic de la Sibiu , devenit în urmă faimosul seminar al lui Andrei Șaguna.

În memoria lui s-a instituit premiul „**Gherghe Lazăr**” al Academiei Române , iar data de 5 iunie a fost stabilită ca „Ziua învățătorului”, dupa ziua lui de naștere.

GRIGORE MOISIL (10.01.1906-21.05.1973)

Anul acesta, la 21 mai, au trecut 50 de ani de la decesul lui **Grigore Moisil** , unul dintre marii matematicieni români care și-au pus amprenta pe formarea și dezvoltarea școlii românești de matematică și informatică.

S-a născut la 10 ianuarie 1906 în Tulcea , într-o familie de intelectuali , tatăl său fiind profesor de istorie și director al Cabinetului Numismatic al Academiei.

Moisil a urmat școala primară în București iar studiile liceale la Liceul „Mihail Kogălniceanu" din Vaslui și Liceul „Spiru Haret" din București. În 1923 intră la Facultatea de Matematică din București, unde îi are ca profesori pe Dimitrie Pompeiu, Gheorghe Țițeica , Traian Lalescu , Anton Davidoglu.

Din 1924 până în 1929 devine student și la Politehnica din București , pe care o abandonează (deși își trecuse toate examenele până în anul IV).

În anul 1929, **Grigore Moisil** susține teza de doctor „Mecanica analitică a sistemelor continue", într-o comisie condusă de Gheorghe Țițeica și având ca membri pe Dimitrie Pompeiu și Anton Davidoglu. Această teză a fost publicată la Paris fiind mult apreciată de renumiții matematicieni Vito Volterra , Tullio Levi-Civita și Paul Lévy.

În 1930 , **Moisil** pleacă la Sorbona și în 1931 își trece docența, apoi în 1931-1932 merge la Roma unde studiază cu matematicianul Vito Volterra.

La întoarcerea în țară, în 1932, **Grigore Moisil** devine profesor provizoriu la Universitatea din Iași, apoi conferențiar universitar în 1935 și profesor universitar în 1939.A stat la Iași zece ani și a fost legat în mod deosebit de profesorul Alexandru Myller.

La Universitatea din Iași ține primul curs de algebră modernă din România „Logica și teoria demonstrației" . De asemenea a publicat lucrări în domeniul mecanicii , analizei matematice, geometriei, algebrei și logicii matematice.

A extins în spațiul cu mai multe dimensiuni derivata areolară a lui Dimitrie Pompeiu , a introdus algebrele numite de el Lukasiewicz trivalente și polivalente(acum se numesc Lukasiewicz-Moisil), a elaborat metode noi de analiză și sinteză a automatelor finite și a avut contribuții valoroase în domeniul teoriei algebrice a mecanismelor automate.

În anul 1941, este chemat la București, la Facultatea de Științe a Universității, ca profesor de analiză superioară și logică matematică, calitate în care a funcționat până în 1948(înre 1946-1948 a fost suplinit , el fiind numit ambasadorul României la Ankara).

Introducerea învățământului informaticii în România s-a făcut cu spijinul cercetătorilor ce lucrau în seminarul de Teoria algebrică a mecanismelor automate, cu ajutorul lor a fost înființat Centrul de Calcul al Universității din București, cu un calculator IBM 360/30,

În 1968. **Moisil** a fost șef de catedră a primului colectiv de informatică de la Facultatea de Matematică-Mecanică a Universității din București și a fost primul director al Centrului de Calcul al Universității din București. El are meritul de a fi fost primul care a introdus informatica în România și de a fi creat școala românească de informatică.

Din 1948 a fost membru al Academiei Române , dar el a fost și membru al prezidiului Academiei Poloneze , membru corespondent al Academiei de Științe din Bologna și membru al Institutului Internațional de Filozofie din Paris. Activitatea științifică a academicianului Moisil s-a concentrat în peste 350 manuale, tratate și lucrări.

Grigore Moisil a fost în perioada 1949-1973 , președinte al Societățiide Științe Matematice din România , calitate în care a intensificat activitatea de răspândire a matematicii prin conferințe,simpozioane , colocvii, interviuri la radio, televiziune și presă.Personalitatea lui creatoare rămâne vie în amintirea iubitorilor de matematică. Marele nostru savant s-a stins la 21 mai 1973 , însă omul plin de optimism spiritual și fermecător povestitor , va dăinui.

CASSIUS IONESCU-TULCEA (14.10.1923-6.03.2021)

A fost un profesor și matematician român născut la București în 14 octombrie 1923, deci în 2023 am avut centenarul nașterii sale. A urmat Facultatea de Științe a Universității din București în perioada 1942-1946.După luarea licenței a devenit cadru didactic al Facultății de Științe din București, mai întâi la catedra de teoria probabilităților condusă de profesorul Octav Onicescu, iar din 1952 profesor la catedra de analiză matematică condusă de profesorul Miron Nicolescu, ajungând șef al acestei catedre în 1957.

La Universitatea din București a funcționat 11 ani, iar printre studenții remarcabili ai profesorului Ionescu Tulcea au fost viitorii profesori de renume Ciprian Foiaș, Nicolae Dinculeanu, George Ciucu, Radu Theodorescu și Robert Langlands.

Între anii 1947 și 1957 a lucrat și ca cercetător la Institutul de Matematică al Academiei Române.

În anul 1957 Ionescu-Tulcea emigrează în S.U.A, în urma invitației Universității Yale.

În anul 1959 obține doctoratul la această universitate americană în domeniul analizei funcționale ocupându-se de semigrupurile de operatori. La rândul lui, tot la Universitatea Yale profesorul **Ionescu –Tulcea** a condus teza de doctorat a lui Robert Langlands, devenit unul dintre cei mai proeminenți matematicieni din lume.

Profesorul **Ionescu –Tulcea** a mai predat în S.U.A la Universitatea Pensylvania, apoi la Universitatea Illinois și în final la Universitatea din Evanston, unde a rămas profesor emerit până la sfârșitul vieții.

A scris numeroase articole și cărți având cercetări în analiza funcțională, teoria probabilităților cu aplicații în teoria jocurilor de noroc .

În teoria probabilităților teorema extensiei poartă acum numele de teorema Ionescu Tulcea. În anul 1969, împreună cu soția sa Alexandra Ionescu-Tulcea a scris lucrarea ,, Topics in the Theory of Lifting'' , publicată în patru ediții și citată de sute de ori în literatura de specialitate.

La vârsta de aproape 98 de ani, matematicianul profesor **Cassius Ionescu-Tulcea**, a decedat la 6 martie 2021.

Tot în anul **2023** au avut loc o serie de aniversări ale unor matematicieni străini pe care îi vom aminti în numărul următor al revistei printre care:

- renumitul matematician, filozof, astronom și poet persan **Omar Khayyam** născut în orașul Nișapur la data de 18.05.1048, de la a cărui naștere au trecut 975 de ani. A avut o contribuție importantă în reformarea calendarului persan, el stabilind un calendar care avea o eroare de o zi la 5000 de ani ;
- la 19 februarie 2023 s-au aniversat 550 de ani de la nașterea astronomului, matematicianului, fizicianului și medicului polonez **Nicolaus Copernic** considerat fondatorul astronomiei moderne;
- la 19.06. 2023 s-au aniversat 400 de ani de la nașterea în 1623 a ilustrului matematician, filozof și fizician **Blaise Pascal**, cunoscut prin precocitatea sa în multe domenii, autodidact și autor al construcției primei mașini de calcul în 1642.

De asemenea, trebuiesc amintiți și matematicienii **Leopold Kronecker** (n. 07.12.1823) și respectiv **Tullio Levi- Civita** (n. 28.03.1873) de la a căror naștere se împlinesc 200 și respectiv 150 de ani.

Bibliografie

1. Adrian Stan și colab. - O scurtă istorie a matematicii- Editura Editgraph Buzău, 2015.
2. Mircea Trifu, Florin Diac, Costel Chiteș-Școala matematică românească de-a lungul timpului- Editura Oscar Print, București, 2010.
3. Ion Purcaru, Octavian Bâscă-Pagini din istoria matematicii: oameni,idei și fapte de referință- Editura Universitară, București, 2017.
4. Wikipedia.

Cugetări ...de-ale matematicienilor

„Arta este cea mai înaltă expresie a unei aritmetici interioare și inconștiente”.

Gotfried Leibniz

„Matematicile pun în joc puteri sufletești care nu sunt mult diferite de cele solicitate de poezie și de arte”.

Dan Barbilian

„Natura vorbește în limba matematicii: literele acestei limbi sunt cercuri, triunghiuri și alte figuri matematice”.

Galileo Galilei

„Ideea de a exprima toate numerele numai cu câteva cifre, dându-le acestora în afară de valoarea după formă și valoarea după loc, este atât de simplă încât tocmai din cauza acestei simplități e greu de apreciat cât este de uimitoare.”

Pierre Laplace

„Universul este un cerc al cărui centru e pretutindeni, iar circumferința nicăieri”.

Blaise Pascal

„Matematicile, la fel ca celelalte activități omenești, ridică probleme de stil care nu pot fi indiferente filozofilor culturii”. **Simion Stoilov**

“Nu este pe lume un studiu care să pună mai armonios în acțiune facultățile spiritului decât cel al matematicilor”. **James Joseph Sylvester**

„Matematicienii, ca și poeții, au preferat totdeauna sățși comunice descoperirile lor în reprezentări directe și rapide, și numai rareori în sinteze care cer forma cărții”.

Octav Onicescu

Ştiaţi că ...

----- împăratul roman **Iuliu Cezar (104- 44 î.e.n)** a contribuit personal la reforma calendarului cunoscut după numele lui, “calendarul iulian”?

În perioada sec. 1 î.e.n., imperiul roman ajunsese la o dezvoltare foarte mare iar toate domeniile societății au cunoscut un avânt deosebit. Până în anul 450 î.e.n, anul era de 355 de zile și de aceea ulterior astronomii adăugau câte o lună în plus la fiecare doi ani, dar și aceasta avea alternativ 22 sau 23 de zile, ajungându-se ca unii ani să fie mai lungi. S-au creat astfel încurcături în stabilirea exactă a cronologiei și chiar dacă au început să elimine la 24 de ani câte o lună, tot nu s-a putut stabili exactitatea cu cea astronomică. Astfel că, după ce în anii 47-48 î.e.n, aflat în Egipt și fiind sfătuit de înțeleptul egiptean Sosigene, Cezar realizează în 45 î.e.n lucrarea “De astris” (Despre aștri).

Aici el introduce anul de 365 de zile și cu un an bisect la fiecare an, în care între 23 și 24 februarie se intercala o zi în plus.

„Viața e ca mersul pe bicicletă;
ca să-ți menții echilibrul,
trebuie să te miști în permanență”.
Albert Einstein
(1879 - 1955)

7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 32** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype(**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 32** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 MARTIE 2024**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

Răspuns la METAGRAMA : coloană-coroană (circulară).

Elevi rezolvitori

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a VII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof**. Grigorie Dan Lucian**
Clasa a X-a: Maria- Amina Tanasi; **Clasa a XII-a:** Florentina Stanca, Gabriel Enache**. Prof. Daniel Văcaru.**
Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a X-a: Găvăneanu Mariana, Voineag Adi Cornel, Sava Gabriela, Ghiran Ștefan, Anton Eduardo; **Prof. Adrian Stan.**
Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău
Clasa a X-a: Zaharia Darius Andrei, Bărbunea Daniela Nicoleta, Cazacu Rareș Ștefan, , . Prof**. Stan Adrian**
Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova
Clasa a XI-a: Alexie Mihnea, Turcu Stiolica Alexandru, Boiangiu Vlad; **Clasa a XII-a**: Cașcotă Dalina, Rada Andra; Prof. **Tutescu Lucian**. **Clasa a VIII-a:** Iana Bianca, Tudorașcu Rareș, Schwarz Isabella. Prof. **Sanda Iulia**
Clasa a X-a: Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian.**
Clasa a XI-a: Moanță Ștefan. Prof. **Goiceanu Dorina**
Liceul Energetic Craiova
Clasa a VII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof. **Grigorie Dan Lucian**
Liceul Teoretic Bechet
Clasa a XII-a: Percea Valentina, Prof. **Iacob Meda Elena**

Apariţii editoriale

Cartea prezintă numeroase probleme organizate pe capitolele din materia clasei a X-a selectate de autor din cadrul colecţiei de reviste **„Sclipirea Minţii”**, probleme propuse de autor sau de către ceilalţi colegi care au contribuit cu probleme în revistă de-a lungul celor 16 ani de apariţie a revistei.

De asemenea au fost propuse şi probleme date la diverse concursuri judeţene sau olimpiade judeţene şi naţionale, precum şi diverse adaptări ale acestora care se pot lucra la nivelul claselor de elevi care fac după programa de matematică M1.

În speranţa că această sinteză de probleme, prin diversitatea şi dificultatea lor poate aduce un plus în învăţarea elevilor care se pregătesc pentru diverse concursuri şi examene, le recomandăm cu încredere atât elevilor cât şi cadrelor didactice parcurgerea acesteia.

Adrian Stan

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 32 ANUL XVI - DECEMBRIE 2023

Cuprins

1. Istoria matematicii 1

Gheorghe Ţiţeica şi Dimitrie Pompeiu de Ionel Tudor şi Adrian Stan 1

2. Articole şi note matematice 8

În legătură cu două probleme din RMT de Titu Zvonaru 8

Asupra unor inegalităţi în triunghi de Mihaly Bencze 9

Inegalităţi de tip Ionescu- Weitzenböck şi Hadwiger – Fisler într-un triunghi de Emil C. Popa 10

Asupra problemei L.999 din revista Sclipirea Minţii nr.31 de Marin Chirciu 11

Alte rafinări ale unei inegalităţi clasice de Neculai Stanciu 13

Asupra unei inegalităţi duble a lui Nicolae Ciorănescu de Marius Drăgan şi Neculai Stanciu 14

Asupra unei inegalităţi a lui Adil Abdullayev de Gheorghe Ghiţă 16

Despre numerele lui Anderson de Ion Pătraşcu şi Ion Cotoi 17

Substituţii în integrale de Ovidiu Ţâţan 19

Probleme practice ale matematicienilor antichităţii de Adrian Stan 21

Noţiunile fundamentale ale MATEMATICII de Daniel Văcaru 24

3. Probleme rezolvate 27

4. Probleme propuse 48

5. Quickies 57

6. Caleidoscop matematic 61

7. Poşta redacţiei 68

LEI 15 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 - 6601