SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA .PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XVII, NR XXXIII, 2024

SM

33

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

ISTORIA MATEMATICII

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC MESERII SI SERVICII , BUZĂU

APRILIE 2024

SCLIPIREA MINTII 33

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XVII, Nr. XXXIII, APRILIE 2024, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACTIE

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cătălin Iordache - Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice
Cristina Drugă - Inspector şcolar matematică

D. M . Bătineţu – Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Lucian Tuţescu
Marius Drăgan
Dorin Mărghidanu
Daniel Sitaru
Mihály Bencze
Gheorghe Ghiţă
Ionel Tudor
Marin Chirciu

- **Director:**
  Neculai Stanciu
- **Redactor şef:**
  Adrian Stan
- **Redactori principali:**

Andrei Octavian Dobre
Ştefan Pîrlog
Ion Stănescu
Iuliana Traşcă
Gabriel Tica
Constantin Dinu

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3

PROBLEME REZOLVATE..... 10

PROBLEME PROPUSE 42

QUICKIES 49

CALEIDOSCOP MATEMATIC 55

POŞTA REDACŢIEI..... 63

GÂNDEȘTE CORECT

- **Membri :**

Elena **Alexie**, Florică **Anastase**, Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Daniela **Barbu,** Mădălina **Buliga,** Olivia **Bercea,** Doina Cristina **Călina,** Mihai **Călugăru,** Gabriela **Militaru Cismaru,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Simona **Chiriţă,** Marin **Chirciu,** Marian **Ciuperceanu,** Elena **Codeci,** Daniel **Codeci,** Ion **Cotoi,** Marian **Cucoaneş** , Luiza **Cremeneanu**, Mihaela **Daianu**, Camelia **Dană**, Radu **Diaconu**, Gheorghe **Dârstaru,** Daniela **Dibu,** Gilena **Dobrica**, Ana **Dumitru,** Ioana **Genoveva,** Lucian Dan **Grigorie,** Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ştefan **Gobeş**, Virginia **Grigorescu**, **Dorina** Goiceanu, Ionuţ **Ivănescu,** Ana **Jipescu,** Vasile **Jiglău,** Bela **Kovacs,** Adalbert **Kovács,** Dragoş **Lăzărescu,** Răzvan **Lupu,** Dorin **Mărghidanu,** Monica **Matei,** **Iacob Meda,** Iulian **Micu,** Mihaela **Mirea,** Mariana **Mitea,** Cristian **Moanţă,** Horia **Muşat,** Ramona **Nălbaru,** Cornelia **Neacşu,** Mihaela **Nascu**, Bianca **Negreţ**, Constantin **Nicolau**, Cristina Diana **Oprescu**, Petre **Păunescu,** Ion **Pătraşcu,** Sorin **Pîrlea,** Oana **Preda,** Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Delia **Popescu,** Laura **Popescu,** Veronica **Popescu,** Dumitru **Preoteasa**, Constantina **Prunaru**, Florin **Rotaru,** Pal **Orban**, Vlad **Orovniceanu,** Iulia **Sanda**, Dumitru **Săvulescu,** Ilinca **Sebastian,** Roxana **Stanciu**, Ileana **Stanciu**, Mihaela **Stancele,** Monica **Stanca,** Liviu **Smarandache,** Livia- Emilia **Stan,** Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Ovidiu **Ţâţan,** Carmen **Terheci,** Alina **Tigae,** Rareş **Tudoraşcu,** Eugenia **Turcu,** Lavinia **Trincu,** Carmen **Vlad,** Roxana **Vasile,** Carina-Irina **Viespescu,** Daniel **Văcaru,** Ionuţ Florin **Voinea,** Laura **Zaharia,** Gigi **Zaharia,** Codruţ-Sorin **Zmicală,** Caterina **Maria Zetu,**

REDACŢIA
Liceul Tehnologic „Meserii şi Servicii”, Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis, Cod. 120167, Tel. 0238719223
E-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

“Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte .”

(Henri Poincare)
(1854 - 1912)

1. Istoria matematicii

170 de ani de la nașterea matematicianului Henri J. Poincare

de prof. Adrian Stan

Se împlinesc 170 de ani de la nașterea lui **Henri J. Poincare** (29.04.1854 – 17.07.1912), matematician și fizician francez de valoare universală cu mari contribuții în mai multe domenii ca astronomie, geodezie, termodinamică, mecanică cuantică, optică, topologie și filozofie.

A fost considerat un geniu al matematicii, unul dintre cei mai mari din toate timpurile, „gigantul matematicilor” cum îi plăcea să-i spună matematicianul Ellie Cartan (1869 – 1951) .

Poincare avea o memorie neobișnuită și putea să realizeze mental calcule foarte complicate, descoperirea pasiunii pentru matematică dar și pentru literatură realizându-se în anii de liceu. Liceul din Nancy pe care l-a terminat în 1871 îi poartă astăzi numele ca un omagiu pentru cel ce avea să devină cel mai bun elev care a învățat acolo și care obținuse cele mai mari premii în concursurile școlare naționale.

În 1873 a intrat la Școala Politehnică și a studiat matematica cu profesorul Charles Hermite (1822- 1901) cu care își dă și doctoratul în 1879 în domeniul ecuațiilor diferențiale fiind primul care le studiază din perspectiva utilizării proprietăților geometrice, “ Sur les propriétés des fonctions définies par les écuations aux différences partielles”. Încă de pe băncile facultății descoperise o serie de funcții complexe pe care le utilizează pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale.

În 1880 descoperă funcțiile automorfe sau fuchsiene așa cum le denumește în cinstea lui Lazarus Fuchs (1833- 1902).

După o scurtă perioadă de inginer minier, căci termină și Școala de Mine - o elită a învățământului superior francez, începând cu 1881 s-a dedicat carierei didactice la Universitatea din Paris, Sorbonne, dar nerenunțând la cariera de inginer, devine în 1910 inspector general sub serviciul ministerului public.

Rezultatele cercetărilor sale se referă la teoria funcțiilor (’’Asupra teoriei funcțiilor fuchsiene’’), la ecuațiile diferențiale, la topologie (unde a deschis un nou capitol – cel al topologiei algebrice, unde în 1895 a introdus conceptul de grup fundamental), precum și la domeniul algebrei și al fundamentelor geometriei. A publicat lucrări de fizică matematică și de mecanică cerească (’’Metode noi în mecanica cerească’’), studii de epistemologie (’’Știință și ipoteză’’, ’’Valoarea științei’’) de tendință pozitivistă, lucrări care au contribuit la elaborarea teoriei relativității, independent de Albert Einstein, (1906). De asemenea, a studiat teoria numerelor, a funcțiilor abeliene, a funcțiilor analitice cu variabile complexe, s-a preocupat de optică, de mecanica fluidelor,

de electricitate, electromagnetism și filozofie a științei. A studiat grupul de transformări Lorentz, a introdus invarianții integrali, a studiat teoria generală a determinanților infiniți, și a propus un model de geometrie neeuclidiană de tip Lobacevski- Bolyai.

A dat în 1904 așa numita " Conjectura lui Poincare" sau "ipoteza lui Poincare " care se referea la considerarea unui spațiu tridimensional închis și mărginit cufundat într-un spațiu 4-dimensional, în care toate " cercurile", arcele de cerc, bidimensionale, pot fi micșorate topografic până ce devin un punct, astfel topologic, spațiul devine o sferă tridimensională.

" Conjectura lui Poincare" a putut fi demonstrată abia după 100 de ani de la prima sa formulare, în 2002- 2023 de către matematicianul rus Grigori Perelman care a afișat-o pe internet. Pentru această demonstrație, Uniunea Internațională a Matematicienilor l-a premiat pe Perelman cu medalia Fields echivalentul premiului Nobel în matematică, dar matematicianul a refuzat premiul, inclusive suma de un milion de dolari oferită de Institutul Clay Mathematics din Cambridge Massachusetts.

În 1887 la 32 de ani intră în Academia Franceză de Științe, devenind și președintele acesteia în 1906. În 1909 este ales membru de onoare al Academiei Române. De altfel, **Poincare** a fost membru al 43 de academii științifice din lume. Printre studenții săi l-a avut și pe matematicianul român D. Pompeiu (1905).

Poincare a propus lumii științifice o serie de probleme care au rămas nerezolvate mulți ani. Una dintre ele este problema centrului și a focarului demonstrată în 2013 de matematicianul moldovean Mihail Popa din Republica Moldova.

Poincare l-a cunoscut pe matematicianul roman Spiru Haret și a rămas impresionat de lucrarea de doctorat a acestuia despre invariabilitatea marilor axe ale orbitelor planetare din 1878.

După propriile sale confesiuni lucra fără nicio metodă și oriunde. Unul dintre studenții săi a fost chiar matematicianul roman Traian Lalescu – ''o culme a culturii românești'', un român cu reputație internațională care a frecventat la Sorbona alături de Spiru Haret cursurile lui **Poincarè**. O descriere în amănunt a personalității artistice a lui Henri Poincarè făcută de Traian Lalescu se găsește în *Convorbiri literare*, anul XLVIII, 1913. Astfel, după Traian Lalescu, **Poincarè** : "era un bărbat de statură mijlocie, cu spatele încovoiat, și nasul congestionat, excesiv de roșu; distrat până la exces, fără ordine în conversația zilnică și ca atâția mari savanți fără vocație de profesor strălucit. Chiar însăși opera sa este adesea incompletă și nesuficientă, fără meticulozitate științifică, astfel că toate lucrările sale au fost reluate, dar, rareori s-a înșelat în enunțarea rezultatelor generale care reprezintă capitole întregi din variatele ramuri ale științelor matematice. Nu-i plăcea să cizeleze și să epuizeze un rezultat obținut."

''Era un artist în înțelesul superior al cuvântului'', ''omul tuturor intuițiilor'', ''o jertfă conștientă și măreață pe altarul științei omenești!'', iar în sufletul său zbuciumat, licărea flacăra genialității creatoare''.

A murit în 17.07.1912 la vârsta de 58 de ani din cauza unui embolism suferit în urma unei operații.

Bibliografie:

1. Adrian Stan și colab. O scurtă istorei a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015
2. Florica T. Câmpan. Probleme celebre din istoria matematicii. Editura Albatros. București. 1976.
3. Smaranda Ecaterina Lalescu. Traian lalescu – un nume peste ani. Editura Curtea Veche. București.2007.
4. Vasile Bobancu. Caleidoscop Matematic. Editura Niculescu. București. 2001.
5. www.wikipedia.com

"Matematica nu este despre numere, ecuații, calcule sau algoritmi: este despre înțelegere." – William Paul Thurston (1596-1650)

2. Articole și note matematice

Generalizarea unor probleme din Gazeta Matematică

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Daniel Sitaru și Neculai Stanciu

I. O generalizare a problemei dată la Concursul interjudețean "Matematica de Drag", Ediția a V-a, Bistrița, 2010, G.M.-B, nr. 2/2011, pag. 72-76.

Fie $a,b,x,y,z,t \in R, X = x+y+z+t.$ **Să se arate că**

$$(aX+bx)^2+(aX+by)^2+(aX+bz)^2+(aX+bt)^2+\frac{1}{4} \geq \frac{|4a+b|}{2}X.$$

Soluția 1. Pornim de la inegalitatea binecunoscută a lui Bergström pentru două variabile $u^2+v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2}$, $\forall u,v \in R$, (*), cu egalitate dacă și numai dacă $u=v$. Conform inegalității (*) avem $(aX+bx)^2+(aX+by)^2 \geq \frac{(2aX+b(x+y))^2}{2}$, și $(aX+bz)^2+(aX+bt)^2 \geq \frac{(2aX+b(z+t))^2}{2}$. Adunând relațiile precedente membru cu membru deducem că $A=(aX+bx)^2+(aX+by)^2+(aX+bz)^2+(aX+bt)^2 \geq$

$\geq \frac{(2aX+b(x+y))^2+(2aX+b(z+t))^2}{2}$, iar aplicând din nou inegalitatea (*) obținem $(2aX+b(x+y))^2+(2aX+b(z+t))^2 \geq \frac{(4aX+b(x+y+z+t))^2}{2} = \frac{(4a+b)^2X^2}{2}$. Deducem că $A \geq \frac{(4a+b)^2X^2}{4}$ și atunci $A+\frac{1}{4} \geq \frac{(4a+b)^2X^2}{4}+\frac{1}{4} \overset{MA-MG}{\geq} 2\sqrt{\frac{(4a+b)^2X^2}{16}} =$

$= \frac{|4a+b|\cdot|X|}{2} \geq \frac{|4a+b|}{2}X$, adică relația din enunț este demonstrată.

Soluția 2. $(4a+b)^2X^2 = (aX+bx+aX+by+aX+bz+aX+bt)^2 =$

$= ((aX+bx)\cdot 1+(aX+by)\cdot 1+(aX+bz)\cdot 1+(aX+bt)\cdot 1)^2 \overset{C-B-S}{\leq}$

$\overset{C-B-S}{\leq} ((aX+bx)^2+(aX+by)^2+(aX+bz)^2+(aX+bt)^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) = 4U$, de unde deducem că $A \geq \frac{(4a+b)^2X^2}{4}$ și ca mai sus obținem relația din enunț.

Observație. Dacă $a=1, b=-2$, atunci $\frac{|4a+b|}{2}=1$, atunci obținem problema dată la

Concursul interjudețean ”Matematica de Drag”, Ediția a V-a, Bistrița, 2010.

Dacă $x, y, z, t \in R$ **, atunci**

$$(-x+y+z+t)^2+(x-y+z+t)^2+(x+y-z+t)^2+(x+y+z-t)^2+\frac{1}{4} \geq x+y+z+t,$$

II. O generalizare a problemei 26397 din G.M.B, nr. 7-8-9/2011, pag 375.

Dacă $a,b,c,d,m,x,y,z \in R_+^*$, $m(a+c) > \max\{b,d\}$, atunci

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{cx+dz}+\frac{m^2z}{(m(a+c)-b)x+(m(a+c)-d)y} \geq \frac{3}{a+c}$$

Soluție. $B=\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{cx+dz}+\frac{m^2z}{(m(a+c)-b)x+(m(a+c)-d)y}=$

$$=\frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{cxy+dyz}+\frac{m^2z^2}{(m(a+c)-b)xz+(m(a+c)-d)yz}.$$

Aplicăm inegalitatea lui Bergström și obținem

$$B \geq \frac{(x+y+mz)^2}{axy+bxz+cxy+dyz+m(a+c)xz-bxz+m(a+c)yz-dyz}=\frac{(x+y+mz)^2}{(a+c)(xy+myz+mxz)}$$

Deoarece, $(u+v+w)^2 \geq 3(uv+vw+wu)$, $\forall u,v,w \in R_+^*$, în care înlocuim $u=x, v=y, w=mz$, deducem că $(x+y+mz)^2 \geq 3(xy+ymz+mxz)$, deci $B \geq \frac{3}{a+c}$, q.e.d.

Observație. Pentru $a=2, b=4, c=1, d=5, m=3$ obținem: Problema 26397. Să se arate că

$$\frac{x}{2y+4z}+\frac{y}{x+5z}+\frac{9z}{5x+4y} \geq 1 \text{ (Constantin Miu, Melinești, Dolj)}$$

III. O generalizare a problemei C.O:5223 din G.M-B, nr.7-8-9/2011.

Dacă $a,b,c,d,x,y,z \in R_+^*$, $bc+ad+bd \geq 2ac$, atunci

$$\frac{x^2}{(ax+by)(cx+dz)}+\frac{y^2}{(ay+bz)(cy+dx)}+\frac{z^2}{(az+bx)(cz+dy)} \geq \frac{3}{(a+b)(c+d)}.$$

Soluție. Conform inegalității lui Bergström, avem

$$\frac{x^2}{(ax+by)(cx+dz)}+\frac{y^2}{(ay+bz)(cy+dx)}+\frac{z^2}{(az+bx)(cz+dy)} \geq$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{(ax+by)(cx+dz)+(ay+bz)(cy+dx)+(az+bx)(cz+dy)}=$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{ac(x^2+y^2+z^2)+(bc+ad+bd)(xy+yz+zx)}=$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{ac(x+y+z)^2+(bc+ad+bd-2ac)(xy+yz+zx)}.$$

Deoarece, $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall x,y,z \in R_+$ din obținem relația din enunț.

Observație. Pentru $a=c=1$, $b=d=2$ din relația problemei obținem problema C.O:5223. din G.M.B, nr. 7-8-9/2011, pag 417 cu următorul enunț: dacă $x,y,z \in R_+^*$, atunci

$$\frac{x^2}{(x+2y)(x+2z)}+\frac{y^2}{(y+2z)(y+2x)}+\frac{z^2}{(z+2x)(z+2y)} \geq \frac{1}{3} \text{ (Petre Bătrânețu, profesor Galați).}$$

IV. O generalizare a problemei 26108 din G.M-B, nr.2/2009, pag. 101, propusă de V.Berghea.

Fie $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$ un poligon convex de perimetru $2p$, de laturi $A_kA_{k+1} = a_k, k = \overline{1,n}$ și fie $u > 0$ astfel încât $u \geq a_n$. Să se arate că dacă $\frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2p - a_k + u} = \frac{(n+1)^2}{n(2p - a_n + 2u)}$, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Soluție. Fie $C_n = \frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2p - a_k + u}$. Conform inegalității lui Bergström, avem

$$C_n \geq \frac{(n+1)^2}{2p + \sum_{k=1}^{n}(2p - a_k + u)} = \frac{(n+1)^2}{2p + (n-1)2p + nu} = \frac{(n+1)^2}{2np + nu} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n(2p - a_n + a_n) + nu} = \frac{(n+1)^2}{n(2p - a_n) + na_n + nu} \geq \frac{(n+1)^2}{n(2p - a_n) + 2nu} = \frac{(n+1)^2}{n(2p - a_n + 2u)}.$$

Prin urmare avem egalitate în inegalitatea lui Bergström și atunci $2p = 2p - a_k + u, \forall k = \overline{1,n} \Leftrightarrow u = a_k$, ceea ce demonstrează concluzia din enunț.

Observație. Pentru $n = 3$ și $u = 9$, deducem că într-un triunghi ABC dacă $c \leq 9$ și

$$\frac{1}{b+c+9} + \frac{1}{c+a+9} + \frac{1}{a+b+9} + \frac{1}{a+b+c} = \frac{16}{3(a+b+18)},$$ atunci triunghiul este echilateral cu $a = b = c = 9$ (Problema 26108 din G.M-B , nr. 2/2009, pag. 101).

V. O generalizare a problemei 26440 din G.M.-B, nr.4/2011, pag. 209,propusă de Gh. Szöllösy.

Fie $n \in N^* - \{1\}$, $a, b, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ și $aX_n > b \max_{1 \leq k \leq n} x_k$.

Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{aX_n - bx_k}} \geq \sqrt{\frac{nX_n}{an - b}}$.

Soluție. Dacă notăm $y_k = \frac{x_k}{X_n}, \forall k = \overline{1,n}$, atunci $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{aX_n - bx_k}} = \sqrt{X_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{\sqrt{a - by_k}}$, iar inegalitatea enunțului se reduce la $\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{\sqrt{a - by_k}} \geq \sqrt{\frac{n}{an - b}}$, (**).

Fie $f, g, h : \left(0, \frac{a}{b}\right) \to R_+^*$, $f(t) = t, g(t) = (a - bt)^{-\frac{1}{2}}, h(t) = (fg)^t$. Rezultă ușor că $h''(t) = f''(t) + 2f'(t)g'(t) + g''(t) > 0, \forall t \in \left(0, \frac{a}{b}\right)$, adică funcția h este convexă pe $\left(0, \frac{a}{b}\right)$ și conform inegalității lui Jensen avem

$$\sum_{k=1}^{n} h(y_k) \geq nh\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = nh\left(\frac{Y_n}{n}\right) = n \cdot \frac{Y_n}{n} \cdot \left(\frac{1}{a - \frac{bY_n}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = Y_n \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{na - bY_n}},$$ dar,

$Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{X_n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Deci, $\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{\sqrt{a - by_k}} \geq \sqrt{\frac{n}{an - b}}$, ceea ce demonstrează (**), și deci

$Y_n=\sum_{k=1}^{n}y_k=\frac{1}{X_n}\sum_{k=1}^{n}x_k=1$. Deci, $\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{\sqrt{a-by_k}}\ge\sqrt{\frac{n}{an-b}}$, ceea ce demonstrează (**).

Observație. Dacă $X_n=1$, $a=b=1$, se obține problema 26440 din G.M-B nr.4/2011, propusă de Gh. Szöllösy.

VI. O generalizare a problemei 26261 din G.M.-B, nr. 2/2010, pag. 93, propusă de Cătălin Cristea. Fie $n\in N, n\ge 3$, $a,b,x_k\in R_+^*, \forall k=\overline{1,n}$, $x_{n+1}=x_1, x_{n+2}=x_2$. Să se demonstreze că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ax_{k+1}^2+bx_{k+2}^2}{x_k}+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge 2n.$$

Soluția 1. Avem $ax_{k+1}^2+bx_{k+2}^2\overset{MA\ge MG}{\ge}2\sqrt{ab}x_{k+1}x_{k+2}, \forall k=\overline{1,n}$ și dec

$$D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{ax_{k+1}^2+bx_{k+2}^2}{x_k}\ge 2\sqrt{ab}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_k}\overset{MA\ge MG}{\ge}2\sqrt{ab}\cdot n\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_k}}=$$

$=2\sqrt{ab}\cdot n\cdot\sqrt[n]{p_n}$, unde $p_n=\prod_{k=1}^{n}x_k$. De asemenea avem $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\overset{MA\ge MG}{\ge}n\cdot\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}=\frac{n}{\sqrt[n]{p_n}}$.

Deducem că

$$D_n+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge 2\sqrt{ab}\cdot n\cdot\sqrt[n]{p_n}+\frac{n}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{p_n}}\overset{MA\ge MG}{\ge}2\cdot\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot n\cdot\sqrt[n]{p_n}\cdot\frac{n}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{p_n}}}=2n.$$

Soluția 2. Conform inegalității lui Bergström avem

$$D_n\ge\frac{a\left(\sum_{k=1}^{n}x_{k+1}\right)^2+b\left(\sum_{k=1}^{n}x_{k+2}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{aX_n^2+bX_n^2}{X_n}=(a+b)X_n,$$ unde $X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$. Obținem:

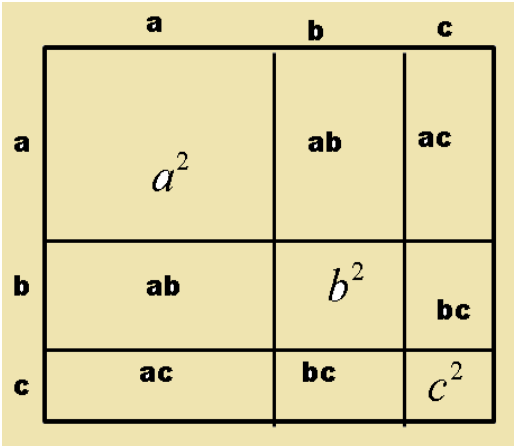
$$D_n+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge(a+b)X_n+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge 2\sqrt{ab}X_n+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\ge$$

$$\ge 2\sqrt{2\sqrt{ab}X_n\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}=2\sqrt{X_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}=2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}}\ge 2\sqrt{n^2}=2n.$$

Observație. Dacă $a=b=1$ și $n=3$ se obține problema 26261 din G.M.-B, nr. 2/2010, pag. 93, propusă de Cătălin Cristea.

DEMONSTRAȚII FĂRĂ CUVINTE

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$



Dumitru Preoteasa, Giurgiu

On 2023-2024 Albania Olympiad Problem 10-th Grade

by Neculai Stanciu

At 2023-2024 Albania Olympiad, 10-th grade was given the following:

Problem. If $a,b,c>0$, then prove that: $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$, (AO-2023).

The above problem was also appeared in RMT, No. 3-4, 2023, as the problem O.VIII.537. ([3]).

A kind of generalization of the above problem is:

If $a_k>0$ $(k=\overline{1,n})$ then is true the following inequality

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{cyclic}\left(\frac{a_2+a_3}{a_1^2}+\frac{a_1+a_3}{a_2^2}+\frac{a_1+a_2}{a_3^2}\right)\ge 6n^2.$$

Solution 1. We have the inequality: $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\ge\frac{18}{a+b+c}$, (1).

The inequality (1) is the problem L222 from *Recreații Matematice*, No. 1, 2012, proposed by *Florin Stanescu*. Many solutions and refinements of (1) was given by *Titu Zvonaru* ([1]).

By (1) and the inequality of *Harald Bergström* we obtain that:

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{a_2+a_3}{a_1^2}+\frac{a_1+a_3}{a_2^2}+\frac{a_1+a_2}{a_3^2}\right)\ge\sum_{cyclic}\frac{18}{a_1+a_2+a_3}\ge 18\cdot\frac{n^2}{\sum\limits_{cyclic}a_1+a_2+a_3}=$$

$$=18\cdot\frac{n^2}{3\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}=\frac{6n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k},$$ and first solution is complete.

Solution 2. We will prove that:

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c},\quad \text{(AO-2023-2024) \& (RMT - O.VIII.537)}.$$

For (AO-2023) , also we give two solutions.

I. $\sum\frac{a+b}{c^2}-2\sum\frac{1}{a}=\sum\left(\frac{a+b}{c^2}-\frac{2}{c}\right)=\sum\left(\frac{a-c}{c^2}+\frac{b-c}{c^2}\right)=$

$$=\sum\frac{a-c}{c^2}+\sum\frac{b-c}{c^2}=\sum\frac{a-c}{c^2}+\sum\frac{c-a}{a^2}=\sum\frac{(c-a)(c^2-a^2)}{c}\ge 0.$$

II. $\frac{a}{c^2}+\frac{1}{a}\ge\frac{2}{c}$; $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge\frac{2}{b}$; $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c}$; $\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{a}$; $\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$; $\frac{c}{b^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{b}$,

which by adding yields (2).

By (AO-2023) and the inequality of *Bergström* we obtain that:

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{a_2+a_3}{a_1^2}+\frac{a_1+a_3}{a_2^2}+\frac{a_1+a_2}{a_3^2}\right)\ge 2\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)\ge$$

$$\ge 2\cdot\frac{n^2}{\sum\limits_{cyclic}a_1}+2\cdot\frac{n^2}{\sum\limits_{cyclic}a_2}+2\cdot\frac{n^2}{\sum\limits_{cyclic}a_3}=\frac{6n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k},$$ and we are done.

In *Romanian Mathematical Magazine* (RMM), 2023, was published the following:

Problem. If $a,b,c>0$, then prove that: $\sum\limits_{cyclic}\left(\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\right)\ge\frac{54}{a+b+c}$.

From AO-2023 and *Bergström*'s inequality we obtain that:

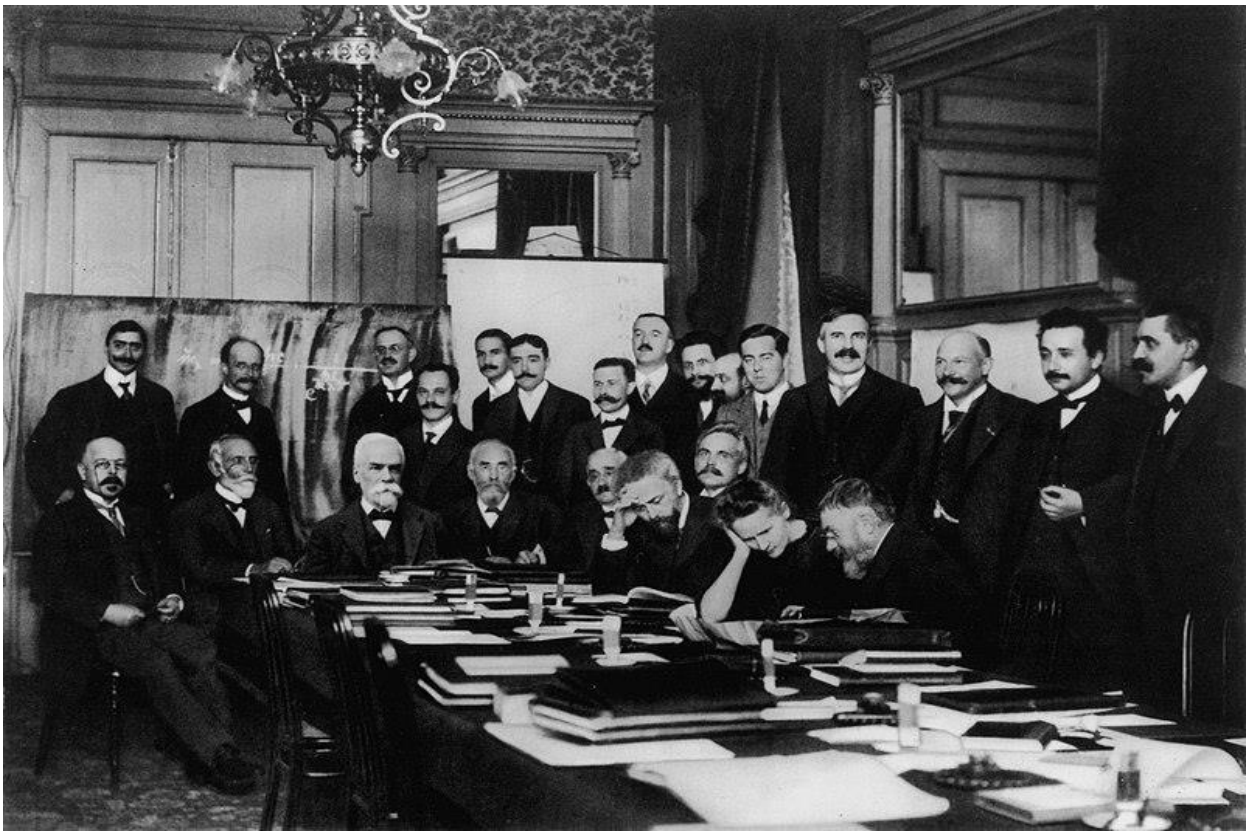
$$\sum_{cyclic}\left(\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\right)\geq 2\sum_{cyclic}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq$$

$$\geq 2\cdot\frac{3^2}{\sum_{cyclic}a}+2\cdot\frac{3^2}{\sum_{cyclic}b}+2\cdot\frac{3^2}{\sum_{cyclic}c}=\frac{6\cdot 3^2}{a+b+c}, \text{ q.e.d.}$$

Three solutions of the (AO-2023-2024) & (RMT - O.VIII.537) was given by ***Titu Zvonaru*** in [2].

References

1. Titu Zvonaru, *Câteva soluții la problema L222 din Recreații Matematice nr. 1/2012*, Recreații Matematice, Nr. 2, 2012, 120-123.
2. Titu Zvonaru, *În legătură cu două probleme din RMT nr. 3-4/2023*, Sclipirea Minții, Nr. 32, 2023, 8.
3. Neculai Stanciu, *Problema O.VIII.537.*, Revista de Matematică din Timișoara (RMT), nr. 3-4, 2023, 55.
*** Romanian Mathematical Magazine (RMM) – 2016-2024.



1911, Prima Conferință de la Brussels a oamenilor de știință pentru rezolvarea unor probleme din fizică și chimie: prezenți jos **Marie Curie** lângă **H. Poincare**, sus în picioare **A. Einstein** al doilea din dreapta în dreapta, **Max Planck** al doilea din stânga, în picioare.

Asupra unei probleme din Evaluarea Națională, 2024

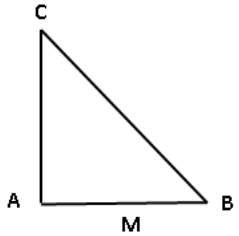
de Dumitru Preoteasa, Giurgiu

Materialul de față prezintă câteva metode de rezolvare ale unei probleme apărută la pagina 84 în cartea Evaluarea Națională 2024, Editura Paralela 45. Fără a cunoaște soluția autorului, deoarece problema este plasată la Subiectul al II-lea, prezentăm câteva soluții utile elevilor de clasa a VIII-a pentru ca aceștia să găsească și alte moduri de abordare a problemelor de geometrie.

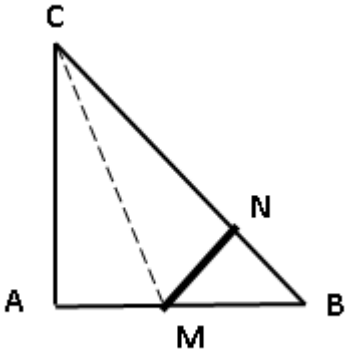
Problema 4.

Triunghiul ABC din figura alăturată este dreptunghic în A, iar punctul M este mijlocul catetei AB. Dacă AB=8 cm și AC=6 cm, atunci distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu...

(pag. 84, Evaluarea Națională, Editura Paralela 45.)



Soluția 1.



Se calculează ușor că BC=10 cm.
Se știe că o mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente, deci aria triunghiului CAM este egală cu aria triunghiului CMB, adică aria triunghiului CMB este ½ aria triunghiului ABC, respectiv ½ din 24, adică 12 (cm^2). Atunci aria triunghiului CMB= $\frac{MN \bullet BC}{2}$ =12, de unde MN= 2,4 (cm) ($MN \perp BC$).

Soluția 2.

Triunghiurile NBM și ABC sunt dreptunghice și asemenea, având unghiul comun B. Atunci $\frac{MB}{BC} = \frac{NM}{AC} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{NM}{6}$, de unde NM=2,4 (cm).

Soluția 3.

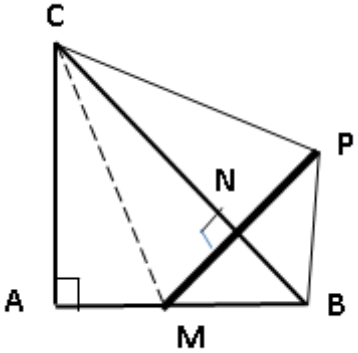
Fie P simetricul punctului M față de N. Triunghiurile BMC și BPC sunt congruente (cazul C.C.), deci au arii egale, adică 12 cm^2 fiecare. Pe de altă parte, patrulaterul convex CMBP este ortodiagonal, aria lui fiind 24 cm^2. Dar aria

CMBP= $\frac{BC \cdot MP}{2} \Rightarrow$ MP=48:10 $\Rightarrow$ MN=2,4 cm.

Soluția 4.

Din triunghiul dreptunghic MBN, avem sin<B= $\frac{MN}{MB} = \frac{MN}{4}$.

Din triunghiul dreptunghic ABC, avem sin<B= $\frac{AC}{BC} = \frac{6}{10}$, de unde rezultă, deasemenea, MN=2,4 cm.



"Nu este suficient să ai o minte bună; principalul lucru este să o folosești bine".

René Descartes
(1596 - 1650)

3. Probleme rezolvate

▪ Clasa a V-a

G:1201. Arătați că nu există un număr de patru cifre $\overline{abcd}$ astfel încât $\overline{abcd} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Cornelia Neacșu, Laura Zaharia, Craiova

Rezolvare:

Cum $\overline{abcd}$ se divide la 5 atunci d = 0 sau d = 5.

Rezultă d=5, adică $\overline{abc5} = 25a \cdot b \cdot c \Rightarrow$ $\overline{abc5}$ se divide cu 25, atunci c = 2 sau c = 7. Pentru c = 2 obținem că $\overline{ab25}$ nu se divide cu 2, și atunci c= 7. Rezultă $\overline{ab75} = 25a \cdot b \cdot 7 \Leftrightarrow$ $1000a + 100b + 75 = 25a \cdot b \cdot 7 \Leftrightarrow$ $40a + 4b + 3 = a \cdot b \cdot 7$. Deoarece numărul din partea stângă e impar, a și b nu pot fi pare. Așadar, $a, b \in \{1;3;5;7;9\}$.

Din $a(40-7b) + 4b + 3 = 0 \Rightarrow b \geq 7$. Pentru b = 7 se obține că 9a = 31, nu convine și pentru b = 9 obținem 23a = 39 , nu convine. Deci nu există astfel de numere cu proprietatea din enunț.

G:1202. Arătați că numărul a = 4 094 552^n + 2023^{n+1} – 2024^n – 2023, $n \in \mathbb{N}^*$, este compus.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare:

4 094 552 = 2023 · 2024, 2023^n · 2024^n + 2023^{n+1} – 2024^n – 2023 = 2023^n(2024^n + 2023) – (2024^n + 2023) = (2024^n + 2023)(2024^n – 1).

G:1203. Funcția Smarandache este definită astfel: S(n) este cel mai mic număr întreg m astfel încât factorialul său m! se divide la n. (Exemplu: S(6) = 3 deoarece 3! = 1·2·3 = 6, iar 6 se divide la 6, iar 3 este cel mai mic cu aceasta proprietate, deoarece 2! = 1·2 = 2 nu se divide la 6.)
Sa se calculeze S(7) si S(8)

Nicolae Ivaschescu, Canada

Rezolvare:

S(7) = 7, pentru ca 7! = 1·2·3·4·5·6·7 care este divizibil la 7, pe când factorialul unui număr mai mic 6! = 1·2·3·4·5·6 nu se divide la 7 pentru ca 7 este număr prim.
S(8) = 4 pentru ca 4! = 1·2·3·4 = 24 care se divide la 8, dar 3! = 1·2·3 = 6 nu se divide cu 8.
De exemplu,
S(15) = 5, deoarece 5! = 1·2·3·4·5 = 120, iar 120 se divide la 5;
mai mic decât 5 nu exista cu aceasta proprietate, deoarece de pilda
4! = 1·2·3·4 = 24 care nu se divide la 5.

G:1204. Se consideră un număr natural $\overline{abc}$ scris în baza 10.
Care din cele trei cifre trebuie suprimată astfel încât numărul obținut să fie de 11 ori mai mic decât $\overline{abc}$? În cazul când b=3, să se afle numerele $\overline{abc}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

Se analizează cele trei situații posibile.
Se suprimă cifra a $\Rightarrow \overline{abc}=11\cdot\overline{bc} \Rightarrow$ 100a+10b+c=110b+11c $\Rightarrow$ 100a=100b+c, fără soluție.
Se suprimă cifra c $\Rightarrow \overline{abc}=11\cdot\overline{ab} \Rightarrow$ 100a+10b+c=110a+11b $\Rightarrow$ c=10a+b, fără soluție.
Se suprimă cifra b $\Rightarrow \overline{abc}=11\cdot\overline{ac} \Rightarrow$ 100a+10b+c=110a+11c $\Rightarrow$ 10b=10a+10c $\Rightarrow$ b=a+c, singura soluție.
Dacă b=3 $\Rightarrow$ 3=a+c, de unde găsim perechile: 0 și 3; 1 și 2; 2 și 1; 3 și 0. Prima pereche nu se acceptă (trbuie a $\neq$ 0). Așadar, $\overline{abc}$ poate fi: 132, 231, 330.

G:1205. Determinați raportul cu cea mai mare valoare, format dintr-un număr natural de 3 cifre, scris în baza 10 și suma cifrelor sale.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

***Rezolvare*:**

$$k=\frac{\overline{abc}}{a+b+c}=\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=\frac{100(a+b+c)-90b-99c}{a+b+c}=100-\frac{90b+99c}{a+b+c}.$$

Evident, k are valoarea maximă dacă $f=\frac{90b+99c}{a+b+c}$ are valoarea minimă $\Leftrightarrow b=c=0$.

Așadar, $k_{max}=\frac{\overline{a00}}{a+0+0}=100.$

G:1206. a)Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n! se divide cu n+1.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n ! nu se divide cu n+1.
($n!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n,\ n\in\mathbb{N}^*,\ 0!=1$**).** **Mihaela Dăianu**, Craiova

Rezolvare:

a) Fie $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}^*,\ k\geq3$ **atunci n+1=2k cu** $k\leq n$ **și atunci** $n!=(2k-1)!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot k\cdot....\cdot(2k-1)$ **și se divide cu 2k=n+1.**

b) Se știe că există o infinitate de numere prime. Luăm n+1=p (p număr prim). Atunci $n!=1\cdot2\cdot3\cdot....\cdot(p-1)$ care nu se divide la p=n+1.

G:1207. Determinați $n\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $A=n!-39$ **să fie pătrat perfect (**$n!=1\cdot2\cdot3\cdot....\cdot n$**, pentru** $n\in\mathbb{N}^*,\ 0!=1$**)** **Alexie Elena**, Craiova

Rezolvare: Pentru $n\geq7$ observăm că $A=n!-42+3$ **dă restul 3 la împărțirea cu 7.**
Cum un pătrat perfect la împărțirea cu 7 dă restul 0,1,2, sau 4 urmează $n\leq6$**. Convine n = 5.**
Altfel, dacă $n\geq6$**,** $9|n!$ **și** $A=3(M_3-13)\neq k^2$ **deoarece** M_3-13 **nu e divizibil cu 3. Așadar,** $n\leq5$ **și convine doar n = 5.** $A=5!-39=81.$

G:1208. Să se determine mulțimea $A=\left\{\overline{abc}\ \middle|\ \overline{ab}=a+bc^c\right\}$ **.** **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Relația dată devine: $10a+b=a+b\cdot c^c \Leftrightarrow 9a=b(c^c-1)$. Cum $9a\leq81\Rightarrow b(c^c-1)\leq81\Rightarrow c^c\leq82\Rightarrow c\in\{1;2;3\}$. Obținem soluții doar pentru c = 2 că b = 3a și rezultă $A=\{132;262;392\}$.

G:1209. Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $\varphi(n)=\frac{2n}{5}$**, unde** $\varphi(n)$ **reprezintă indicatorul lui Euler (numărul de numere prime cu n și mai mici decât n).**

Simona Chiriță, Cârcea**, Gilena Dobrică**, Bechet

Rezolvare: Luăm $n=4\cdot5^k,\ k\in\mathbb{N}^*$. Atunci,

$$\varphi(n)=\varphi(4\cdot5^k)=\varphi(4)\cdot\varphi(5^k)=2\cdot\left(5^k-5^{k-1}\right)=\frac{2}{5}\cdot4\cdot5^k=\frac{2n}{5}.$$

G:1210. Să se arate că dacă numerele $2+\overline{ab}$ și $2\cdot\overline{ab}$, sunt răsturnate unul celuilalt, atunci numărul $\overline{ab}$, este număr prim.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Pentru cel mai mare număr de două cifre $\overline{ab}=99$, avem $\overline{ab}+2=101$ cu răsturnatul tot 101. (adică 101 este număr palindrom). Dar $2\cdot\overline{ab}=2\cdot 99=198$ are răsturnatul 891 care e diferit de 101.
Deci $\overline{ab}\langle 99$. Nici $\overline{ab}=98$ nu convine deoarece nu e prim.
Fie $\overline{ab}+2=\overline{xy}\langle 100\Rightarrow$ răsturnatul $2\cdot\overline{ab}=\overline{yx}$ este număr par tot de două cifre și rezultă $x\in\{2,4,6,8\}$.
Obținem $2\cdot\overline{xy}=2\cdot\left(\overline{ab}+2\right)=2\cdot\overline{ab}+4=\overline{yx}+4$ dar
$2\cdot\overline{xy}=2\cdot(10x+y)=10y+x+4\Rightarrow 19x=4(2y+1)$. Cum numerele 4 și 19 sunt prime între ele, rezultă $x\vdots 4\Rightarrow x\in\{4;8\}$. Pentru x = 4 obținem y= 9 iar $\overline{ab}=\overline{xy}-2=47$ care este număr prim. Pentru x = 8 nu putem obține $\overline{ab}$ număr prim.

G:1211. Dacă $A=\underbrace{333.....333}_{2021\ de\ 3}$ și $A=\underbrace{666.....666}_{2021\ de\ 6}$, determinați a 2022-a cifră numărând de la stânga și a 2022-a cifră numărând de la dreapta în produsul $A\cdot B$.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: $A=3\cdot\dfrac{10^{2021}-1}{9}$ și $B=6\cdot\dfrac{10^{2021}-1}{9}$.

Deci, $A\cdot B=2\cdot\dfrac{\left(10^{2021}-1\right)^2}{9}=2\cdot\dfrac{10^{2021}(10^{2021}-1)}{9}-2\cdot\dfrac{10^{2021}-1}{9}$.

Scrierea primei fracții este $222...222000...000$ - 2021 de 2 urmați de 2021 de 0;
Scrierea celei de a doua fracții este 222…222 - 2021 de 2.
Scrierea zecimală a produsului $A\cdot B$ este: $222...221777...7778$ - 2020 de 2, apoi cifra 1, după care 2020 de 7, și ultima cifră este 8.
Deci, a 2022-a cifră a produsului $A\cdot B$ numărând de la stânga este 7 și a 2022-a cifră a produsului $A\cdot B$ numărând de la dreapta este 1.

G:1212. Arătați că nu există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $A=28^n+19^n+10^n+3^{n+1}+5$ să fie pătrat perfect

Popescu Veronica, Craiova

Rezolvare: Dacă n = 0 avem $A=1+1+1+3+5=11$. **Dacă $n\geq 1$ avem**
$A=(3\cdot 9+1)^n+(2\cdot 9+1)^n+(9+1)^n+3^{n+1}+5=M_9+1+M_9+1+M_9+1+M_9+5=M_9+8\neq k^2$
(resturile la împărțirea cu 9 ale unui pătrat perfect pot fi doar 0, 1, 4 sau 7.

G:1213. Arătați ca există o scriere a numărului 2022 ca sumă a unui număr minim de numere naturale nenule și ca produsul acelor numere naturale.

Ionel Tudor, Călugăreni**,** Giurgiu

Rezolvare:

$2022=1+1+1+...+1=2\cdot 3\cdot 337=1011\cdot 2=1011+2+(\underbrace{1+1+....+1}_{1009\ de 1})=1011\cdot 2\cdot(\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot .....\cdot 1}_{1009\ de 1})$.

$2022=337+6+(\underbrace{1+1+....+1}_{1679\ de 1})=337\cdot 6\cdot(\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot .....\cdot 1}_{1679\ de 1})$ cu $1681\rangle 1011$ termeni.

$2022=674+3+(\underbrace{1+1+....+1}_{1345\ de 1})=674\cdot 3\cdot(\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot .....\cdot 1}_{1345\ de 1})$ cu $1347\rangle 1011$ termeni. Deci, scrierea cerută este

$2022=1011+2+(\underbrace{1+1+....+1}_{1009\ de 1})=1011\cdot 2\cdot(\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot .....\cdot 1}_{1009\ de 1})$ cu numărul minim de 1011 termeni.

G:1214. Reconstituiți înmulțirea $p^q \cdot \overline{pq} \cdot \overline{nn} = \overline{pmpr}$ știind că p, q, r sunt consecutive.

Nicolae Ivășchescu, Canada

***Rezolvare*:** În cazul $p=1, q=2, r=3 \Rightarrow \overline{1m13} = 1\cdot 12 \cdot \overline{nn} = 1\cdot 12\cdot 11\cdot n \Rightarrow$ membrul drept este număr par, dar membrul stânt este impar, deci nu verifică.

În cazul $p=2, q=3, r=4 \Rightarrow \overline{2m24} = 2\cdot 23\cdot 11\cdot n = 2024\cdot n \Rightarrow n=1, m=0$; deci obținem $2024 = 2^3 \cdot 23 \cdot 11$. Acesta este singurul caz care verifică.

Dacă am avea $p=3, q=4, r=5 \Rightarrow 3^4 \cdot 34\cdot 11\cdot n = 81\cdot 374\cdot n = 30284\cdot n >$ un număr de patru cifre.

▪ Clasa a VI-a

G:1215. Un număr natural n împărțit la 7 dă restul 3, iar împărțit la 4 dă restul 1. Ce rest se obține la împărțirea lui n la 28?

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Se utilizează teorema împărțirii cu rest și se obține:

$\begin{cases} n = 7x+3 \\ n = 4y+1 \end{cases}$. Se adună 11 în ambele egalități și rezultă: $\begin{cases} n+11 = 7x+14 \\ n+11 = 4y+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+11 = 7(x+2) \\ n+11 = 4(y+3) \end{cases}$

$\Rightarrow$ 7(x+2)=4(y+3). Deoarece numerele 7 și 4 sunt prime între ele, rezultă că 7 divide y+3 și 4 divide x+2, sau

$\begin{cases} x+2 = 4k \\ y+3 = 7p \end{cases}$. În acest caz, n+11 este un multiplu al lui 28, deci n+11=28q $\Rightarrow$ n=28q-11=(28q-28)+(28-11)=28(q-1)+17. Cum 17<28, restul cerut este 17.

G:1216. Arătați că ecuația $8x^2 - 5y^2 = 7$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Ileana Stanciu, Craiova

Rezolvare: Evident, y trebuie să fie impar. Fie $y = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$. Atunci, $8x^2 - 5(2k+1)^2 = 7 \Rightarrow$ $8x^2 - 20(k^2+k) = 12 \Rightarrow 2x^2 = 5k(k+1)+3$, ceea ce e fals.

G:1217. Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea $1 + 2^{3n} + 3^{3n} \le 6^{2n}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

Rezolvare: Observăm că $1 + 2^3 + 3^3 = 6^2$ și atunci $6^{2n} = 36^n = \left(1+2^3+3^3\right)\cdot 36^{n-1}$. Adunând inegalitățile $1 \le 36^{n-1}$ (1); $2^{3n} \le 36^{n-1}\cdot 2^3 \Leftrightarrow 2^{n-1} \le 9^{n-1}$ (2); $3^{3n} \le 36^{n-1}\cdot 3^3 \Leftrightarrow 3^{n-1} \le 4^{n-1}$ (3), se obține relația din enunț.

G:1218. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \cdot S(n) = n + 2023$ unde S(n) reprezintă suma cifrelor numărului natural n.

Grigorie Dan, Craiova

Rezolvare:

Deoarece $n - S(n)$ se divide cu 9 rezultă $n = S(n) + 9a,\ a \in \mathbb{N}$ și atunci $n(n-9a) = n + 2023$ adică $n^2 - n = 9an + 2023$. Cum $9an + 2023$ dă restul 1 la împărțirea cu 3 iar $n^2 - n = n(n-1)$ la împărțirea cu 3 dă restul 0 sau 2, obținem concluzia.

G:1219. Determinați primele 605 zecimale după virgulă ale numărului $\frac{1}{2^{2022}}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

Rezolvare:

$1024>1000 \Leftrightarrow 2^{10}>10^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{10}}<\frac{1}{10^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{200}<\left(\frac{1}{10^3}\right)^{200} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2000}}<\frac{1}{10^{600}}\Big|\cdot\frac{1}{2^{22}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{2000}\cdot 2^{22}}<\frac{1}{10^{600}\cdot 2^{22}}$ (R_1) și cum $2^{22}>10^6 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{22}}<\frac{1}{10^6}$ și relația (R_1) devine

$\frac{1}{2^{2022}}<\frac{1}{10^{600}\cdot 10^6} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2022}}<\frac{1}{10^{606}}=\overline{0,\underbrace{00...01}_{605\text{ ori}}}$.

Așadar, primele 605 zecimale ale lui $\frac{1}{2^{2022}}$ sunt numai zerouri.

G:1220. Câte numere naturale sunt divizibile cu 2022 și au exact 2022 divizori naturali ?

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin și **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*:** Fie n numărul natural care este divizibil cu 2022 și are 2022 divizori naturali.

Fie $n=p_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot p_k^{\alpha_k}$, descompunerea lui n în factori primi, unde $p_1,...,p_k$ sunt numere prime distincte și $\alpha_1,...,\alpha_k$ numere naturale. Astfel că numărul divizorilor lui n este dat de: $\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)=2022=2\cdot 3\cdot 337$.

Deoarece n este divizibil cu 2022, rezultă că fiecare factor prim al lui 2022 este un factor al lui n. Deci, $k=3$ și $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\{1,2,336\}$. Așadar, trebuie să avem $\{p_1,p_2,p_3\}=\{2,3,337\}$. Prin urmare avem șase posibilități pentru n.

$2\cdot 3^2\cdot 337^{336}$, $2\cdot 3^{336}\cdot 337^2$, $2^2\cdot 3\cdot 337^{336}$, $2^2\cdot 3^{336}\cdot 337$, $2^{336}\cdot 3^2\cdot 337$, $2^{336}\cdot 3\cdot 337^2$.

G:1221. Determinați numărul natural $\overline{a(a-4)(a-3)}$ știind că el este egal cu cubul sumei cifrelor sale.

Nicolae Ivășchescu, Canada

***Rezolvare*:** Suma cifrelor numărului este $3a-7$. Obținem că $\overline{a(a-4)(a-3)}=(3a-7)^3$. Cel mai mic număr pentru care cubul său are 3 cifre este 9. Deci trebuie să avem $3a-7<9$, adică $a<6$.

Din scrierea numărului $\overline{a(a-4)(a-3)}$ deducem că $a\geq 4$. Așadar, $a\in\{4,5\}$. Pentru $a=4$ obținem $401=125$, fals. Pentru $a=5$ obținem $512=512$, convine. Deci, numărul $\overline{a(a-4)(a-3)}=512$.

G:1222. Arătați că ecuația $y^2=25x^2+26$ nu are soluții numere întregi.

elev **Mușat Horia, Vlad Oroviceanu**, Craiova

Rezolvare: Analizăm situațiile: x par: $x=2k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=2l,\ l\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2l^2=50k^2+13$, fals!

x impar: $x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=2l+1,\ l\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4l^2+4l+1=25\left(4k^2+4k+1\right)+26\Rightarrow$

$2l(l+1)=50k(k+1)+25$, fals!

G:1223. Să se rezolve în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația $x^2+py+p=xy+(2p+1)x$, unde p este un număr prim dat.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Avem

$y(x-p)=x^2-(2p+1)x+p \Leftrightarrow y=\frac{x^2-px-(p+1)x+p}{x-p}=\frac{x(x-p)-(p+1)x+p(p+1)-p^2}{x-p}=$

$=x-p-1-\frac{p^2}{x-p}\in\mathbb{Z}\Rightarrow (x-p)\big|p^2$. Dând valori lui $x-p\in\{\pm 1;\pm p;\pm p^2\}$ obținem mulțimea soluțiilor: $S=\{(p-1,p^2-2);(p+1;-p^2);(0;-1);(2p;-1);(-p^2+p;-p^2);(p^2+p;p^2-2)\big|p\ prim\}$

G:1224. Se consideră mulțimile $A=\{n\in\mathbb{N}\big|n\vdots 17\}$ și $B=\{n\in\mathbb{N}\big|(n-22)\vdots 23\}$.

Arătați că $2023\in A\cap B$. Aflați câte numere naturale mai mici decât 10000 se găsesc în mulțimea $A\cap B$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare*:**

$2023=17\cdot 119\vdots 17$ și $2023-22=2001=23\cdot 87\vdots 23\Rightarrow 2023\in A\cap B$.

$n\in A\cap B\Rightarrow n\in A\Rightarrow n=17c_1$ și $n\in B\Rightarrow n=23c_2+22$ unde $c_1,c_2\in\mathbb{N}$. Atunci,

$17c_1=23c_2+22\Rightarrow 17(c_1-c_2)=2(3c_2+11)=6c_2+22$ (*). Cum 17 și 2 sunt prime între ele rezultă

$(c_1-c_2)\vdots 2$ și $(3c_2+11)\vdots 17\Rightarrow 3c_2+11=17l,\ l\in\mathbb{N}\Rightarrow c_2=\frac{17l-11}{3}=6l-3-\frac{l+2}{3}\in\mathbb{N}$, dacă

$3|(l+2)\Rightarrow l+2=3k,\ k\in\mathbb{N}^*$. Din relația (*) rezultă

$17(c_1-17k+15)=6(17k-15)+22\Rightarrow 17c_1=391(k-1)+68\Rightarrow$

$n=17c_1=391k-323=391(k-1)+68=391q+68$ unde $q=k-1\in\mathbb{N}$, așadar,

$A\cap B=\{n\in\mathbb{N}|n=391q+68,q\in\mathbb{N}\}$.

Numerele din $A\cap B$ mai mici decât 10000 trebuie să verifice inegalitatea

$391q+68\langle 10000\Rightarrow 0\le q\langle 25,157$ deci în mulțimea $A\cap B$ sunt 26 de numere mai mici decât 10000, care se obțin prin egalitățile $q\in\{0;1;2;3;....,25\}$.

G:1225. Fie $a,b,c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Să se determine numerele a,b,c știind că: $2^a+2^{b+1}+2^{c+2}=56$.

Lăzărescu Dragoș, Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

Din $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2\cdot(a+b+c)}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cdot a=b+c,2\cdot b=a+c,2\cdot c=a+b\Rightarrow a=b=c$

Înlocuind în a doua relație, obținem:

$2^a+2^{a+1}+2^{a+2}=56\Rightarrow 2^a\cdot(1+2+4)=56\Rightarrow a=3\Rightarrow a=b=c=3$

G:1226. În triunghiul ABC se cunosc AB=7cm și AC=4cm. Perpendiculara dusă prin mijlocul D al lui BC , pe bisectoarea unghiului ∢A, intersectează această bisectoare , în punctul M. Dacă $AB\cap DM=\{E\}$ și $AC\cap DM=\{F\}$ să se calculeze BE și AF.

Ionel Tudor , Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Din enunț reiese că punctele E,D,M și F sunt coliniare , $AM\perp BF$ și [AM este bisectoarea unghiului ∢A , în triunghiul AEF. Atunci [AM] este înălțime și bisectoare în triunghiul AEF.

Deci $\Delta\ AEF$ este triunghi isoscel cu $[AE]\equiv[AF]$ și $\sphericalangle AEF\equiv\sphericalangle AFE$

Considerăm punctul $N\in(EF)$, astfel încât $CN\,||\,AB$. Atunci $CN\,||\,AE$ și $\sphericalangle CNF\equiv\sphericalangle AEF$ ca unghiuri corespondente. Cum $\sphericalangle AEF\equiv\sphericalangle AFE\Rightarrow\sphericalangle CNF\equiv\sphericalangle CFN$, deci triunghiul CNF este triunghi isoscel cu $CF\equiv CN$.

$BE\,||\,CN$ și BC secantă, rezultă $\sphericalangle EBD\equiv\sphericalangle NCD$(unghiuri alterne interne). De asemenea, $\sphericalangle BDE\equiv\sphericalangle CDN$ și din $BD\equiv DC$ rezultă $\Delta\ BDE\equiv\Delta\ CDN$ (U.L.U). De aici se obține $[BE]\equiv[CF]$.

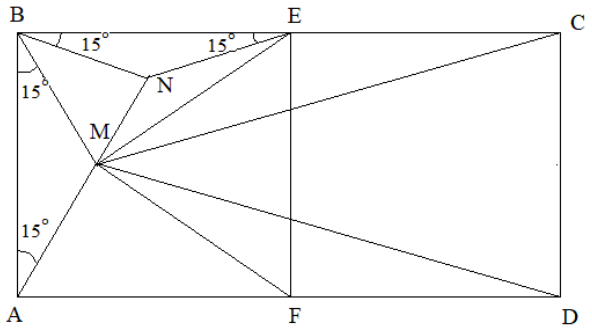
Din $BE=AB-AE=AB-AF=AB-(AC+CF)=AB-AC-CF\Rightarrow BE+CF=AB-AC\Rightarrow$

$2BE=7-4=3\Rightarrow BE=1,5$ și atunci $AF=AC+CF=4+BE=5,5$.

G:1227. Fie ABCD un dreptunghic cu $AB=l,\ BC=2l$ și M un punct în interiorul său astfel încât $m(\sphericalangle MAB)=m(\sphericalangle MBA)=15^0$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului MCD.

Dan Grigorie, Lucian Tuțescu - Craiova

Rezolvare: Soluție: Fie E și F mijloacele laturilor BC și AD ale dreptunghiului. Cum ABEF este pătrat demonstrăm că $\Delta\ MEF$ este echilateral (proprietate cunoscută).



Se consideră un punct N în interiorul $\Delta\ BME$ astfel încât $\Delta\ BNE \equiv \Delta\ BMA$. Atunci $\Delta\ BMN$ este echilateral (având $\sphericalangle NBM = 60^0$ și $BM = BN$).
Se arată în continuare că $\Delta\ BNE \equiv \Delta\ MNE$ **(L.U.L),** $\sphericalangle ENM = 360^0 - 60^0 - 150^0 = 150^0 \Rightarrow ME = BE$ și asemănător MF=AF considerând $\Delta\ EMC$ care este isoscel. Cum $\sphericalangle BEM = 30^0 \Rightarrow \sphericalangle MEC = 150^0 \Rightarrow \sphericalangle ECM = \sphericalangle EMC = 15^0$. Analog, $\sphericalangle FMD = 15^0 \Rightarrow \sphericalangle CMD = 30^0$.
Cum $\Delta\ MCD$ este isoscel rezultă $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = \dfrac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0$.

▪ Clasa a VII-a

G:1228. Să se afle numerele naturale x, y și z (z ≠ 0), știind că $\dfrac{29}{6} = \dfrac{xyz + x + z}{yz + 1}$.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare:

Prelucrând membrul drept al egalității, se obține: $\dfrac{xyz + x + z}{yz + 1} = \dfrac{x(yz+1) + z}{yz + 1} = x + \dfrac{z}{yz+1} =$

$= x + \dfrac{1}{\dfrac{yz+1}{z}} = x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}$. Apoi, $\dfrac{29}{6} = 4 + \dfrac{5}{6} = 4 + \dfrac{1}{\dfrac{6}{5}} = 4 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{5}}$. Prin identificare se găsește că x=4, y=1 și z=5.

G:1229. Să se arate că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{11}$ **este irațional.**

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Presupunem prin absurd că numărul dat este rațional,

$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{11} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{11} + a \,|()^2 \Rightarrow \sqrt{6} - a\sqrt{11} = \dfrac{a^2}{2} + 3 \in \mathbb{Q}$. Se ridică din nou la puterea a doua și rezultă $\sqrt{66} = \dfrac{-a^4 + 32a^2 - 12}{8a} \in \mathbb{Q}$, fals deoarece 66 nu este pătrat perfect.

G:1230. Fie $q \in \mathbb{N}$ **astfel încât** $(2023 + \sqrt{q})(2023 + \sqrt{q+1})$ **este număr rațional. Arătați că q = 0.**

Lavinia Trincu, Craiova

Rezolvare:

Fie $(2023 + \sqrt{q})(2023 + \sqrt{q+1}) = r \in \mathbb{Q}^*_+,\ r \geq 2023.$ Rezultă

$2023^2 + 2023(\sqrt{q} + \sqrt{q+1}) + \sqrt{q(q+1)} = r \Rightarrow 2023(\sqrt{q} + \sqrt{q+1}) = r - 2023^2 - \sqrt{q(q+1)}$. Ridicând la

pătrat obținem $\sqrt{q(q+1)} \in \mathbb{Q}$ sau $q^2+q=k^2,\ k\in\mathbb{N}$ de unde
$q^2 \le q^2+q \langle (q+1)^2 \Rightarrow q^2+q=q^2 \Rightarrow q=0.$

G:1231. Determinați numerele prime p astfel încât numărul
$A=5^{p^3}+7^{p^3}+9^{p^3}+11^{p^3}+13^{p^3}+15^{p^3}+17^{p^3}$ **să se dividă cu p.**

Grigorie Dan,Craiova

Rezolvare:

Din mica teoremă a lui Fermat $a^p \equiv a(\text{mod } p) \Rightarrow\ 5^{p^3}=\left(5^{p^2}\right)^p \equiv 5^{p^2}=\left(5^p\right)^p \equiv 5^p \equiv 5(\text{mod } p)$.

Așadar, $5^{p^3}\equiv 5(\text{mod } p),\ 7^{p^3}\equiv 7(\text{mod } p),\ 9^{p^3}\equiv 9(\text{mod } p), 11^{p^3}\equiv 11(\text{mod } p),$ etc.
Prin adunarea acestora se obține $A\equiv 77(\text{mod } p)\Rightarrow A-77$ se divide cu p. Cum din ipoteză A se divide cu p obținem p = 7 sau p =11 singurele soluții.

G:1232. Să se calculeze media geometrică a numerelor
$a=\sqrt{(2+4+6+8+...+4044)+2023}$ **și** $b=6\cdot\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{48-24\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+7}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$a=\sqrt{2(1+2+3+4+.....+2022)+2023}=\sqrt{2\cdot\frac{2022\cdot 2023}{2}+2023}=\sqrt{2023^2}=2023.$$

$$b=6\cdot\left|1-\sqrt{3}\right|+\sqrt{(6-2\sqrt{3})^2}+\frac{4\sqrt{3}-7}{48-49}=\ 6\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)+\left|6-2\sqrt{3}\right|+\frac{4\sqrt{3}-7}{-1}=$$
$$=6\sqrt{3}-6+6-2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+7=7.$$

Media geometrică este $m_g(a;b)=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{2023\cdot 7}=\sqrt{17^2\cdot 7^2}=17\cdot 7=119.$

G:1233. Rezolvați, în $\mathbb{Z}$, inecuațiile a) $(x+1)^2\le 3\le (x+2)^2$; b) $(x+2)^2\le 3\le (x+1)^2$

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Din $x^2+2x+1\le x^2+4x+4\Rightarrow 2x\ge 3\Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;.....\}$. Convine doar x=0;
Analog, $2x\le -3\Rightarrow x\in\{.....,-3;-2\}$. Convine doar x = -3;

G:1234. Aflați cifra x știind că: $\overline{1,1(x)}+\overline{2,2(x+1)}+\overline{3,3(x+2)}+\overline{4,4(x+3)}+\overline{5,5(x+4)}=\overline{16,7(x)}$.

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare:

$$\overline{1,1(x)}=1\frac{\overline{1x}-1}{90}=1\frac{10+x-1}{90}=1\frac{9+x}{90};\ \overline{2,2(x+1)}=2\frac{19+x}{90};\ \overline{3,3(x+2)}=3\frac{29+x}{90};$$
$$\overline{4,4(x+3)}=4\frac{39+x}{90};\ \overline{5,5(x+4)}=5\frac{49+x}{90};\ \overline{16,7(x)}=16\frac{63+x}{90}.$$

Obținem: $1+2+3+4+5+\dfrac{9+x+19+x+29+x+39+x+49+x}{90}=16+\dfrac{63+x}{90}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{5x+145}{90}=1+\frac{63+x}{90}\Leftrightarrow 5x+145=153+x\Leftrightarrow x=2.$$

G:1235. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+...+\dfrac{1}{1+2+3+...+x}=\dfrac{2023}{1012}$

Rezolvare: **Gobej Adrian,** Curtea de Argeș

Folosind suma standard $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, ecuația devine

$$1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{2023}{1012}\Leftrightarrow \frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{2023}{1012}-\frac{1012}{1012}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1011}{1012}\Big|:2\Leftrightarrow \overset{x+1)}{\frac{1}{2}}-\overset{2)}{\frac{1}{x+1}}=\frac{1011}{2024}\Leftrightarrow \frac{x+1-2}{2(x+1)}=\frac{1011}{2024}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=\frac{1011}{1012}\Leftrightarrow 1012x-1012=1011x+1011\Rightarrow x=1011+1012\Rightarrow x=2023.$$

G:1236. Arătați că dacă x, y sunt numere naturale nenule care respectă relația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2022}$, atunci $A=\sqrt{\left(\frac{x}{6}-337\right)\left(\frac{y}{6}-337\right)}$ este număr natural. **Gobej Adrian**, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Din $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2022}\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2022}\Rightarrow xy=2022(x+y)\ (*)$

Cum $\left(\frac{x}{6}-337\right)\left(\frac{y}{6}-337\right)=\frac{xy}{36}-\frac{337}{6}(x+y)+337^2\overset{\text{folosind }(*)}{=}\frac{\cancel{2022}^{337}(x+y)}{\cancel{36}^{6}}-\frac{337}{6}(x+y)+337^2=$

$=337^2\Rightarrow A=\sqrt{337^2}=337\in\mathbb{N}$.

G:1237. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=p^2-1$ unde p este un număr prim.

***Rezolvare*:** **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Ecuația se mai scrie $\sqrt{x}+\sqrt{y}=p^2-1-\sqrt{xy}\,|()^2\Rightarrow x+y+2\sqrt{xy}=(p^2-1)^2-2(p^2-1)\sqrt{xy}+xy$

$2p^2\cdot\sqrt{xy}=(p^2-1)^2+xy-x-y\Rightarrow\ \sqrt{xy}\in\mathbb{N}\Rightarrow xy$ este pătrat perfect. Fie

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{x}=k-\sqrt{y}\Rightarrow x=k^2+y-2k\sqrt{y}\Rightarrow\sqrt{y}\in\mathbb{N}$, adică y este pătrat perfect.

Notăm $x=a^2, y=b^2,\ a,b\in\mathbb{N}$ și ecuația devine $a+b+ab+a=p^2\Leftrightarrow(a+1)(b+1)=p^2$. În final obținem soluțiile $S=\left\{(0;(p^2-1)^2);((p-1)^2;(p-1)^2);((p^2-1)^2;0),\ p\ \ prim\right\}$.

G:1238. Pentru un număr $k\in\mathbb{N}^*$ să se calculeze diferența $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)$ și suma $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$. Deduceți formula pentru suma pătratelor primelor n numere naturale nenule: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n\geq 1$. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Pentru orice număr $k\in\mathbb{N}^*$ avem

$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=k\cdot(k+1)\cdot(k+2-k+1)=3k\cdot(k+1)$. Atunci, $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=$

$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}3k(k+1)=\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\right]$. Dând valori lui k de la 1 la n obținem că

valoarea sumei este $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}\cdot n(n+1)(n+2)$. Altfel scris, avem

$\left(1^2+1\right)+\left(2^2+2\right)+...+\left(n^2+n\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ de unde putem deduce valoarea sumei din enunț.

G:1239. Determinați aria trapezului $ABCD$ cu laturile paralele AB și CD de lungimi 15 și 30 și laturile AD și BC de lungimi 9 și 12.

Neculai Stanciu, Buzău

Soluție 1. Fie K mijlocul lui DC.Unim K cu A și B.Atunci $AB = DK = KC$ =15. Din $AB = DK$ și AB paralel cu DK avem AD și BK sunt paralele și egale, deci $BK = 9$. Din $AB = KC$ și AB paralel KC avem AK și BC sunt paralele și egale, deci $AK = 12$. Atunci, trapezul este împărțit în trei triunghiuri, fiecare cu laturile de lungimi 9, 12 și 15. Un triunghi cu laturile 9, 12 și 15 este dreptunghic ($9^2 + 12^2 = 15^2$) și are aria $\frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Atunci, aria trapezului este $3 \cdot 54 = 162$.

Soluție 2. Fie BF paralel cu AD cu F pe CD. Atunci $ABFD$ este paralelogram cu $BF = AD = 9$ și $DF = AB = 15$. Deoarece triunghiul BFC are lungimile laturilor 9, 12 și 15, din reciproca teoremei lui Pitagora avem că BFC este dreptunghic cu aria 54.

De asemenea, deoarece BF este mediană în triunghiul DBC, aria triunghiului DBF este tot 54 și este mai departe egală cu aria lui ABD.

$$Aria(ABCD) = Aria(ABD) + Aria(BDK) + Aria(BKC) = 3 \cdot 54 = 162 .$$

Soluția 3. Fie $AM \perp DC$, $BN \perp DC$ cu M și N pe CD.Notăm $AM = h$ și $DM = x$.

$x^2 + h^2 = 81, NC = 15 - x, (15 - x)^2 + h^2 = 144$.Rezultă $x = \frac{81}{15}$ și $h = \frac{9 \cdot 12}{15}$. Obținem

$$Aria(ABCD) = \frac{(30+15)}{2} \cdot \frac{9 \cdot 12}{15} = 162 .$$

Soluția 4. Fie $AP \perp DC$, $BQ \perp DC$ cu P și Q pe CD. Înlăturăm dreptunghiul $ABPQ$ din trapez și lipim triunghiurile ADP, respectiv BCQ pe linia AP respectiv BQ, astfel că $DC = 15$. Se obține astfel triunghiul DEC cu $DE = DA = 9$ și $CE = CB = 12$. Din reciproca teoremei lui Pitagora ($9^2 + 12^2 = 15^2$) triunghiul DEC este dreptunghic. Apoi $\sin(\angle EDC) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ de unde înălțimea trapezului $ABCD$ este $d(E, DC) = ED \cdot \sin(\angle EDC) = 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5}$. Rezultă

$$Aria(ABCD) = \frac{(30+15)}{2} \cdot \frac{9 \cdot 4}{5} = 162 .$$

Soluția 5. Fie $DA \cap BC = \{P\}$.Avem AB paralel cu CD, $\angle PAB = \angle PDC$, $\angle PBA = \angle PCD$, de unde triunghiurile PAB și PDC sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.Se obține $PA = 9$ și $PB = 12$.Din reciproca Teoremei lui Pitagora triunghiurile APB și DPC sunt dreptunghice cu $Aria(PDC) = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$, respectiv $Aria(PAB) = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$.

$$Aria(ABCD) = Aria(PDC) - Aria(PAB) = 162.$$

Soluția 6. Fie $DA \cap BC = \{P\}$.Avem AB paralel cu CD, AB linie mijlocie în ΔPCD și mai departe se continuă ca în soluția 5.

G:1240. Într-un triunghi oarecare ABC ,înălțimea [AN], $N \in (BC)$ se prelungește cu $[ND] \equiv [AN]$ iar mediana $[AM]$, $M \in (BC)$ se prelungește cu $[ME] \equiv [AM]$.

Să se arate că :

a) Patrulaterul ABDM este un deltoid convex

b) Patulaterul BCED este trapez isoscel.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Din enunț rezultă că dreapta BC este mediatoarea segmentului $[AD]$. Atunci $[AB]$ și $[BD]$ sunt segmente simetrice față de BC. Cum punctele B,N,M,C sunt coliniare , avem că în patrulaterul convex

ABDM, diagonala $[BM]$ este axă de simetrie. Conform definiției deltoidului convex (patrulaterul convex în care una dintre diagonale este axă de simetrie), rezultă că patrulaterul ABDM este deltoid convex.

b) $[NM]$ linie mijlocie în triunghiul ADE (N, respectiv, M mijloace conform ipotezei) obținem $NM \parallel DE$ și cum $[NM] \subset BC \Rightarrow BC \parallel DE$, adică patrulaterul BCDE este trapez.

Din $AN \perp BC \ si \ BC \parallel DE \Rightarrow AD \perp DE \Rightarrow \Delta \ ADE$ este dreptunghic.

Cum $[DM]$ este mediană în $\Delta \ ADE$, avem $MD = \frac{AE}{2} = ME = AM$ (1). În triunghiul MAD isoscel cu $MN \perp AD \Rightarrow [MN$ este și bisectoare, deci $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle DMN$. Dar $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CME$ (opuse la vârf). Rezultă $\sphericalangle BMD \equiv \sphericalangle DMB \equiv \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CME$ (2). Din (1), (2) și din faptul că $[BM] \equiv [CM]$ rezultă $\Delta \ BMD \equiv \Delta \ CME$ (L.U.L). De aici obținem că $[BD] \equiv [CE]$, deci trapezul BCED este isoscel.

<u>Observație:</u> Patrulaterul concav ACDM având diagonala $[CM]$ axă de simetrie, este un deltoid concav.

▪ Clasa a VIII-a

G:1241. Fie ecuația $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.
a) Arătați că ecuația nu are soluții numere naturale;
b) Găsiți relațiile în numere întregi ale ecuației.

Răzvan Lupu, **Roxana Vasile**, Craiova

Rezolvare:

Scriem ecuația de gradul doi în x: $x^2 - (y-2)x - 3y - 6 = 0$. Discriminantul $\Delta = (y-2)^2 + 4(3y+6) = (y+4)^2 + 12 = k^2 \Rightarrow k^2 - (y+4)^2 = 12 \Rightarrow (k-y-4)(k+y+4) = 12$. Cum k și y+4 au aceeași paritate obținem soluțiile: $(x;y) \in \{(-6;-6),(0;-2),(-4;-2),(-2;-6)\}$.

G:1242. Demonstrați că
$(x-y)^{2023}(x-z)^{2023} + (y-x)^{2023}(y-z)^{2023} + (z-x)^{2023}(z-y)^{2023} \geq 0, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

***Rezolvare*:** Fără a diminua generalitatea problemei, presupunem $x \leq y \leq z$.

Notăm $\begin{cases} y - x = \alpha \geq 0 \\ z - y = \beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = z - x \\ -(\alpha+\beta) = x - z \end{cases}$ Inegalitatea din enunț devine

$-\alpha^{2023} \cdot [-(\alpha+\beta)]^{2023} - \alpha^{2023} \cdot \beta^{2023} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\alpha(\alpha+\beta)]^{2023} - (\alpha \cdot \beta)^{2023} + [(\alpha+\beta)\cdot\beta]^{2023} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^{2023} \underbrace{\left[(\alpha+\beta)^{2023} - \beta^{2023}\right]}_{\geq 0} + (\alpha+\beta)^{2023} \cdot \beta^{2023} \geq 0$, inegalitate evidentă.

G:1243. Pentru $a,b,c \rangle 0$, $\sqrt{abc} \rangle 3$, calculați $\frac{1}{\sqrt{abc}-3} \cdot \sqrt{\frac{abc+9}{a} - 6 \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}}}$. **Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $\frac{1}{\sqrt{abc}-3} \cdot \sqrt{\frac{abc+9}{a} - 6 \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{abc}-3} \cdot \frac{\sqrt{\left(\sqrt{abc}-3\right)^2}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

G:1244. Descompuneți în factori numărul 454950. Arătați că numărul $m=1+674^{2023}+674^{2024}$ este divizibil cu 454951

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Folosim criteriile de divizibilitate cu 2,5 , 9 și obținem $454950=2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 337$, iar 337 este număr prim. $674=2\cdot 337$ și $2022=3\cdot 674$. Rezultă $674^{2023}=674^{3\cdot 674+1}$ și $674^{2024}=674^{3\cdot 674+2}$.

Cum $454950=2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 337=674\cdot 675=674^2+674\Rightarrow$ $454951=674^2+674+1$. Notăm $674=n\Rightarrow$ $m=n^{3n+2}+n^{3n+1}+1$ iar $454951=n^2+n+1$ și trebuie să arătăm că m se divide cu n^2+n+1.

Scriem succesiv: $m=n^2\left(n^{3n}-1\right)+n\left(n^{3n}-1\right)+(n^2+n+1)=$ $\left[\left(n^3\right)^n-1\right]\left(n^2+n\right)+\left(n^2+n+1\right)=$

$=\left[n^3-1\right]\left(n^2+n\right)\left[(n^3)^{n-1}+(n^3)^{n-2}+....+n^3+1\right]+\left(n^2+n+1\right)=M_{(n^3-1)}+(n^2+n+1)=M_{(n^2+n+1)}$.

Deci m este divizibil cu n^2+n+1.

G:1245. Se consideră ecuația $x^3+10x^2-80x-801=0$. Arătați că orice soluție reală a ecuației este mai mică decît 9. Rezolvați ecuația.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $x(x^2-80)+10(x^2-80)=1\Leftrightarrow(x^2-80)(x+10)=1$ (*). Dacă x=9 ar fi soluție atunci prin inlocuire se obține o contradicție, așadar, soluțiile sunt mai mici decât 9.

Din $x^3+10x^2+9x-89x-9\cdot 89=0\Leftrightarrow(x+9)\cdot(x^2+x-89)=0\Rightarrow x_1=-9$, $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{357}}{2}\langle 9$.

G:1246. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ nu toate egale astfel încât $x^2+y^2+z^2=(px+qy+rz)^2+(qx+ry+pz)^2+(rx+py+qz)^2$. Arătați că dacă $p+q+r=1$ atunci $pq+qr+rp=0$.

Grigorie Dan, Craiova

Rezolvare:

Avem $x^2+y^2+z^2=(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)+2(pq+qr+rp)(xy+yz+zx)$

Se va obține că $2(pq+qr+rp)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

Cum $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0\Leftrightarrow x=y=z=0\Rightarrow$ $pq+qr+rp=0$.

G:1247. Dacă x este un număr real, atunci aflați cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia $E(x)=\dfrac{x^2+2023}{\sqrt{x^2+2022}}$.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Suntem tentați să scriem $E(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2022}}+\sqrt{x^2+2022}\overset{MA-MG}{\geq}2$, deci minimul este 2; numai că egalitatea are loc numai când

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2022}}=\sqrt{x^2+2022}\Rightarrow x^2=1-2022\text{, fals!}$$

Pentru a determina minimul expresiei date vom scrie:

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2022}}+\sqrt{x^2+2022}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2022}}+m\sqrt{x^2+2022}+(1-m)\sqrt{x^2+2022},0<m<1$$

Folosin inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică obținem

$$E(x)\geq 2\sqrt{m}+(1-m)\sqrt{x^2+2022}\geq 2\sqrt{m}+(1-m)\sqrt{2022}.$$

Aici, condițiile ca inegalitățile să devină egalități sunt

$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2022}} = m\sqrt{x^2+2022} \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2022} \\ x = 0 \end{cases}$.Deci, $\min E(x) = \dfrac{2023\sqrt{2022}}{2022}$ și se atinge când $x = 0$.

G:1248. Demonstrați inegalitatea $\dfrac{5a}{3(2b+3c)} + \dfrac{5b}{3(3a+2c)} + \dfrac{5c}{3(2a+3b)} \geq 1$, $\forall a,b,c > 0$.

Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Rezolvând sistemul $\begin{cases} 2b+3c = x \\ 2c+3a = y \\ 2a+3b = z \end{cases}$, obținem soluțiile:

$$a = \frac{-6x+9y+4z}{35}, b = \frac{4x-6y+9z}{35}, c = \frac{9x+4y-6z}{35}.$$

Atunci, cu inegalitatea MG-MA avem:

$$\frac{a}{2b+3c} + \frac{b}{3a+2c} + \frac{c}{2a+3b} = \frac{1}{35}\left(\frac{-6x+9y+4z}{x} + \frac{4x-6y+9z}{y} + \frac{9x+4y-6z}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{35}\left(-18 + 9\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) + 4\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right)\right) \geq \frac{1}{35}(-18+27+12) = \frac{3}{5}.$$

G:1249. Demonstrați că dacă $a \in [-21,21], b \in [-8,8], c \in [-1,1]$**, atunci:**

$$(a+21)^2 + (b+8)^2 + (c+1)^2 \leq 2024.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

Rezolvare: $a \in [-21,21] \Rightarrow -21 \leq a \leq 21 \Rightarrow 0 \leq a+21 \leq 42$; $b \in [-8,8] \Rightarrow 0 \leq b+8 \leq 16$; $c \in [-1,1] \Rightarrow 0 \leq c+1 \leq 2$. Deci, $a+21 \leq 42; b+8 \leq 16; c+1 \leq 2$, de unde:

$$(a+21)^2 + (b+8)^2 + (c+1)^2 \leq 42^2 + 16^2 + 2^2 = 2024, \text{ c.c.t.d.}$$

G:1250. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul

$\begin{cases} x^5 - y^4 = 2022 \cdot 2023^4 \\ y^5 - x^4 = 2022 \cdot 2023^4 \end{cases}$ eleve **Viespescu Carina Maria** , **Zetu Caterina** , București

Rezolvare: Din prima ecuație se obține iar din a doua $y > 0$. Scăzând cele două ecuații obținem $x^5 - y^5 + x^4 - y^4 = 0$ sau $(x-y)\left(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + x^3 + x^2y + xy^2 + x^3\right) = 0$ de unde $x = y$ (expresia din paranteza este strict pozitivă).

Cum $x = y$ rezultă $x^4(x-1) = 2022 \cdot 2023^4$.

Dacă $x > 2023$ $x^4(x-1) > 2022 \cdot 2023^4$. Dacă $x < 2023$ $x^4(x-1) < 2022 \cdot 2023^4$

Așadar $x = y = 2023$

G:1251. Determinați numerele reale x **astfel încât expresia** $\dfrac{x}{x^2-3x+5}$ **să fie număr întreg.**

eleve **Viespescu Carina**, **Militaru-Cismaru Gabriela**, Craiova

Rezolvare:

Fie $\dfrac{x}{x^2-3x+5} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow kx^2 - (3k+1)x + 5k = 0$. Pentru k=0 rezultă x=0. Fie $k \neq 0 \Rightarrow$

$\Delta = (3k+1)^2 - 20k^2 = -11k^2 + 6k + 1 \geq 0 \Rightarrow$ $k \in \left[\dfrac{3-\sqrt{20}}{11}; \dfrac{3+\sqrt{20}}{11}\right] \cap \mathbb{Z}$. Singura soluție este 0.

G:1252. Considerăm numerele $a,b\rangle 0$. Arătați că are loc inegalitatea $\frac{9a^2+4b^2}{36}+\frac{4a^2+9b^2}{6ab}\rangle\frac{ab}{3}+2$

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

Rezolvare:

Inegalitatea este echivalentă cu $\left(\frac{9a^2}{36}+\frac{b^2}{9}-\frac{ab}{3}\right)+\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{2a}\right)\rangle\ 2\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{2a}\right)\rangle 2$.

Dar se știe că $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{2a}\right)\rangle 2$. Nu are loc egalitatea deoarece ar rezulta că b = 0 ceea ce contrazice ipoteza.

G:1253. Fie $x_1,x_2,...,x_n\in(-1;1)$; $n\geq 2$ astfel încât $n\in\mathbb{N}$ $\frac{x_1^{2023}}{x_2}+\frac{x_2^{2023}}{x_3}+.....+\frac{x_{n-1}^{2023}}{x_n}+\frac{x_n^{2023}}{x_1}=0$.

a) Pentru n = 2024 dați exemple de astfel de numere
b) Arătați că n este număr natural divizibil cu 4.

Grigorie Dan Lucian, **Lupu Răzvan**, Craiova

Rezolvare: a) Observăm că pentru
$x_1=1,\ x_2=x_3=x_4=-1,\ x_5=1,x_6=x_7=x_8=-1,\ ...,x_{2021}=1,x_{2022}=x_{2023}=x_{2024}=-1$ se formează 502 grupe de câte 4 numere a căror sumă este 0. De aici concluzia.

b) Deoarece fiecare fracție are valoarea -1 sau 1 se obține imediat că n este par, adică $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$.

Cum $\frac{x_1^{2023}}{x_2}\cdot\frac{x_2^{2023}}{x_3}\cdot.....\cdot\frac{x_{n-1}^{2023}}{x_n}\cdot\frac{x_n^{2023}}{x_1}=\left(x_1x_2...x_n\right)^{2022}=1$ și pe de altă parte având k fracții egale cu -1 și k fracții egale cu 1. Din produsul anterior rezultă $(-1)^k\cdot 1^k=1$, de unde n= 4l, l- număr natural.

G:1254. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{n+1}{2(n+2)}\leq\frac{1}{n+1\cdot 2}+\frac{2}{n+2\cdot 3}+\frac{3}{n+3\cdot 4}+....+\frac{n}{n+n\cdot(n+1)}\leq\frac{n(n^2+5)}{2(n+2)^2},\ \forall n\geq 1.$$

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Se folosesc inegalitățile: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k(k+1)}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+n(n+1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{n(n+2)}=\frac{n+1}{2(n+2)}$ **și**

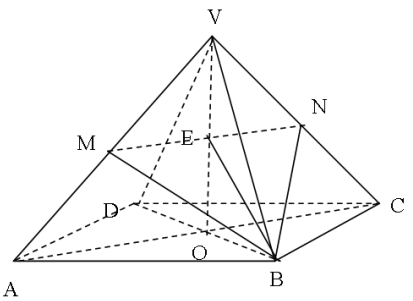
$$\frac{k}{n+k(k+1)}\leq\frac{(n-1)k+3}{(n+2)^2},\ \forall n,k\geq 1.$$

G:1255. Într-o piramidă patrulateră regulată VABCD se dau $AB=4\sqrt{6}$, înălțimea piramidei VO = 8, M, mijlocul lui VA, N, mijlocul lui VC. Aflați aria triunghiului BMN.

Ion Stanescu, Buzău

Rezolvare:

Triunghiul $\Delta\ BMN$ este isoscel cu BM=BN, E mijlocul lui MN, și a lui VO. $A=\frac{MN\cdot BE}{2}=16\sqrt{3}$ deoarece $MN=\frac{AC}{2}=4\sqrt{3}$, iar din triunghiul $\Delta\ OBE$, BE=8.



G:1256. În prisma triunghiulară regulată ABCA`B`C` toate muchiile sunt congruente între ele și se notează cu M mijlocul muchiei A`B`. Să se calculeze valoarea sinusului unghiului C`BM.

Dacă aria triunghiului C`BM este egală cu $2\sqrt{15}$ cm², să se afle aria laterală a prismei. Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

Rezolvare: Prisma fiind o prismă dreaptă, avem BB' $\perp$ (A'BÇ') $\Rightarrow$ BB' $\perp$ C'M $\Rightarrow$ BB' (1). Dar C'M $\perp$ A'B' (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ C'M $\perp$ (ABB'), adică avem și C'M $\perp$ BM, deci triunghiul C'BM este dreptunghic, având ipotenuza C'B. Notând cu x muchia prismei, obținem: BC`=x$\sqrt{2}$, C`M= $\frac{x\sqrt{3}}{2}$, BM= $\frac{x\sqrt{5}}{2}$. În acest caz, sin(<C`BM)= $\frac{C`M}{C`B}$ = $\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Cum triunghiul C`BM este dreptunghic, atunci aria este $\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x\sqrt{5}}{2}$ = $\frac{x^2\sqrt{15}}{8}$. Din egalitatea $\frac{x^2\sqrt{15}}{8}$ = $2\sqrt{15}$ rezultă x^2= 16, adică x=4 (cm). Aria laterală a prismei este egală cu 3·16= 48 (cm^2).

▪ Clasa a IX-a

L:1028. Demonstrați că nu există numere raționale a și b astfel încât $a^b = 2$.

Oprescu Cristina Diana, Ploiești

Rezolvare: Presupunem prin reducere la absurd că există numere raționale a și b astfel încât $a^b = 2$

Fie $a = \frac{p}{q}, b = \frac{r}{s}$, unde $p, q, r, s \in \mathbb{Z},\ q, s \neq 0$. Atunci, $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{r}{s}} = 2 \big|()^s \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^r = 2^s \big| \cdot q^r \Rightarrow p^r = 2^s \cdot q^r$

Astfel, observăm că p^r este divizibil cu 2, ceea ce înseamnă că p trebuie să fie divizibil cu 2. Putem scrie p = 2k, unde k este un număr întreg. Înlocuim p cu această expresie: $(2k)^r = 2^s \cdot q^r$

Dacă r este par, putem scrie r = 2m, unde m este un număr întreg. Înlocuim r cu această expresie:

$(2k)^{2m} = 2^s \cdot q^{2m}$ Putem scrie aceasta sub forma: $\left(2^m \cdot k^m\right)^2 = 2^s \cdot q^{2m}$

Partea dreaptă este divizibilă cu 2, dar partea stângă nu poate fi divizibilă cu 2 deoarece reprezintă un pătrat perfect. Deci, reducerea la absurd este falsă, deci nu există numere raționale a și b astfel încât a la puterea b să fie egal cu 2.

L:1029. Fie $x, y, z \in \mathbb{R},\ x, y, z \rangle\ 2023$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{2023}$. Să se arate că $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-2023} + \sqrt{y-2023} + \sqrt{z-2023}$.

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare:

$$\left(\sqrt{x-2023} + \sqrt{y-2023} + \sqrt{z-2023}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{2023}{x}} + \sqrt{y}\cdot\sqrt{1-\frac{2023}{y}} + \sqrt{z}\cdot\sqrt{1-\frac{2023}{z}}\right)^2 \leq$$

$$\overset{I.C.B.S}{\leq} (x+y+z)\cdot\left(1-\frac{2023}{x} + 1-\frac{2023}{y} + 1-\frac{2023}{z}\right) = (x+y+z)\cdot\left(3-2023\cdot\frac{2}{2023}\right) = x+y+z.$$

L:1030. Fie $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R},\ a_1 \neq a_2$ și $a_2 \in \mathbb{R}$. Dacă rădăcinile ecuației $(x-a_1)(x-a_2) = a$ sunt $b_1,\ b_2 \in \mathbb{R},\ si\ b_1 \neq b_2$ aflați rădăcinile ecuației $(x+b_1)(x+b_2) = -a$.

Doina Calina, Mihaela Nascu, Craiova

Rezolvare:

Ecuația din enunț cu soluțiile b_1, b_2 se mai poate scrie $x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1a_2 - a = 0$. Din relațiile lui

Viete, obținem $b_1+b_2=a_1+a_2$, $b_1\cdot b_2=a_1\cdot a_2-a$. (*). Ecuația $(x+b_1)(x+b_2)=-a \Leftrightarrow$ $x^2+(b_1+b_2)x+b_1b_2+a=0$ și folosind relațiile (*) obținem $x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2=0 \Leftrightarrow$ $(x+a_1)(x+a_2)=0$ cu soluțiile $x_1=-a_1,\ x_2=-a_2$.

L:1031. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x-1$. **Rezolvați inecuația** $f(f(x))\le 0$.

Lavinia Trincu, Monica Matei, Craiova

Rezolvare:

$f(x)=(2x-1)(x+1)\Rightarrow f(f(x))=\left(2f(x)-1\right)\left(f(x)+1\right)\le 0\Rightarrow f(x)\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$, $-1\le 2x^2+x-1\le\frac{1}{2}$.

$\begin{cases}2x^2+x\ge 0\\ 2x^2+x-\frac{3}{2}\le 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$ Din $x\left(2x+1\right)\ge 0\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[0;\infty\right)=A$

Din $4x^2+2x-3\le 0\Rightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{4};\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right]=B$

Rezultă $x\in A\cap B=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{4};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[0;\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right]$

L:1032. Fie $a_1,\ a_2,....,a_n\in\mathbb{R}$ **strict pozitive cu** $a_1\cdot\ a_2\cdot....\cdot a_n=1,\ (n\ge 2)$. **Aflați minimul expresiei**

$E=a_1+a_2+...+a_n+\frac{a_1^6}{a_1^4+1}+\frac{a_2^6}{a_2^4+1}+.....+\frac{a_n^6}{a_n^4+1}$.

Constantina Prunaru, Luiza Cremeneanu, Craiova

Rezolvare: Cum $\frac{a_i^6}{a_i^4+1}=\frac{a_i^6+a_1^2-a_i^2}{a_i^4+1}=\frac{a_i^2(a_i^4+1)}{a_i^4+1}-\frac{a_i^2}{a_i^4+1}=a_i^2-\frac{a_i^2}{a_i^4+1}\ge a_i^2-\frac{1}{2}$, deoarece

$\frac{a_i^2}{a_i^4+1}\le\frac{1}{2},\forall a_i\rangle 0$. Atunci, $E=a_1+a_2+...+a_n+a_1^2+a_2^2+....+a_n^2-\frac{n}{2}\ge$

$n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+n\sqrt[n]{a_1^2a_2^2...a_n^2}-\frac{n}{2}=n+n-\frac{n}{2}=\frac{3n}{2}$. Minimul este atins pentru $a_1=a_2=....=a_n=1$.

L:1033. a) **Arătați că nu există funcții** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **astfel încât**

$f(x)\cdot f(y)+f(x+y)+x+y=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Găsiți $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)\cdot f(y)+f(x+y)=x+y+xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$;

Gigi Zaharia, Doina Calina, Craiova

Rezolvare: Pentru x = y = 0 obținem $f^2(0)+f(0)=0\Rightarrow\ f(0)=0$ sau $f(0)=-1$.

Dacă $f(0)=0$, luăm y = 0 și obținem $f(x)=-x$, care nu convine ($xy-x-y+x+y=0$, fals).

Dacă $f(0)=-1$, luăm y = 0 și obținem $-f(x)+f(x)+x=0\Rightarrow x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, fals.

b) Fie x = y = 0, atunci obținem $f^2(0)+f(0)=0\Rightarrow\ f(0)=0$ sau $f(0)=-1$.

Dacă $f(0)=0$ se ia y = 0 și se obține funcția $f(x)=x$. Dacă $f(0)=-1$ se ia y = 0 și se obține $x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce e fals. Deci, singura funcție găsită este $f(x)=x$.

L:1034. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $x+y+z=a$ **și** $x^3+y^3+z^3=a^3$. **Demonstrați că**

$x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}=a^{2023}$.

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

***Rezolvare*:**

Din formula $\left(x+y+z\right)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(y+x)$ și din ipoteză obținem

$a^3 = a^3 + 3(x+y)(y+z)(x+z) \Rightarrow (x+y)(y+z)(x+z) = 0 \Rightarrow$ cel puțin una dintre cele trei paranteze este nulă. Fie $x+y=0 \Rightarrow y=-x$ și din ipoteză avem și $z=a$ atunci,
$x^{2023} + y^{2023} + z^{2023} = x^{2023} + \left(-x^{2023}\right) + a^{2023} = 0 + a^{2023} = a^{2023}$. Analog și pentru celelalte cazuri.

L:1035. Fie $0 \langle a_1 \le a_2 \le ..... \le a_n$, $n \ge 3$ **cu** $a_2a_{n-1} + a_3a_{n-2} + ... + a_na_1 = n-1$. **Să se arate că** $a_2 + a_3 + ... + a_n \ge n-1$.

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Din $a_2 \le a_3 \le ..... \le a_n$ și $a_{n-1} \ge a_{n-2} \ge ..... \ge a_1$, aplicând inegalitatea lui Cebâșev obținem:
$(a_2 + a_3 + ... + a_n)\cdot(a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1) \ge (n-1)(a_2a_{n-1} + a_3a_{n-2} + ... + a_na_1)$
$U^2 + (a_1 - a_n)U - (n-1)^2 \ge 0$ unde $U = (a_2 + a_3 + ... + a_n)$. Considerăm funcția
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + (a_1 - a_n)x - (n-1)^2$ care admite minim în $x_n = \dfrac{a_n - a_1}{2} \ge 0$ iar
$f(U) \ge 0,\ U \rangle 0$, $f(n-1) = (a_1 - a_n)(n-1) \Rightarrow U \ge n-1$, c.c.t.d

L:1036. Fie $b_n = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + ... + \dfrac{1}{p^n}, n \in N^*$, unde p- număr natural nenul. Să se arate că :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p^k - 1}{p^{k+1} - 1} \cdot p \cdot b_{k+1} > \frac{n}{p^n}\ ,\ p \ne 1 \text{ iar dacă } p = 1 \text{ atunci } \sum_{k=1}^{n} \frac{p^{k-1} + p^{k-2} + ... + p + 1}{p^k + p^{k-1} + ... + p + 1} \cdot p \cdot b_{k+1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Constantin și Elena Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare:

$$b_n = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n} \quad \Big| \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p} b_n = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + ... + \frac{1}{p^{n+1}} \Rightarrow b_n\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p} \Rightarrow b_n = \frac{p^n - 1}{p^n(p-1)}$$

$$\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{p^k - 1}{p^k(p-1)} \cdot \frac{p^{k+1}(p-1)}{p^{k+1} - 1} = \frac{p(p^k - 1)}{p^{k+1} - 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{p(p^k - 1)}{p^{k+1} - 1} \cdot b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_{k+1}} \cdot b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + ... + b_n = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) + ... + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n}\right) =$$

$$= \frac{n}{p} + \frac{n-1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n} > \underbrace{\frac{1}{p^n} + \frac{1}{p^n} + ... + \frac{1}{p^n}}_{n-ori} = \frac{n}{p^n}$$

Pentru $p = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \cdot (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

L:1037. Dacă $x, y, z > 0$, $xyz = x + y + z + 2$ **atunci să se arate că** $xy + yz + zx \ge 12$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

Lema. $xyz = x + y + z + 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 1$.

Dem. Facem substituția $(a,b,c) = \left(\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{y+1}, \dfrac{1}{z+1}\right), a + b + c = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1-a}{a}, \frac{1-b}{b}, \frac{1-c}{c}\right) = \left(\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}\right).$$

$$LHS=\sum xy=\sum\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}=\frac{\sum a\sum a^2+3abc}{abc}=\frac{\sum a\sum a^2}{abc}+3\overset{(1)}{\geq}\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{27}}+3=$$ 9+3=12= RHS.

Am folosit mai sus: $\sum a=1$, $\sum a^2\geq\frac{1}{3}$, $abc\leq\frac{1}{27}$, vezi

$$\sum a^2\overset{CS}{\geq}\frac{\left(\sum a\right)^2}{3}=\frac{1}{3}\text{ și }1=a+b+c\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq\frac{1}{27}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z=2$.

(Următoarele soluții sunt date de dl. Titu Zvonaru, Comănești:)

I. Folosind inegalitatea mediilor pentru patru numere obținem:
$(xyz)^4=(x+y+z+2)^4\geq 256(2xyz)$, de unde rezultă că $xyz\geq 8$. Aplicând din nou inegalitatea mediilor, avem

$(xy+yz+zx)^3\geq 27(xyz)^2\geq 27\times 64$, deci $xy+yz+zx\geq 12$.

II. Din condiția din enunț rezultă că există numerele reale pozitive a, b, c astfel încât
$x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$. Atunci inegalitatea dorită se scrie

$$\frac{(b+c)(c+a)}{ab}+\frac{(c+a)(a+b)}{bc}+\frac{(a+b)(b+c)}{ca}\geq 12$$

$$a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 12abc,$$

care rezultă imediat cu inegalitatea mediilor.

III. Condiția din enunț este echivalentă cu $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$. Cu inegalitatea mediilor

Obținem: $1\geq\frac{27}{(x+1)(y+1)(z+1)}\Leftrightarrow xyz+x+y+z+xy+yz+zx\geq 26$

$\Leftrightarrow 2(x+y+z)+xy+yz+zx\geq 24\quad(1)$

Folosind inegalitatea cunoscută $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ și relația (1), deducem că

$(x+y+z)^2+6(x+y+z)\geq 3(xy+yz+zx)+6(x+y+z)\geq 72$

$\Leftrightarrow(x+y+z+12)(x+y+z-6)\geq 0,$ deci $x+y+z\geq 6$. Rezultă că $xyz=x+y+z+2\geq 8$ și cu inegalitatea mediilor $xy+yz+zx\geq 12$.

L:1038. Arătați că numărul $8\cdot 2^{2023}+15\cdot 3^{578}\cdot 5^{1156}$ este divizibil cu 23.

Ionel Tudor , Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Cum $8\cdot 2^{2023}+15\cdot 3^{578}\cdot 5^{1156}=8\cdot 2^{7\cdot 289}+15\cdot 3^{2\cdot 289}\cdot 5^{4\cdot 289}$, vom arata mai general, prin inducție matematică completă că $a_n=8\cdot 2^{7\cdot n}+15\cdot 3^{2\cdot n}\cdot 5^{4\cdot n}$ este divizibil cu 23.

$a_0=8+15=23\vdots 23$.

Presupunem că $a_n=(2^{7n+3}+3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1})\vdots 23$ (*), pentru $n\in\mathbb{N}$ și să arătăm că $a_{n+1}\vdots 23$.

$a_{n+1}=8\cdot 2^{7n+7}+15\cdot 3^{2n+2}\cdot 5^{4n+4}=2^{7n+10}+3^{2n+3}\cdot 5^{4n+5}=2^7\cdot 2^{7n+3}+3^2\cdot 5^4\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}=$

$=128\cdot 2^{7n+3}+5625\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$. Din (*) rezultă $2^{7n+3}=M_{23}-3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}\Rightarrow$

$a_{n+1}=128\cdot\left(M_{23}-3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}\right)+5625\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}=M_{23}+5497\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$ care este divizibil cu 23 deoarece $5497=23\cdot 239$. Deci $a_{n+1}\vdots 23\Rightarrow a_n\vdots 23,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Așadar, pentru n = 289, obținem exercițiul din enunț, $a_{289}\vdots 23$.

L:1039. Se consideră ecuația $6x^3-5mx^2+(m^2+3)x-m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Determinați m și rezolvați ecuația astfel încât toate rădăcinile să fie reale. Arătați că ecuația nu poate avea toate rădăcinile numere întregi.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $(3x-m)(2x^2-mx+1)=0$, (*) cu soluțiile:

$x_1=\frac{m}{3},\ \forall m\in\mathbb{R};\ x_{2,3}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-8}}{4}\in\mathbb{R}$ cu $m\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};\infty\right)$. Deci, $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

Evident, $x_1=\frac{m}{3}\in\mathbb{Z}^*$ deoarece m nu poate fi 0, deci m = 3k, unde $k\in\mathbb{Z}^*$.

În (*) , avem și $x_{2,3}\in\mathbb{Z}$ dacă $2x^2-3kx+1=0$ unde $x,k\in\mathbb{Z}^*$. Rezultă,

$2x-3k+\frac{1}{x}=0\Rightarrow\frac{1}{x}=3k-2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$.

x = 1 pentru k = 1, deci m = 3, caz în care găsim $x_1=x_2=1\in\mathbb{Z}$ dar $x_3=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$;

x = -1 pentru k = -1, deci m = -3, caz în care găsim $x_1=x_2=-1\in\mathbb{Z}$ dar $x_3=-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$;

Deci, cele trei rădăcini ale ecuației date, nu pot fi toate numere întregi.

L:1040. Dacă $ABCD$ este un patrulater convex cu $AD=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt[4]{5}$, iar O este un punct interior astfel încât $OA\perp OB$, $OC\perp OD$, $OA=OB=1$, $OC=OD$, atunci aflați OC .

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Fie $OC=OD=x$. Cu teorema cosinusului în ΔBOC și ΔDOA deducem ușor că

$\frac{1+x^2-\sqrt{5}}{2x}=-\frac{1+x^2-5}{2x}$, de unde rezultă $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, adică numărul de aur.

L:1041. Fie ΔABC în care AM - mediană , BD - bisectoare . Să se arate că :

$$\overline{AM}+\overline{BD}=-\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}+\frac{a+3c}{2(a+c)}\cdot\overline{AC}.$$ **(a=BC,b=AC,c=AB)**

Constantin și Elena Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare: AM- mediană , atunci : $\overline{AM}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$ și BD – bisectoare :

$$\Rightarrow\overline{BD}=\frac{a}{a+c}\overline{BA}+\frac{c}{a+c}\overline{BC}=-\frac{a}{a+c}\overline{AB}+\frac{c}{a+c}\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=-\overline{AB}+\frac{c}{a+c}\overline{AC}$$

$$\overline{AM}+\overline{BD}=-\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}+\frac{a+3c}{2(a+c)}\cdot\overline{AC}$$

L:1042. Considerăm un triunghi ABC cu $A,B,C\in\left(0^0;120^0\right]$. Să se arate că

$$S\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\min\left(\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}},\ \frac{1}{b^{-2}+c^{-2}},\ \frac{1}{c^{-2}+a^{-2}}\right).$$

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Evident, cel puțin un unghi, de exemplu $A\in\left[60^0;120^0\right]$, atunci $\sin A\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ și avem:

$$S=\frac{bc\sin A}{2}\ge\frac{\sqrt{3}}{4}\min(bc,ca,ab)\ge\frac{\sqrt{3}}{4}\min\left(\frac{2b^2c^2}{b^2+c^2},\frac{2c^2a^2}{c^2+a^2},\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\min\left(\frac{1}{b^{-2}+c^{-2}},\frac{1}{c^{-2}+a^{-2}},\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}}\right)$$

L:1043. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}>3$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

$$\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}\ge\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)^2.$$ Cum $m_a<\frac{b+c}{2}, m_b<\frac{a+c}{2}, m_c<\frac{a+b}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{a}{m_a}>\frac{2a}{b+c}$ și analoagele.

$$\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}\ge\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)^2>\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot4\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2\ge\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}=3$$

O rafinare dată de dl. Titu Zvonaru: Folosind formula pentru lungimea medianei, inegalitatea lui Bergström și inegalitatea cunoscută $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$, obținem

$$\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}=\frac{4a^4}{2a^2b^2+2a^2c^2-a^4}+\frac{4b^4}{2a^2b^2+2b^2c^2-b^4}+\frac{4c^4}{2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}\ge$$

$$\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)^2}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^4+b^4+c^4)}=4.$$

L:1044. Într-un triunghi arbitrar de laturi a,b,c notăm cu m_a,h_a lungimile medianei , respectiv înălțimii aferente laturii a, e.t.c . Presupunând că laturile triunghiului verifică inegalitatea $a\ge b\ge c$, demonstrați că : $\frac{m_b}{h_b}+1\ge\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_c}{h_c}$.

Vasile Jiglău, Arad

Rezolvare: Notăm cu S aria triunghiului .Cu formula cunoscută $\frac{m_a^2}{h_a^2}=1+\frac{(b^2-c^2)^2}{16S^2}$ (care se verifică fără dificultate cu formulele uzuale în triunghi) obținem :

$$\frac{m_b^2}{h_b^2}=1+\frac{(a^2-c^2)^2}{16S^2}=1+\frac{(a^2-b^2+b^2-c^2)^2}{16S^2}=1+\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{16S^2}=$$

$$=-1+\frac{m_a^2}{h_a^2}+\frac{m_c^2}{h_c^2}+2\sqrt{(\frac{m_a^2}{h_a^2}-1)(\frac{m_c^2}{h_c^2}-1)}\Leftrightarrow y^2=x^2+z^2+2\sqrt{(x^2-1)(z^2-1)}-1 \qquad (1)$$

unde , pentru ușurință , am notat $x=\frac{m_a}{h_a}.y=\frac{m_b}{h_b}, z=\frac{m_c}{h_c}$. Inegalitatea din enunț devine echivalentă cu :

$y\ge x+z-1\Leftrightarrow y^2\ge x^2+z^2+1-2x-2z+2xz$, care , ținând cont de (1) , devine la rândul ei echivalentă cu : $x^2+z^2+2\sqrt{(x^2-1)(z^2-1)}-1\ge x^2+z^2+1-2x-2z+2xz\Leftrightarrow\sqrt{(x^2-1)(z^2-1)}\ge(x-1)(z-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1)(z+1)\ge(x-1)(z-1)$

care este adevărată . Cum la ultimul pas de mai sus am simplificat ambii termeni cu (x-1)(z-1) , avem egalitate mai sus când $x=1$ sau $y=1$, deci în cazul triunghiului isoscel .

L:1045. Fie $a,b,c\rangle0$ astfel încât $abc=k^3,\ k\rangle\ 0$. Să se arate că $\sum\frac{a^n+b^n}{c^{n-1}}\ge\sqrt{k^{3n}}\sum\frac{1}{\sqrt{a^{8n-2}}}+3k$

Rezolvare:

Gheorghe Ghiță, Buzău

$$\sum\frac{a^n+b^n}{c^{n-1}}\overset{MA-MG}{\geq}2\sum\frac{\sqrt{a^nb^n}}{c^{n-1}}=\sum\frac{\sqrt{a^nb^n}}{c^{n-1}}+\sum\frac{\sqrt{a^nb^n}}{c^{n-1}}\geq\sum\frac{\sqrt{\left(\frac{k^2}{c}\right)^n}}{c^{n-1}}+3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^nb^n}}{c^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{b^nc^n}}{c^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{c^na^n}}{c^{n-1}}}=.$$

$$=\sqrt{k^{3n}}\cdot\sum\frac{1}{\sqrt{a^{3n-2}}}+3\sqrt[3]{abc}=\sqrt{k^{3n}}\cdot\sum\frac{1}{\sqrt{a^{3n-2}}}+3k.$$

Notă. Pentru n=4, k=2 rezultă problema 3997 din Crux Mathematicorum,Vol 40, No 10/2014.

L:1046. Demonstrați egalitatea: $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{9}}-\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{9}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

Vasile Mircea Popa, Sibiu

***Rezolvare*:** Vom folosi relația: $\sin 3a=\sin a\left(1+2\cos 2a\right)$ precum și alte formule uzuale din trigonometrie. Vom prelucra membrul stâng al egalității din enunțul problemei, până ajungem la membrul drept.

Avem: $E=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{9}}-\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{9}}=\frac{\left(1+2\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{3}}-\frac{\left(1+2\cos\frac{4\pi}{9}\right)^2}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}$

$$E=\frac{16}{3}\left(1+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{16}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+2\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)\cdot 2\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$E=\frac{16\sqrt{3}}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\left(1+2\cos\frac{2\pi}{9}\right)\sin\frac{\pi}{9}=\frac{16\sqrt{3}}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{9}}\cdot\sin\frac{\pi}{9}=8\cos\frac{2\pi}{9}. \quad (1)$$

Mai trebuie să arătăm că: $8\cos\frac{2\pi}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)$ (2)

Sau, echivalent: $\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{9}=2\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}$ $\quad\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{2\pi}{9}=2\sin\frac{\pi}{9}$

În membrul stâng al acestei ultime egalități vom utiliza metoda unghiului auxiliar. Avem

$$\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}\right)}{\frac{1}{2}}=2\sin\frac{\pi}{9}$$

▪ Clasa a X-a

L:1047. Fie p un număr prim. Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor $a=(p-1)!+1$ **și** $b=\left((p-1)!\right)!+1$.

Meda Iacob, Craiova

Rezolvare: Pentru p = 2 rezultă a = b = 2 și (a;b)=2; Pentru p= 3 rezultă a = b = 3 și (a;b)=3.

Fie $p \geq 5$. Din teorema lui Willson, $p \mid (p-1)!+1 = a$ și cum a este număr compus (a se divide cu p) și $a \geq 5$ obținem $a \mid (a-1)!$. (factorii lui a sunt mai mici decât a-1).

Cum $b = (a-1)!+1 = ca+1$ (avem $(a-1)! = ca,\ c \in \mathbb{N}^*, c \geq 2$). Rezultă $b - ca = 1 \Rightarrow (a;b) = 1$.
Așadar, pentru $p \geq 5$, $(a;b) = 1$.

L:1048. Determinați cel mai mic număr natural nenul n astfel încât $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$, $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ și $\sqrt[7]{\frac{n}{7}}$ să fie numere raționale.

Ana Dumitru, Dan Grigorie, Craiova

***Rezolvare*:** Cum $n = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, $a,b,c \in \mathbb{N}$, a trebuie să se dividă cu 5 și 7 iar a –1 să se dividă cu 3.
Găsim $a = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ iar $a = 5 \cdot 7 = 35$ nu convine deoarece 34 nu se divide cu 3.
Similar b se divide cu 3 și 4 iar b-1 cu 5. Găsim $b = 3 \cdot 7 = 21$ iar c se divide cu 3 și 5 și c-1 cu 7. Găsim $c = 3 \cdot 5 = 15$. Numărul căutat este $n = 3^{70} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15}$.

L:1049. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \rangle 5 - x$.

Eugenia Turcu, Carmen Terheci, Craiova

Rezolvare:

Fie $f : [2;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + x$ care este strict crescătoare pe $[2;\infty)$ și pentru $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq f(2) = \sqrt[3]{9} + 1 + 0 + 2 \rangle 5$, rezultă că soluțiile inecuației sunt toate numerele din $[2;\infty)$.

L:1050. Fie $f : [1;8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\log_2 x)^2 \cdot \left[(\log_2 x - 2) \cdot (\log_2 x - 3) + \log_2 \frac{8}{x} \right]$. Să se determine valoarea lui x pentru care f să aibă valoarea maximă. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Notăm $\log_2 x = y \Rightarrow 0 \leq y \leq 3$ deoarece $1 \leq x \leq 8$. Funcția f devine

$f = y^2 [(y-2)(y-3) + 3 - y] = y^2 \cdot (3-y)^2$. Cum $y \cdot (3-y) \leq \frac{9}{4} \Rightarrow f = y^2 \cdot (3-y)^2 \leq \frac{81}{16}$, $\forall x \in [1;8]$.

$Max\ f = \frac{81}{16} \Leftrightarrow y = 3 - y \Rightarrow y = \frac{3}{2}. \Rightarrow x = \sqrt{8}$

L:1051. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$. Să se determine numerele reale $x, y, z \in [1;\infty)$ știind că

$\sqrt{a_1} + \sqrt[3]{a_2} + \sqrt[4]{a_3} + ... + \sqrt[n]{a_{n-1}} + \sqrt[n+1]{\frac{1}{a_{n-1}}} \leq n$**, unde** $a_k = \frac{x^{k+1} + y^{k+1} + z^{k+1}}{x^k + y^k + z^k}$, $k = \overline{1; n-1}$.

Emil C. Popa, Sibiu

Rezolvare: Evident, $a_k \geq 1$, $\forall k = \overline{1;n}$. Avem,

$2 \leq \sqrt[n-1]{a_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n-1}}} \leq \sqrt[n]{a_{n-1}} + \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n-1}}} \leq n - \sqrt{a_1} - \sqrt[3]{a_2} - .... - \sqrt[n-1]{a_{n-1}} \leq 2$, ultima inegalitate fiind adevărată deoarece $\sqrt{a_1} + \sqrt[3]{a_2} + ... + \sqrt[n-1]{a_{n-1}} \geq n-2$. Deci, $n - \sqrt{a_1} - \sqrt[3]{a_2} - .... - \sqrt[n-1]{a_{n-1}} = 2 \Rightarrow$

$a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 1$. Din $a_1 = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z} = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

L:1052. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $4^x - 2 \cdot 5^{2x} \langle 10^x$. elev **Bianca Negreț**, Craiova

Rezolvare: Inecuația dată se scrie $\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^x \langle 1$. Notăm $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y \rangle 0 \Rightarrow y - \frac{2}{y} \langle 1 \Rightarrow y^2 - y - 2 \langle 0$

sau $(y+1)(y-2) \langle 0$. Cum $y + 1 \rangle 0 \Rightarrow y - 2 \langle 0 \Rightarrow y \langle 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \langle 2$ adică $x \rangle \log_{\frac{2}{5}} 2$.

L:1053. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{x}{x^2+4}=4^{x^4-8\cdot x^2+15}$ **; b)** $\frac{x}{x^2+3}=4^{x^4-10\cdot x^2+8}$

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: a) Evident $x>0$. Înmulțind cu 4 ecuația, obținem: $\frac{4\cdot x}{x^2+4}=4^{x^4-8\cdot x^2+16}\Rightarrow\frac{4\cdot x}{x^2+4}=4^{\left(x^2-4\right)^2}$

Cum $\frac{4\cdot x}{x^2+4}\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ și $\left(x^2-4\right)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 4^{\left(x^2-4\right)^2}\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$ se obține că:

$\frac{4\cdot x}{x^2+4}=1=4^{\left(x^2-4\right)^2}$ cu soluția comună $x=2$.

b) Evident $x>0$. Logaritmând în baza 4 ambii membri ai ecuației , obținem:

$\log_4 x-\log_4\left(x^2+3\right)=x^4-10\cdot x^2+8\Rightarrow\log_4 x-\log_4\left(x^2+3\right)=\left(x^2+3\right)^2-16\cdot x^2-1\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_4 x+16\cdot x^2+1=\left(x^2+3\right)^2+\log_4\left(x^2+3\right)\Rightarrow\log_4\left(4\cdot x\right)+\left(4\cdot x\right)^2=\log_4\left(x^2+3\right)+\left(x^2+3\right)^2\ (\otimes)$

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(y)=\log_4 y+y^2$ este strict crescătoare, deci injectivă.

Din relația $(\otimes)$ se obține $4\cdot x=x^2+3$, ecuație care are soluțiile $x_1=1,x_2=3$.

L:1054. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases}x+\sqrt[3]{y}=2\\ y+\sqrt[3]{z}=2\\ z+\sqrt[3]{x}=2\end{cases}$

Matei Monica , Gigi Zaharia, Craiova

Rezolvare: Se analizează situațiile $x\langle y$ și $x\rangle y$ și se ajunge la contradicție, prin urmare $x=y=z=t^3\Rightarrow$ $t^3+t-2=0$ cu soluția reală t=1, deci $x=y=z=1$

L:1055. Determinați toate tripletele (x,y,z) de numere reale astfel încât:

$$\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{15+y}=\sqrt[4]{2-y}+\sqrt[4]{15+z}=\sqrt[4]{2-z}+\sqrt[4]{15+x}=3.$$

Mihaly Bencze, Brașov și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\sqrt[4]{2-x}=3-\sqrt[4]{15+y}$, de unde $x=2-\left(3-\sqrt[4]{15+y}\right)^4$. Notăm:

$f(t)=2-\left(3-\sqrt[4]{15+t}\right)^4$ și obținem că $x=f(y),y=f(z),z=f(x)$. Deci, $x=(f\circ f\circ f)(x)$ și deoarece f este crescătoare – reiese că punctul fix al funcției $f\circ f\circ f$ este același cu punctul fix al funcției f. Prin urmare, trebuie să rezolvăm ecuația $x=2-\left(3-\sqrt[4]{15+x}\right)^4\Leftrightarrow\left(3-\sqrt[4]{15+x}\right)^4=2-x$, de unde notând $x=t^4-15$, obținem $(3-t)^4=17-t^4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^4-6t^3+27t^2-54t+32=0\Leftrightarrow(t-1)(t-2)(t^2-3t+16)=0$. Rezultă $t_1=1,t_2=2$.

Obținem $x=y=z=1$ și $x=y=z=-14$.

L:1056. Să se arate că în triunghiul ΔABC are loc relația:

$$\frac{16}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^4\le\sum\left(\frac{bc}{m_bm_c}\right)^2\le\frac{4}{3}\left(\frac{3R^2}{r^2}-\frac{6R}{r}+4\right).$$

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

<u>Inegalitatea din dreapta.</u>

Folosind $m_a^2\ge p(p-a)$ obținem $\sum\left(\frac{bc}{m_bm_c}\right)^2\le\sum\frac{b^2c^2}{p(p-b)\cdot p(p-c)}=\frac{1}{p^2}\sum\frac{b^2c^2}{(p-b)(p-c)}=$

$$=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{r^2}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{p^2r^2}=$$

$$=\frac{p^2+2r^2-12Rr}{r^2}+\frac{r\left(4R+r\right)}{p^2}\overset{Gerretsen}{\le}\frac{4R^2+4Rr+3r^2+2r^2-12Rr}{r^2}+\frac{r\left(4R+r\right)}{\frac{r\left(4R+r\right)^2}{R+r}}=$$

$$=\frac{4R^2-8Rr+5r^2}{r^2}+\frac{R+r}{4R+r}\overset{Euler}{\le}\frac{4R^2-8Rr+5r^2}{r^2}+\frac{1}{3}=\frac{12R^2-24Rr+16r^2}{3r^2}=$$

$$=\frac{4\left(3R^2-6Rr+4r^2\right)}{3r^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{3R^2}{r^2}-\frac{6R}{r}+4\right).$$

Am folosit mai sus: $\sum\frac{b^2c^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{p^2\left(p^2+2r^2-12Rr\right)+r^3\left(4R+r\right)}{r^2}$.

<u>Inegalitatea din stânga.</u>

Folosind inegalitatea lui Panaitopol $m_a\le\frac{Rp}{a}$ obținem:

$$\sum\left(\frac{bc}{m_bm_c}\right)^2\overset{Panaitopol}{\ge}\sum\left(\frac{bc}{\frac{Rp}{b}\cdot\frac{Rp}{c}}\right)^2=\frac{1}{R^4p^4}\sum b^4c^4\overset{Goldstone}{\ge}\frac{1}{R^4p^4}\frac{\left(16p^2r^2\right)^2}{3}=\frac{16}{3}\left(\frac{2r}{R}\right)^4.$$

Am folosit mai sus: $\sum b^4c^4\ge\frac{\left(\sum b^2c^2\right)^2}{3}\overset{Goldstone}{\ge}\frac{\left(16p^2r^2\right)^2}{3}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

L:1057. Rezolvați ecuația: $\sin 3x+2\cos 2x+3\sin x+4=0$

Popescu Delia, Craiova

Rezolvare: Notăm $\sin x=y\in[-1;1]$ și folosind formulele pentru sin3x și cos2x se obține ecuația:

$(y+1)(6-4y^2)=0$ cu soluțiile $y\in\left\{-1;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Se obține $x\in\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

L:1058. Rezolvați ecuația $\frac{\sin^4x+\cos^4x}{4}=\frac{\sin^6x+\cos^6x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$.

Dobrică Ginela , Bechet

Rezolvare:

$$\sin^6x+\cos^6x=\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)=1-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=$$

$=\frac{4-3\sin^2 2x}{4}$. Cum $4\cos^2 2x+\sin^2=4\left(1-\sin^2 2x\right)+\sin^2 2x=4-3\sin^2 2x$ obținem

$\frac{\sin^6x+\cos^6x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}=\frac{1}{4}$ și ecuația devine $\sin^4x+\cos^4x=1$ sau $\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2-2\sin^2x\cos^2x=1$

adică $\sin^2x\cos^2x=0$ de unde $\sin^2 2x=0$ sau $\sin 2x=0\Rightarrow c\in\left\{\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

L:1059. Fie $a>0, a\ne 1$. **Rezolvați ecuația** $x^{3+\log_a x}<a^2x^2$.

Iacob Meda, Vlad Carmen, Craiova

Rezolvare: Evident $x>0$.

Fie $a \in (0,1)$ și logaritmând în baza a avem $(3+\log_a x)\log_a x > 2+2\log_a x$ sau notând $\log_a x = t$ $3t+t^2 > 2+2t$ adică $t^2+t-2>0 \Leftrightarrow t \in (-\infty,-2)\cup(1,\infty)$.

Dacă $t<-2 \Rightarrow \log_a x < \log_a a^{-2} \Rightarrow x > \frac{1}{a^2}$ iar dacă $t>1 \Rightarrow \log_a x > 1 = \log_a a \Rightarrow x < a.$

Așadar , $x \in (0,\mathrm{a}) \cup \left(\frac{1}{a^2},\infty\right)$ pentru $a \in (0,1)$.

Dacă $a>1$ procedând analog rezultă $(3+\log_a x)\log_a x < 2+2\log_a x$ sau notând

$\log_a x = t \Rightarrow t^2+t-2<0 \Rightarrow t \in (-2,1) \Rightarrow -2<\log_a x<1 \Rightarrow a^{-2}<x<a$ adică $x \in \left(\frac{1}{a^2},\mathrm{a}\right)$ pentru $a>1$.

L:1060. Fie $a\rangle 1$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică proprietatea $f(a^x)+f(a^{2x})+f(a^{4x})+f(a^{8x})=f(a^3),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Verificați dacă funcția f este injectivă.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș

Rezolvare: Se dau valorile 0 și 1 lui x și se obține că $f(a)=f(a^{16})$.

Dacă f ar fi injectivă, atunci obținem $a=a^{16}$. Deci a=1 , ceea ce contrazice enunțul. Funcția nu este injectivă

L:1061. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}\setminus\{0;1;2\}$, ecuația $tg^2\frac{\pi}{2(n-1)}+tg^2\frac{5\pi}{2(n-1)}=2n$.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Deoarece nu se definește $tg\frac{(2k+1)\pi}{2}$, impunem și condiția $n-1\neq 5 \Rightarrow n\neq 6$ și căutăm $n\in\{3,4,5,7,8,9....\}$ care verifică ecuația. Dar pentru $n\in\{3,4,5\}$ ecuația nu are soluții deoarece prin înlocuire obținem $tg^2\frac{\pi}{4}+tg^2\frac{5\pi}{4}=2\neq 6,\ tg^2\frac{\pi}{6}+tg^2\frac{5\pi}{6}=\frac{2}{3}\neq 8,\ tg^2\frac{\pi}{8}+tg^2\frac{5\pi}{8}=6\neq 10.$

Pentru $n=7 \Rightarrow tg^2\frac{\pi}{12}+tg^2\frac{5\pi}{12}=14=2\cdot 7$ se obține soluția unică. S-a folosit formula $tg\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

Se arată că pentru $n\geq 7 \Rightarrow 0\langle\frac{\pi}{2(n-1)}\langle\frac{5\pi}{2(n-1)}\langle\frac{\pi}{2}$ iar funcția $f(x)=tg^2\frac{\pi}{2(n-1)}+tg^2\frac{5\pi}{2(n-1)}$ este strict descrescătoare pe $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ întrucât funcțiile $n\to\frac{\pi}{2(n-1)}$, $n\to\frac{5\pi}{2(n-1)}$, sunt strict descrescătoare iar $n\to tg^2\frac{\pi}{2(n-1)}$, $n\to tg^2\frac{5\pi}{2(n-1)}$, sunt strict descrescătoare. Cum funcția $g(n)=2n$ este strict crescătoare , ecuația $f(n)=g(n)$, are cel mult o soluție $n\geq 7$. Am găsit n = 7 soluție, care este și unică.

L:1062. Să se rezolve ecuația $x^a-x^b=x^c$, unde $a=\frac{lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\log_3 2}$, $b=\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log_2 3-1}$, $c=\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2\log_6 3-2\log_6 2}$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se impune condiția $x\geq 0$. O soluție evidentă este x = 0.

Fie $x\rangle 0$. Ecuația dată este echivalentă cu $x^{a-c}-x^{b-c}=1$ și se calculează

$a-c=\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$ și $b-c=-\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$, deci $b-c=-(a-c)$ și ecuația dată devine

$x^{a-c}-\frac{1}{x^{a-c}}=1$. Cu notația $y=x^{a-c}\rangle 0$ rezolvăm ecuația $y^2-y-1=0$ și obținem soluțiile

$y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Convine doar $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1,618...$ (numărul de aur), așadar, din

$$x^{a-c}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \lg x=\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}}=2\Rightarrow x_2=100.$$

▪ Clasa a XI-a

L:1063. Fie $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ **și** $a_1,a_2,....,a_n$ **numere reale astfel încât** $x^{a_1x}+x^{a_2x}+...+x^{a_nx}\geq n\cdot x^n,\ \forall x\rangle 0.$ **Arătați că** $a_1+a_2+...+a_n=n$. **Dorina Goiceanu, Elena Alexie**, Craiova

Rezolvare:

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{a_1x}+x^{a_2x}+.....+x^{a_nx}-nx^x$. Cum $f(x)\geq f(1),\ \forall x\rangle 0\Rightarrow x_0=1$ este punct de minim, așadar, $f(1)=0$. Din $f^I(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{a_kx}\left(a_k\ln x+a_k\right)-nx^n\left(\ln x+1\right)\Rightarrow\ a_1+a_2+....+a_n-n=0$ adică $a_1+a_2+...+a_n=n$.

L:1064. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ **și** $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ **care comută între ele astfel încât** $\det\left(A^2-xAB-xyBC+2yAC+x^2B^2+y^2C^2\right)=0$**, atunci** $\det\left(A+xB+yC\right)=3\det(a-xB+yC)$**.**

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Fie $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=\varepsilon^3=\bar{\varepsilon}^3=1,\ \varepsilon^2+\bar{\varepsilon}^2=-1$.

Se arată că $A^2-xAB-xyBC+2yAC+x^2B^2+y^2C^2=\left(\varepsilon A+x\bar{\varepsilon}B+y\varepsilon C\right)\cdot\left(\bar{\varepsilon}A+x\varepsilon B+y\bar{\varepsilon}C\right)\Rightarrow$

$\det\left(A^2-xAB-xyBC+2yAC+x^2B^2+y^2C^2\right)=\det\left(\varepsilon A+x\bar{\varepsilon}B+y\varepsilon C\right)\cdot\overline{\det\left(\varepsilon A+x\bar{\varepsilon}B+y\varepsilon C\right)}=$

$\left|\det\left(\varepsilon A+x\bar{\varepsilon}B+y\varepsilon C\right)\right|^2=0\Rightarrow\det\left(\varepsilon A+x\bar{\varepsilon}B+y\varepsilon C\right)=0$, rezultă

$$\det\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}A+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}xB+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}yC\right)=0\Rightarrow\ \det\left(\frac{1}{2}(-A-xB-yC)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(A-xB+yC)\right)=0$$

Mai departe se folosește proprietatea: "Dacă $X,Y\in M_2\left(\mathbb{R}\right)\Rightarrow\mathrm{Re}\left[\det(X+iY)\right]=\det X-\det Y$" și se obține cerința problemei.

L:1065. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ **cu** $\det(A)=-2$**. Arătați că** $\det(A^2-2I_2)+\det(A^2-A+2I_2)=14$.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Fie $f_A(x)=\det(A-xI_2)=x^2-(TrA)x+\det A=x^2-tx-2$, polinomul caracteristic al matricei A, unde am notat TrA = t. Din teorema Hamilton – Cayley, rezultă: $A^2-tA-2I_2=O_2$. (1). De aici, obținem $A^2-2I_2=t\cdot A\Rightarrow\det(A^2-2I_2)=\det(tA)=t^2\cdot\det A=-2t^2$. (2).

Din (1) rezultă

$$A^2-A+2I_2=(t-1)A+4I_2=(t-1)\left(A-\frac{-4}{t-1}I_2\right)\Rightarrow\det\left(A^2-A+2I_2\right)=(t-1)^2\cdot\det\left(A-\frac{-4}{t-1}I_2\right)=$$

$$(t-1)^2\cdot f_A\left(\frac{-4}{t-1}\right)=(t-1)^2\cdot\left(\left(\frac{-4}{t-1}\right)^2-t\cdot\frac{-4}{t-1}-2\right)=16+4t^2-4t-2t^2+4t-2.$$

Rezultă că $\det\left(A^2-A+2I_2\right)=2t^2+14$, (3). Prin adunarea relațiilor (2) și (3) obținem

$\det(A^2-2I_2)+\det\left(A^2-A+2I_2\right)=-2t^2+2t^2+14=14.$

L:1066. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $Tr(AB)=Tr(AB)^2$. Să se arate că egalitatea $(AB)^k=I_2$ este imposibilă, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare:

Din relația lui **Hamilton – Cayley** pentru matricea **AB**, $(AB)^2-Tr(AB)\cdot(AB)+\det(AB)\cdot I_2=O_2$, egalând urmele obținem:

$Tr\left((AB)^2-Tr(AB)\cdot(AB)+\det(AB)\cdot I_2\right)=Tr\left(O_2\right)\Leftrightarrow\det(AB)=\dfrac{(TrAB)^2-Tr(AB)^2}{2}=0$, deoarece $Tr(AB)=Tr(AB)^2=0$. Trecând la determinant în relația din enunț avem:

$\det(AB)^k=\det(I_2)\Leftrightarrow\left[\det(AB)\right]^k=1$ contradicție cu faptul că $\det(AB)=0$.

L:1067. Să se compare numerele $a=\left(\dfrac{19}{9}\right)^9$ și $b=\left(\dfrac{21}{11}\right)^{11}$.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Arătăm că $a^{\frac{1}{10}}=\left(1+\dfrac{10}{9}\right)^{\frac{9}{10}}\langle\ b^{\frac{1}{10}}=\left(1+\dfrac{10}{11}\right)^{\frac{11}{10}}$, prin urmare, $a\langle b$.

Fie $f,g:(0;\infty)\to(0;\infty)$, $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $g(x)=\ln f(x)=\dfrac{\ln((1+x)}{x}$.

Funcția g este derivabilă și are derivata $g^I(x)=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\le 0,\ \forall x\ge 0$ deoarece funcția de la numărător $h(x)=x-(1+x)\ln(1+x)\le 0,\ \forall x\ge 0$.

Se calculează $h^I(x)\le 0\Rightarrow$h descrescătoare deci, $h(x)\le h(0),\ \forall x\ge 0$, așadar, funcția g(x) este o funcție descrescătoare pe $[0;\infty)$. Cum $x\ne 0\Rightarrow$ h este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$ iar funcția $f(x)=e^{g(x)}$ este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$. Cum $\dfrac{10}{11}\langle\dfrac{10}{9}\Rightarrow f\left(\dfrac{10}{9}\right)\langle f\left(\dfrac{10}{11}\right)\Rightarrow a^{\frac{1}{10}}\langle b^{\frac{1}{10}}\Rightarrow a\langle b.$

Altfel, se poate folosi inegalitatea lui Bernoulli și se arată că $a^{\frac{1}{10}}\ \langle\ 2\ \langle\ b^{\frac{1}{10}}$.

L:1068. Determinați o soluție rațională a ecuației $36^x-9^x-4^x=\dfrac{4}{3}\cdot x$. Arătați că ecuația $36^x\cdot\ln 36-9^x\cdot\ln 9-4^x\cdot\ln 4=\dfrac{4}{3}\cdot x$ are o singură soluție reală, care aparține intervalului (0,1).

Ionel Tudor, Călugăreni ,Giurgiu

Rezolvare: Se găsește că $x=-\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Q}$ verifică ecuația. Pentru ecuația $36^x\cdot\ln 36-9^x\cdot\ln 9-4^x\cdot\ln 4=\dfrac{4}{3}\cdot x$ scrisă sub forma $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\cdot\ln 9+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x\cdot\ln 4+\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{36}\right)^x=\ln 36$ îi asociem funcția

$f:\mathbb{R}\to(0;\infty)$, $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot\ln 9+\left(\frac{1}{9}\right)^x\cdot\ln 4+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^x$ care este strict descrescătoare.

Se calculează $f(0)=\ln 36+\frac{4}{3}\rangle\ln 36$ și $f(1)=\frac{1}{4}\ln 9+\frac{1}{9}\ln 4+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{36}$ de unde $\ln 36-f(1)\rangle 0\Rightarrow f(1)\langle\ln 36$, deci $\ln 36-f(1)\rangle 0\Rightarrow f(1)\langle\ln 36\langle f(0)$. Cum f este continuă și are proprietatea lui Darboux pe $(0;1)$ rezultă că există un $x_0\in(0;1)$ cu $f(x_0)=\ln 36\in(f(1);f(0))$. Deoarece funcția este strict descrescătoare, este și funcție injectivă atunci avem unicitatea soluției $x_0\in(0;1)$, $x_0\cong 0{,}1469$.

L:1069. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt două șiruri de numere reale cu termeni pozitivi definite de $a_0=b_0=1$ și de recurențele $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=(n^2+n+1)a_n+b_n$, $a_1=b_0=1$, $\forall n\geq 1$, atunci calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}{(na_1)\cdot(na_2)\cdot\ldots\cdot(na_n)}}$. **D.M. Bătinețu-Giurgiu,** București și **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Din prima recurență avem $b_n=a_{n+1}-a_n$ și $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ care, înlocuite în a doua recurență ne conduce la $a_{n+2}-a_{n+1}=(n^2+n+1)a_n+a_{n+1}-a_n\Leftrightarrow\Leftrightarrow a_{n+2}=2a_{n+1}+n(n+1)a_n$, (1), unde $a_0=1$ și $a_1=b_0=1$. Din (1) rezultă $a_2=2, a_3=6,$ $a_4=24$ și $a_5=120$, ceea ce ne sugerează faptul că $a_n=n!$.Vom confirma aceasta prin inducție matematică. Presupunem că $a_n=n!$ și $a_{n-1}=(n-1)!$. Din (1) obținem $a_{n+1}=2a_n+(n-1)na_{n-1}=2n!+(n-1)n(n-1)!=$ $=2n!+(n-1)n!=(n-1+2)n!=(n+1)!$.

Deoarece $a_n=n!$, $b_n=a_{n+1}-a_n=(n+1)!-n!=n\cdot n!=na_n$, avem

$$\frac{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=\frac{(1\cdot a_1)\cdot(2\cdot a_2)\cdot\ldots(n\cdot a_n)}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=n!=a_n\text{, atunci}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}{(na_1)\cdot(na_2)\cdot\ldots\cdot(na_n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

L:1070. Fie $f:\mathbf{R}\to[0,\infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(nx)}{x^2}=\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(3x)}\ldots\sqrt[2n+1]{f(nx)}}{x^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}$.

Marin Chirciu, Pitești

Rezolvare:

Din $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(nx)}{x^2}=\frac{1}{n}$, avem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$, deci în mod necesar $f(0)=1$.

Se arată prin inducție matematică:

$$P(n):\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2n+1]{f((2n+1)x)}}{x^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

Avem $P(1)$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{x^2}=1$, vezi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(nx)}{x^2}=\frac{1}{n}$, pentru $n=1$.

Demonstrăm $P(k)\Rightarrow P(k+1), k\in\mathbf{N}^*$.

$$P(k):\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}}{x^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

$$P(k+1):\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}}{x^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}}{x^2}==\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}}{x^2}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}\left(1-\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}\right)}{x^2}==1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}\left(1-\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}\right)}{x^2}\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2},$$

unde (1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}\left(1-\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}\right)}{x^2}=\frac{1}{(2k+3)^2}$,

care rezultă prin amplificare cu conjugata expresiei $\left(1-\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}\right)$ și

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2k+1]{f((2k+1)x)}}{1+\sqrt[2k+3]{f((2k+3)x)}+\sqrt[2k+3]{f^2((2k+3)x)}+\ldots+\sqrt[2k+3]{f^{2k+2}((2k+3)x)}}\overset{f(0)=1}{=}\frac{1}{2k+3},$$

iar $\lim_{x\to 0}\frac{1-f((2k+3)x)}{x^2}=\frac{1}{2k+3}$.

Folosind: $\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(5x)}\ldots\sqrt[2n+1]{f((2n+1)x)}}{x^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-f(x)\sqrt[3]{f(3x)}\sqrt[5]{f(3x)}\ldots\sqrt[2n+1]{f(nx)}}{x^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$$

L:1071. Dacă $n>1$ este un număr natural, atunci demonstrați că există $c\in(0,1)$ astfel încât $\left[\frac{c}{1}+\frac{c^2}{2}+\ldots+\frac{c^{n-1}}{n-1}\right]=0$, unde am notat cu [x] partea întreagă a numărului real x.

Marius Drăgan, București și **Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Considerăm funcția $f:(0,1)\to R$,

$$f(x)=\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)n(n+1)}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}.$$

Deoarece $f'(x)=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot x$ verifică condițiile teoremei lui Rolle rezultă că

există $c\in(0,1)$ astfel încât $f''(c)=0$, adică $\frac{c}{1}+\frac{c^2}{2}+\ldots+\frac{c^{n-1}}{n-1}=1-\frac{1}{n}\Rightarrow\left[\frac{c}{1}+\frac{c^2}{2}+\ldots+\frac{c^{n-1}}{n-1}\right]=0$.

▪ Clasa a XII-a

L:1072. Să se calculeze integrala $\mathbf{I}=\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2+4\cdot x+8}dx$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare:

Folosim substituția $t=\frac{8}{x}\Rightarrow x=\frac{8}{t}\Rightarrow dx=-\frac{8}{t^2}dt$. Când $x=2\Rightarrow t=4$ și când $x=4\Rightarrow t=2$.

Rezultă

$$I=\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2+4\cdot x+8}dx=\int_4^2 \frac{\ln 8-\ln t}{\left(\frac{8}{t}\right)^2+4\cdot\frac{8}{t}+8}\cdot\left(-\frac{8}{t^2}\right)dt=\int_2^4 \frac{\ln 8-\ln t}{8+4\cdot t+t^2}dt=\ln 8\cdot\int_2^4 \frac{1}{t^2+4\cdot t+8}dt-I\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\cdot\ln 8\cdot\int_2^4 \frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx\Rightarrow I=\frac{1}{2}\cdot\ln 8\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\,\frac{x+2}{2}\Big|_2^4\Rightarrow I=\frac{3\cdot\ln 2}{4}\cdot arctg\,\frac{1}{7}$$

L:1073. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ **care verifică condițiile:**

a) $f(x)\cdot F(4-x)=x-6$; **b)** $f(2)=1$**, unde F este o primitivă a lui f pe** $\mathbb{R}_+^*$**.**

Adrian Stan, Ștefan Pîrlog, Buzău

Rezolvare:

Facem înlocuirea, $x\to 4-x$ rezultând $f(4-x)\cdot F(x)=-x-2$;

Din $\left(F(x)\cdot F(4-x)\right)^I=F^/(x)\cdot F(4-x)+F(x)\cdot F^I(4-x)=f(x)\cdot F(4-x)+F(x)\cdot\left(-f(4-x)\right)=$

$=x-6-F(x)\cdot f(4-x)=x-6+x+2=2x-4\Rightarrow$

$F(x)\cdot F(4-x)=\int(2x-4)dx=x^2-4x+C$. Dar, $F(4-x)=\frac{x-6}{f(x)}\Rightarrow F(x)\cdot\frac{x-6}{f(x)}=x^2-4x+C\Rightarrow$

$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x-6}{x^2-4x+C_1}$, (*). Cum f(2) = 1, din a) rezultă că $f(2)\cdot F(2)=-4\Rightarrow F(2)=-4$. Atunci, din

(*) rezultă din $F(2)=\frac{1\cdot(-4+C_1)}{-4}\Rightarrow -4=\frac{-4+C_1}{-4}\Rightarrow C_1=20$. Din (*) rezultă

$$\frac{F^I(x)}{F(x)}=\frac{x-6}{x^2-4x+20}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-4)-4}{x^2-4x+20}\Rightarrow\ln|F(x)|=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2-4x+20\right|-4\cdot\int\frac{1}{(x-2)^2+4^2}dx$$

$\Rightarrow\ln|F(x)|=\ln\sqrt{x^2-4x+20}-4\cdot\frac{1}{4}\cdot arctg\,\frac{x-2}{4}+C_2\Rightarrow$ Din F(2)= - 4, $C_2=\ln 4-\frac{1}{2}\ln 16=0$.

Atunci, $\Rightarrow\ln|F(x)|=\ln\sqrt{x^2-4x+20}-\ln e^{arctg\frac{x-2}{4}}=\ln\frac{\sqrt{x^2-4x+20}}{e^{arctg\frac{x-2}{4}}}$,

$|F(x)|=\frac{\sqrt{x^2-4x+20}}{e^{arctg\frac{x-2}{4}}}\Rightarrow F(x)=\pm\frac{\sqrt{x^2-4x+20}}{e^{arctg\frac{x-2}{4}}}$. Cum f(2)=1 se ia $F(x)=-\frac{\sqrt{x^2-4x+20}}{e^{arctg\frac{x-2}{4}}}$ și

atunci, $f(x)=\frac{(x-6)\cdot F(x)}{x^2-4x+20}=\frac{(x-6)\cdot\left(-\sqrt{x^2-4x+20}\right)}{(x^2-4x+20)\cdot e^{arctg\frac{x-2}{4}}}=\frac{-(x-6)}{\sqrt{x^2-4x+20}\cdot e^{arctg\frac{x-2}{4}}}$.

L:1074. Se consideră funcția $f_n:[n,+\infty)\to R;\ f_n(x)=\sqrt{n+\sqrt{2nx-n^2}}+\sqrt{n-\sqrt{2nx-n^2}};\forall n\ge 1$.

Arătați că: $\int_n^{2n} f_n(x)dx=\frac{n\sqrt{n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$

Demonstrați că $\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{2}\left(9-\sqrt{3}\right)$**,unde** $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$

Elena și Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

Rezolvare:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2nx+2n\sqrt{2nx-n^2}}{2n}}+\sqrt{\frac{2nx-2n\sqrt{2nx-n^2}}{2n}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2nx-n^2}+n\right)^2}{2n}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2nx-n^2}-n\right)^2}{2n}}=\frac{\left|\sqrt{2nx-n^2}+n\right|+\left|\sqrt{2nx-n^2}-n\right|}{\sqrt{2n}}$$

$$x\ge n\Rightarrow 2nx\ge 2n^2\Rightarrow 2nx-n^2\ge n^2\Rightarrow\sqrt{2nx-n^2}\ge n\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2nx-n^2}+n\ge 2n\succ 0\\ \sqrt{2nx-n^2}-n\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{2nx-n^2}}{\sqrt{2n}}=\sqrt{4x-2n}$$

$$\int_n^{2n} f(x)dx=\int_n^{2n}\sqrt{4x-2n}dx=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{(4x-2n)^3}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_n^{2n}=\frac{n\sqrt{2n}}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

Observăm că $g(x)=f_3(x)\Rightarrow n=3\Rightarrow\int_3^6 g(x)dx=\sqrt{6}\left(3\sqrt{3}-1\right)$

L:1075. Să se demonstreze că polinomul $P(X)=(X-1)^2(X-6)^2+1$ **nu se poate descompune într-un produs de două polinoame cu coeficienți numere întregi.**

Radu Diaconu, Sibiu

Rezolvare: Evident $P(x)\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$,deci P(x) nu are rădăcini reale, prin urmare nu se poate scrie ca produsul dintre un polinom de gradul întâi și unul de gradul trei. Presupunem prin absurd că P(x) se poate scrie ca produsul a două polinoame de gradul doi cu coeficienți întregi.

Din $P(X)=(X^2-2x+1)\cdot(X^2-12x+36)+1=(x^2+px+q)(x^2+rs+s),\ p,q,r,s\in\mathbb{Z}$ obținem prin metoda identificării, sistemul $p+r=-14;\ pr+s+q=61;\ ps+qr=-84;\ qs=37$ de unde scoatem că $q+s\in\{-38;38\}$ și mai departe rezolvăm sistemele $\begin{cases}p+r=-14\\ pr=23\end{cases}$; $\begin{cases}p+r=-14\\ pr=99\end{cases}$, sisteme care nu ne conduc la soluții numere întregi, prin urmare, P(x) nu se poate scrie ca un produs de două polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}$.

L:1076. Să se arate că dacă într-un inel A avem $x^{24}=x,\ \forall x\in A$ **atunci:**

a) $x^2=x,\ \forall x\in A$**; b) inelul A este comutativ.** **Radu Diaconu**, Sibiu

Rezolvare:

a) Fie x= -1. Atunci, 1+1=0 și 2x=x+x= x(1+1)=0, pentru orice x din A. Analog x+x+x = x sau 3x = x. Rezultă $\forall n\in\mathbb{Z},\ x\in A\Rightarrow nx=\begin{cases}0,\ n\ par\\ x,\ n\ impar\end{cases}$.

Din $x^{24}=x\Rightarrow(x+1)^{24}=x+1\Rightarrow\left[(x+1)^2\right]^{12}=x+1\Rightarrow(x^2+2x+1)^{12}=x+1\Rightarrow\left[(x^2+1)^2\right]^6=x+1$

Continuând raționamentul obținem: $x^{16}=x^8 \big| \cdot x^8 \Rightarrow x^{24}=x^{16}=x^8=x \Rightarrow x^9=x^2$ și din $x^9=x \Rightarrow$ $x^2=x,\ \forall x\in A.$

b) Fie $x,y\in A$. Din a) rezultă $x^2=x \Rightarrow (x+y)^2=x+y \Rightarrow$

$x+y=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=x+xy+yx+y$. $xy=-yx=yx \Rightarrow xy=yx,\ \forall x,y\in A$

L:1077. Fie matricea $A(a)=\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ 2 & a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_6)$ **și mulțimea** $M=\left\{a\in\mathbb{Z}_6 \,\middle|\, A(a)\ \textit{este inversabilă}\right\}$.

Determinați mulțimea M. Rezolvați în $M_2(\mathbb{Z}_6)$ **ecuația** $A(\hat{1})\cdot X\cdot A(\hat{3})=A(\hat{5})$ **.**

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu

Rezolvare:

Matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det A(a)=\hat{3}\cdot a-2=\hat{3}\cdot a+4$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_6=\left\{\hat{0};\hat{1};2;\hat{3};4;\hat{5}\right\}$. Dar $x\in\mathbb{Z}_6$ este inversabil dacă și numai dacă x este prim cu 6 , deci $\det A(a)$ este inversabil doar dacă $\det A(a)\in\left\{\hat{1};\hat{5}\right\}$. Din $\hat{3}\cdot a+4=\hat{1}\Rightarrow a\in\left\{\hat{1};\hat{3};\hat{5}\right\}$.

Matricea A(a) este inversabilă dacă $A(a)\in\left\{A(\hat{1});A(\hat{3});A(\hat{5})\right\}$.

$A^{-1}(\hat{1})\cdot\big|A(\hat{1})\cdot X\cdot A(\hat{3})=A(\hat{5})\big|\cdot A^{-1}(\hat{3})\Rightarrow X=A^{-1}(\hat{1})\cdot A(\hat{5})\cdot A^{-1}(\hat{3})$. Obținem $X=\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{5}\\ 4 & \hat{3}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_6)$ soluția unică a ecuației date.

L:1078. Se consideră ecuația $4x^4-8(m+1)x+4m^2+8m+5=0,\ m\in\mathbb{R}$. **Arătați că pentru orice m real , ecuația nu are toate rădăcinile reale. Aflați rădăcinile reale ale ecuației.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Dacă ecuația ar avea toate rădăcinile reale, atunci $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Dar , din $4x_k^4-8(m+1)x_k+4m^2+8m+5=0,\ k=\overline{1,4}$ rezultă

$4\sum_{k=1}^{4}x_k^4=8(m+1)\sum_{k=1}^{4}x_k-4\left(4m^2+8m+5\right)=-1-(2m+2)^2\langle 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$, deci ecuația nu are toate rădăcinile reale.

Pentru a determina soluțiile scriem ecuația echivalentă $(2x^2-1)^2+(2x-2m-2)^2=0$ cu soluțiile reale $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Obținem: $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1-\frac{\sqrt{2}}{2};-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\Rightarrow x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

$m=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2};x_{3,4}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; $m=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2};x_{3,4}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

L:1079. Fie funcția $f:[a;b]\to\mathbb{R},\ a\langle b$ **continuă pe** $[a;b]$**. Să se arate că există** $c\in(a;b)$ **astfel încât**

$a\int_b^c f(x)dx+b\int_a^c f(x)dx=c(a+b-2c)f(c).$ **Gheorghe Ghiță**, Buzău

Rezolvare: Se aplică teorema lui Rolle funcției $g:[a;b]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x-a}{x}\int_b^x f(t)dt+\frac{x-b}{x}\int_a^x f(t)dt$ cu g(a)=g(b)=0. Rezultă că există $c\in(a;b)$ astfel încât $g^I(c)=0$ și cum

$g^I(x)=\frac{a}{x^2}\int_b^x f(t)dt+\frac{x-a}{x}f(x)+\frac{b}{x^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{x-a}{x}f(x),$ atunci prin înlocuire se obține cerința.

"Nu e vorba de cât de deștept sunt eu, ci de faptul că am mai multă răbdare în rezolvarea problemelor".
Albert Einstein
(1879 - 1955)

4. Probleme propuse

▪ Clasa a V-a

G:1257. O grădină dreptunghiulară de mărimi 100m și 50 m este cultivată cu trei culturi reprezentând 25%, 35% , respectiv 40% din suprafața ei. Poate avea parcela mai mare 2024 m^2 ? În câte moduri se pot roti cele trei culturi ?

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1258. Un balaur are 2023 de capete. Un cavaler cu puteri demne de un joc pe calculator reușește să taie cu o lovitură a sabiei 21, 24 sau 25 de capete. În fiecare caz, balaurului îi cresc la loc 18, 27, respectiv 23 de capete. Este posibil ca balaurul să fie omorât de către cavaler (prin doborârea tuturor capetelor)?

Gobej Adrian, Curtea de Argeș

G:1259. Arătați că niciunul dintre numerele $2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^6+1,.....,2^{2n}+1$ unde $n\in\mathbb{N}^*$ nu este pătrat perfect.

Alina Tigae, Cornelia Neacșu, Craiova

G:1260. Fie $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. Arătați că dacă unul din numerele 4^n-1 sau 4^n+1 este prim , celălalt este număr compus.

Olivia **Bercea**, Craiova

G:1261. Câte numere naturale $\overline{abc}$ există știind că $\overline{abc}-\overline{ac}$ este un pătrat perfect?

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1262. Determinați numerele naturale $\overline{xy}$ astfel încât $x^2+4x=5y$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1263. Determinați numărul *a* de forma $a=\underbrace{99...988}_{n}\underbrace{000...037}_{n}$ care are suma cifrelor 2024 ($n\geq 3$)

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

G:1264. Să se arate că:
a) Numărul 50 se scrie ca suma a trei pătrate perfecte.
b) Numărul 200 poate fi scris ca sumă a patru pătrate perfecte.
c) Numărul 10000 se poate scrie ca suma a douăsprezece pătrate perfecte.

Ionel Tudor-Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VI-a

G:1265. Aflați x din proporția $\frac{A}{2}=\frac{x}{45}$, unde $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{1935}$.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:1266. Se consideră două aliaje de aur și cupru. Unul are titlul 0,750 și altul are titlul 0,333. Ce cantitate din fiecare aliaj trebuie amestecată pentru a obține 1 kg de aliaj cu titlul de 0,583 ?

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1267. **a**) Să se scrie fracția $\frac{2023}{2024}$ ca sumă de cel puțin 2023 fracții distincte.

b) Să se scrie $2024=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+....+\frac{n}{a_n}$ cu $n\geq 2024$ iar $a_1,a_2,a_3,....,a_n\in\mathbb{Q}_+^*$.

c) Să se arate că $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-.....-\frac{2024}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2024\cdot 2025}\langle\frac{1}{2^{2024}}$.

Adrian Stan, Buzău

G:1268. Determinați numerele prime p și q astfel încât ecuația $x^5-px^4+q=0$ să admită rădăcină întreagă.

Simona Chiriță, Gigi Zaharia, Craiova

G:1269. **a)** Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n+2024 divide $n!$.
b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât n +2024 nu se divide $n!$
$n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n, 0!=1$.

Mihaela Dăianu , Simona **Chiriță**, Craiova

G:1270. Se consideră numere naturale a, b și c, unde $a=15n+24,\ b=3n+5,\ c=12n+19$. Să se arate că $[b,a]-[b,c]$ este un pătrat perfect. Prin [x, y] am notat cel mai mic multiplu comun al lui x și y.

Dumitru Preoteasa, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1271. a) Arătați că numărul $n=7778^2-2223^2$ este divizibil cu 73.
b) Aflați numărul divizorilor naturali proprii ai numărului *n*.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1272. Știind că numărul $2024^n+1012,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ se poate scrie ca suma a 2024 numere naturale consecutive, aflați ultimul termen al sumei.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a VII-a

G:1273. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ știind că $ab^2+4ab-3b^2+4a-12b=48$.

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

G:1274. Știind că $1\langle y\langle 2$ și $x-y=1$ să se calculeze valoarea expresiei
$E=\sqrt{x^2-4y}+\sqrt{y^2-2x-2y+6}$.

Adrian Stan, Buzău

G:1275. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+y^2+\sqrt{x-y^2-9}\leq 9$.

Delia Popescu, Ana Dumitru, Craiova

G:1276. Demonstrați fără a extrage rădăcina pătrată, inegalitatea:
$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+...+\frac{\sqrt{2022\cdot 2023}}{4045}<1011$.

Adrian Gobej, Curtea de Argeș

G:1277. a) Aflați numerele reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = n$;

b) Aflați numerele reale $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n\sqrt{n}$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = n^2$; **Ioana Genoveva**, **Monica Matei**, Craiova

G:1278. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1011} + \sqrt{y+1011} = \sqrt{2x+2y+4044}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1279. Se consideră în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$|1012x-1| + |2-1012x| + |1012x-3| + |4-1012x| + ... + |2022-1012x| + |1012x-2023| = 2024(1012x-2024)$$

Arătați că soluția ecuației este număr natural pătrat perfect.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

G:1280. În triunghiul ABC ducem $MN \parallel BC$ $(M \in AB, N \in AC)$, $NP \parallel AB$ $(P \in BC)$, $PQ \parallel AC$ $(Q \in MN)$, Raportul $\frac{QN}{BC} = \frac{1}{4}$. Aflați $\frac{MN}{BC}$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:1281. Arătați că în triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$ avem

$$\left(\frac{\sin B}{1-\sin B} + \frac{1}{1+\sin B} + \frac{1+\sin^2 B}{1-\sin^2 B}\right) \cdot \frac{(1+\sin B)(1-\sin B)}{2} - 1 + \cos^2 B = 1.$$

Nicolae Ivășchescu, Canada

G:1282. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

G:1283. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC, apoi se construiesc pătratele ABGF și BCDE în exteriorul triunghiului. Știind că perimetrul triunghiului ABE este egal cu perimetrul triunghiului GBE, să se afle m(<BAC)+m(<ACB). **Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădalina Buliga**, București

▪ Clasa a VIII-a

G:1284. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $22 \cdot \sqrt{x+121} + 198 \cdot \sqrt{81-x} + 10x = 2024$.

Adrian Stan, Buzău

G:1285. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} xy = 2x - y + 2 \\ yz = 2y - z + 2 \\ zx = 2z - x + 2 \end{cases}$. **Lavinia Trincu**, Craiova

G:1286. Să se determine distanța de la graficul funcției liniare care trece prin punctele A(-2;-3) și B(1;-2) la originea axelor de coordonate.

Ion Stănescu, Buzău

G:1287. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[x-20] + |x-20| + (x-20) = 15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. **Doina și Mircea Mario Stoica**, Arad

G:1288. Arătați că produsul rădăcinilor reale ale ecuației $\sqrt{3x^4-5x^2+3}-\sqrt{5}x=0$, este număr natural. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

G:1289. Se consideră ecuația $x^3+x^2-x-2=0$. Arătați că: Dacă $a\in\mathbb{R}$ este soluție atunci $1\langle a\langle 2$. Ecuația are o singură soluție reală.

Ionel Tudor,Călugăreni

G:1290. Se consideră paralelipipedul dreptunghic având dimensiunile a, b și c. Știind că suma ariilor a trei fețe distincte se exprimă prin același număr ca și pătratul diagonalei sale, să se arate că paralelipipedul este cub. **Dumitru Preoteasa**, Giurgiu, **Mădălina Buliga**, București

G:1291. Dimensiunile a,b,c ale unui paralelipiped dreptunghic verifică egalitatea $\frac{a+b+c}{ac}+\frac{a-b+c}{ab}+\frac{a-b-c}{bc}=\frac{714}{2024}$. Dacă volumul paralelipipedului este egal cu V=2024cm^3, calculați diagonala paralelipipedului.

Nicolae Ivășchescu, Canada

▪ Clasa a IX-a

L:1080. Să se rezolve în $[0;\infty)$ ecuația $\left[\sqrt{x}\right]=\frac{x^2-48}{2024}$. **Adrian Stan,** Buzău

L:1081. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ și numerele reale strict pozitive $a_1,a_2,.....,a_n$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+.....+\frac{1}{a_n}=n.$ Arătați că $S=\frac{1}{\sqrt{a_1^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2^3+1}}+.....+\frac{1}{\sqrt{a_n^3+1}}\leq\frac{n}{\sqrt{2}}$.

elevi, **Bianca Negreț, Horia Mușat**, Craiova

L:1082. a) Arătați că nu există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)f(y)+f(xy)+xy=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că nu există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)f(y)+f(xy)+x+y=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Mihaela Stăncele, Monica Stanca, Craiova

L:1083. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|15a-20a^2\right|=4$ și $a^2+b^2=1$. Calculați $\left|15b-20b^3\right|$.

Alina Tigae, Eugenia Turcu, Craiova

L:1084. Rezolvați ecuația $\sqrt{2-x}+\frac{4}{3+\sqrt{2-x}}=2$. **Alina Tigae**, Craiova

L:1085. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție și se consideră numărul real $a\geq 2$. Să se demonstreze că există $x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y$ astfel încât $\left|f^{2n-1}(x)-f^{2n-1}(y)\right|\neq a,\ \forall n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}.$

Florin Rotaru, Focșani

L:1086. Dacă $a\rangle 0, b\rangle 0, c\rangle 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, rezolvați în $(0;\infty)$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) \\ x^4+y^4+z^4=\frac{9}{16}\left(a^4+b^4+c^4\right) \\ x^2y^2z^2=\frac{1}{64}\left[3a^2b^2c^2+6(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4)-4(a^6+b^6+c^6)\right] \end{cases}$$

Aplicație: Determinați x,y,z în cazul a=2,b=3,c=4. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

L:1087. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuația : $\sqrt[3]{\frac{2x^2+x-3}{2x^2-x-3}}=\frac{1+x}{1-x}$. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

L:1088. Să se determine soluțiile sistemului: $\begin{cases}\sqrt{8x+5}+\sqrt{9y+6}=\sqrt{8x+9y+20}\\ \sqrt{12x+19}-\sqrt{3y+15}=\sqrt{12x+93-6}\end{cases}$.

Bela Kovacs, Satu Mare

L:1089. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\left[\sqrt{2n+1}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]=n+1$

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:1090. Dacă $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+.....+\frac{1}{1+2+.....+n}\right), n\in N^*$, atunci să se arate că :

a) $\sum_{k=1}^{n} a_k^2-a_{k+1}^2<\frac{1}{4}$; b) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2}-\frac{2}{(k+2)^2}\right]\cdot\frac{1}{a_k^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{3}{2}\right]$

Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena, Fălticeni

L:1091. Dacă $x,y,z>0$ și $n\in\mathbf{N}$ atunci $\sum\frac{x^{n+1}+n}{n+x+y+z^{n+1}}\geq 3\cdot\frac{n+1}{n+3}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1092. Pe segmentul (AB) se consideră punctul M, astfel încât: $\frac{AM}{MB}=\frac{k}{k+1}, k\in N^*$.

Dacă k=3, atunci demonstrați că:

a) $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{7}$ b) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{7}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{OA}$

e). Demonstrați că: $\overrightarrow{r_M}=\frac{k}{2k+1}\cdot\overrightarrow{r_B}+\frac{k+1}{2k+1}\cdot\overrightarrow{r_A}$.

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

L:1093. În patrulaterul inscriptibil ABCD cu $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d,\ AC=e,\ BD=f, R-$raza cercului circumscris patrulaterului,

avem: $\left(4-2\sqrt{2}\right)\pi R\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)\langle\ \frac{\pi-A}{\sin A}+\frac{\pi-b}{\sin b}+\frac{\pi-c}{\sin c}\langle 2\sqrt{2}\pi\mathbb{R}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)$.

Emil C. Popa, Sibiu

L:1094. Dacă $a,b,c>0$ și $\lambda,n\geq 0$ atunci $\sum\frac{a^3+\lambda b^3}{na+b}\geq\frac{\lambda+1}{n+1}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1095. Dacă $a,b,c>0$, $a+b+c=3$ și $-2\leq\lambda\leq 10$ atunci $\sum\left(\frac{a^4+\lambda a^2+1}{a^2+a+1}\right)^2\geq\frac{(\lambda+2)^2}{3}abc$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1096. Fie ΔABC și punctele $M\in(BC), N\in(AC), P\in(AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{NA}=\frac{PA}{PB}$.

Să se arate că $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow M,N,P$ sunt mijloacele laturilor ΔABC.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

L:1097. Fie ABC un triunghi de laturi , a,b,c. Notăm cu m_a mediana aferentă laturii a , etc. Demonstrați că : $\frac{a}{b+c}+\frac{m_a}{m_b+m_c}\geq 1$ **Vasile Jiglău**, Arad

▪ Clasa a X-a

L:1098. Există numerele raționale a,b,c,d,e,f astfel încât $\left(a+b\sqrt{5}\right)^2+\left(c+d\sqrt{5}\right)^2+\left(e+f\sqrt{5}\right)^2=2024+1012\sqrt{5}$? **Monica Stanca, Carmen Vlad**, Craiova

L:1099. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $(z+2)^4+3z^4-24z-12=0$. **Sorin Pirlea,** Craiova

L:1100. Fie $a,b\in\mathbb{C}^*$ astfel încât numărul $z=\frac{a^2+4b^2}{ab}$ este real și $z\in(-4;4)$. Arătați că $|a|=2|b|$.

Mirea Mihaela, Mihaela Dăianu, Craiova

L:1101. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z^{2024}=1$. Calculați valoarea sumei $S=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+z^2}+.....+\frac{1}{1+z^{2024}}$.

Adrian Stan, Buzău

L:1102. Dacă $a,b,c>0$, $a+b+c=1$ și $\lambda\geq 0$ atunci $\frac{1}{\sqrt[3]{a+\lambda}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+\lambda}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+\lambda}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{3\lambda+1}}$.

Marin Chirciu, Pitești

L:1103. În triunghiul ΔABC are loc relația $\sum\frac{r_a^4}{1+r_a^2r_b}\geq\frac{1944r^4}{8+27R^3}$. **Marin Chirciu**, Pitești

L:1104. Fie $a,b,c\rangle 0$ astfel încât $\frac{a}{1+2a}+\frac{b}{1+2b}+\frac{c}{1+2c}=1$. Arătați că $(1+2a)(1+2b)(1+2c)\geq 27$. În ce caz avem egalitate? **Mihai Călugăru, Sorin Pîrlea,** Craiova

L:1105. Rezolvați ecuația $\sqrt{2}\sin^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$.

eleve **Caterina Maria Zetu, Carina Maria Viespescu**, București

L:1106. Rezolvați ecuația $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$. elevi **Bianca Negreț, Horia Mușat**, Craiova

L:1107. Rezolvați ecuația $\sqrt{37-48tgx}=8tgx-5$. **Dorina Goiceanu, Iulia Sanda**, Craiova

L:1108. Arătați că numărul $a=\cos^2 3^0+\cos^2 33^0-\sqrt{3}\cos 3^0\cos 33^0$ este rațional.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1109. a) Determinați mulțimea punctelor $(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, pentru care $x^3+2^x=y^3+2^y$.

b) Rezolvați în numere reale ecuația $x^3+2^x=2024$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

L:1110. Se consideră ecuația: $(1+iz)^{2n}=i\cdot(1+z^2)^n$, unde $n\geq 1$ număr natural și $i^2=-1$.
a) Arătați că numărul complex i este o soluție a ecuației pentru orice $n\geq 1$.
b) Rezolvați ecuația în cazul n = 1 și într-unul din cazurile n = 2 sau n = 3 .
c) Determinați soluțiile ecuației în cazul general $n\in N^*$. **Adalbert Kovács Béla**, Satu Mare

▪ Clasa a XI-a

L:1111. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, cu $(A+B)\cdot A^*\cdot(A-B) = (A-B)\cdot B^*\cdot(A+B)$ (*), atunci avem : $(\det A)\cdot A + (\det B)\cdot B = AB^*A + BA^*B$, unde A* respectiv ,B* sunt adjuncta matricei A, respectiv B.

Diaconu Radu, Sibiu

L:1112. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{n^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}+\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}}\right).$$

Florin Rotaru, Focșani

L:1113. Se consideră în $\mathbb{R}$ ecuația $48x+16\sin^4 x-4\pi+4\sqrt{3}-7=0$. Arătați că există o soluție $x_1 \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. Rezolvați ecuația în $\mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

▪ Clasa a XII-a

L:1114. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{nk-1}}{1-x^k+x^{2k}}dx,\ k\in\mathbb{N}^*$.

Florin Rotaru, Focșani

L:1115. Să se arate că $4x^4+3x^3+2x^2+x+1\rangle 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației $4x^4+3x^3+2x^2+x+1=0$, arătați că $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{1-x_3}+\frac{1}{1-x_4}$ este număr rațional.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:1116. Să se demonstreze inegalitatea: $\int_{\frac{1}{2024}}^{3} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx < 2+\ln 3$.

Adalbert Kovács, Satu Mare

L:1117. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\frac{\sqrt{3x+\sin x}}{x}$. Arătați, că este integrabilă și demonstrați inegalitatea: $\int_{\varepsilon}^{8} f(x)dx < 10+\ln 2$, unde $1>\varepsilon>0$ si $\varepsilon\to 0$.

Adalbert Kovács, Satu Mare

L:1118. Să se calculeze integrala: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{e^x+1}dx$.

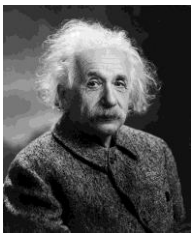
Vasile Mircea Popa, Sibiu

ERATĂ: La problema L: 1064, clasa a XI-a.

În loc de $\det(A+xB+yC)=3\det(a-xB+yC)$ se va scrie $\det(A+xB-yC)=3\det(A-xB+yC)$

„ Learn from yesterday, live for today, hope for tomorrow.
The important thing is not to stop questioning. ”

Albert Einstein
(1879 - 1955)



5. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before October 01, 2024.

PROPOSALS – QUICKIES

Q99. Proposed by Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania. If $a,b>0$**, then prove that**

$$\frac{(a^4+b^6)(5b^6+3)}{a^3b^3}>\frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Q100. Proposed by Gheorghe Molea, Curtea de Argeș, Romania. If $a,b,c,k>0$**, such that** $a^2+b^2+c^2=3k$**, then prove that** $2k^2(ab+bc+ca)-abc(a^3+b^3+c^3)\le 3k^3$.

Q101. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $m,n,p,x,y,z>0$**, such that** $mx+ny+pz=xyz$**, then prove that** $(x+y+z)^2\ge(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{p})^3$.

Q102. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. If $a,b,c,d>0$**, then**

prove that: $$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)}}+\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+a)(c+a)(d+a)}}+\sqrt[3]{\frac{cda}{(c+b)(d+b)(a+b)}}+$$
$$+\sqrt[3]{\frac{dab}{(d+c)(a+c)(b+c)}}\le 2.$$

Q103. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania.

Compute $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left\lfloor\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{n^2+2n}\right\rfloor}{\sqrt[n]{n!}}$**, where** $[*]=$ **GIF.**

Q104. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania. If $(a_n)_{n\ge1}$ **is a real positive sequence such that** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=e$**, then compute** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$.

Q105. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

If $a,b,c>0$, $abc=1$**, then prove that** $\sum\dfrac{(a+b)^8-a^8-b^8}{(a+b)^6-a^6-b^6}\ge\dfrac{381}{31}$.

Q106. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

In ΔABC **prove that** $\sum\dfrac{\tan^3\frac{A}{2}}{3\tan^2\frac{B}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}+1}\ge\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

SOLUTIONS - QUICKIES

Q93. Proposed by Mihály Bencze, Brașov, Romania. Prove that in all triangle ABC (with usual notations) holds the following inequality: $\sum \frac{m_a^{k+1}}{m_b+m_c-m_a} \ge \sum m_a^k$ **for all** $k \in N$.

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania.

Lemma. **In** ΔXYZ $\sum \frac{x^{k+1}}{y+z-x} \ge x^k+y^k+z^k, k \in \mathbf{N}, \lambda \ge 0$.

Proof. **Triples** $\left(x^k, y^k, z^k\right)$ **and** $\left(\frac{x}{y+z-x}, \frac{y}{z+x-y}, \frac{z}{x+y-z}\right)$ **they are equally ordered.**

From Chebyshev Inequality we have:

$$\sum \frac{x^{k+1}}{y+z-x} = \sum x^k \frac{x}{y+z-x} \overset{Chebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum x^k \sum \frac{x}{y+z-x} \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{3}\sum x^k \cdot 3 = \sum x^k,$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum \frac{x}{y+z-x} \ge 3, \ \sum \frac{x}{y+z-x} = \sum \frac{x^2}{xy+xz-x^2} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(xy+xz-x^2\right)} = \frac{\sum x^2+2\sum yz}{2\sum yz-\sum x^2} \overset{(2)}{\ge} 3,$$

where (2) $\Leftrightarrow \frac{\sum x^2+2\sum yz}{2\sum yz-\sum x^2} \ge 3 \Leftrightarrow \sum x^2 \ge \sum yz \Leftrightarrow \sum (x-y)^2 \ge 0$. **Because** m_a, m_b, m_c **can be the lengths of the sides of a triangle with substitution** $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$ **in Lemma we get conclusion. Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.**

Generalization. **If** $\lambda \ge 1, k \in \mathbf{N}$ **then in** ΔABC $\sum \frac{m_a^{k+1}}{\lambda(m_b+m_c)-m_a} \ge \frac{m_a^k+m_b^k+m_c^k}{2\lambda-1}$.

Proof. Lemma. **In** ΔXYZ **holds** $\sum \frac{x^{k+1}}{\lambda(y+z)-x} \ge \frac{x^k+y^k+z^k}{2\lambda-1}, k \in \mathbf{N}, \lambda \ge 1$.

We have $\lambda(y+z)-x \overset{\lambda \ge 1}{\ge} y+z-x > 0$, **in** ΔXYZ.

Triples $\left(x^k, y^k, z^k\right)$ **and** $\left(\frac{x}{\lambda(y+z)-x}, \frac{y}{\lambda(z+x)-y}, \frac{z}{\lambda(x+y)-z}\right)$ **they are equally ordered. From Chebyshev Inequality we have:**

$$\sum \frac{x^{k+1}}{\lambda(y+z)-x} = \sum x^k \frac{x}{\lambda(y+z)-x} \overset{Chebyshev}{\ge} \frac{1}{3}\sum x^k \sum \frac{x}{\lambda(y+z)-x} \overset{(1)}{\ge} \frac{1}{3}\sum x^k \cdot 3 = \sum x^\lambda,$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum \frac{x}{\lambda(y+z)-x} \ge \frac{3}{2\lambda-1},$$

$$\sum \frac{x}{\lambda(y+z)-x} = \sum \frac{x^2}{\lambda xy+\lambda xz-x^2} \overset{CS}{\ge} \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sum\left(\lambda xy+\lambda xz-x^2\right)} = \frac{\sum x^2+2\sum yz}{2\lambda\sum yz-\sum x^2} \overset{(2)}{\ge} \frac{3}{2\lambda-1},$$

where (2) $\Leftrightarrow \frac{\sum x^2+2\sum yz}{2\lambda\sum yz-\sum x^2} \ge \frac{3}{2\lambda-1} \Leftrightarrow 2(\lambda+1)\sum x^2 \ge 2(\lambda+1)\sum yz \Leftrightarrow \sum (x-y)^2 \ge 0$.

Because m_a, m_b, m_c can be the lengths of the sides of a triangle with substitution $(x,y,z)=(m_a,m_b,m_c)$ in Lemma we get conclusion. Equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Observation. For $\lambda = 1$ we get Q93 from Sclipirea Minții No. 32.

Solution by author. We have:

$$\sum \frac{m_a^{k+1}}{m_b+m_c-m_a} - \sum m_a^k = \sum\left(\frac{m_a^{k+1}}{m_b+m_c-m_a} - m_a^k\right) =$$

$$= \sum\left(\frac{m_a^k(m_a-m_b)}{m_b+m_c-m_a} + \frac{m_a^k(m_a-m_c)}{m_b+m_c-m_a}\right) = \sum \frac{m_a^k(m_a-m_b)}{m_b+m_c-m_a} + \sum \frac{m_a^k(m_a-m_c)}{m_b+m_c-m_a} =$$

$$= \sum \frac{m_a^k(m_a-m_b)}{m_b+m_c-m_a} + \sum \frac{m_a^k(m_b-m_a)}{m_c+m_a-m_b} =$$

$$= \sum (m_a-m_b)\cdot \frac{m_a^k(m_c+m_a-m_b) - m_b^k(m_b+m_c-m_a)}{(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)} =$$

$$= \sum (m_a-m_b)\cdot \frac{(m_a-m_b)(m_a^k+m_b^k) + m_c(m_a^k-m_b^k)}{(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)} =$$

$$= \sum \frac{(m_a-m_b)^2(m_a^k+m_b^k) + m_c(m_a-m_b)(m_a^k-m_b^k)}{(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)} \ge 0$$, **since the expressions** $m_a - m_b$ **and** $m_a^k - m_b^k$ **have the same sign. The proof is complete.**

Q94. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Find $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+1)!!)^b} - \sqrt[n]{(n!)^a((2n-1)!!)^b}\right)$**, where** $a+b=1$.

Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Since Stolz-Cezaro lemma the proposed limit is equal to $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+1)!!)^b}}{n+1}$**, and the limit may be re written as** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+2)!)^b}}{(n+1)\sqrt[n+1]{((2n+2)!!)^b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+2)!)^b}}{2^b(n+1)\sqrt[n+1]{((n+1)!)^b}}$.

Now, by the Stirling formula for the factorial,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+2)!)^b}}{2^b(n+1)\sqrt[n+1]{((n+1)!)^b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^a e^{-a}2^{2b}(n+1)^{2b}e^{-2b}}{2^b(n+1)(n+1)^b e^{-b}} = \frac{2^b}{e}$. **Therefore, the proposed limit is equal to** $\frac{2^b}{e}$.

Solution by author. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$.

Denoting $u_n = \frac{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+1)!!)^b}}{\sqrt[n]{(n!)^a((2n-1)!!)^b}}$**, then** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 1, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n} = 1$ **and**

$$\lim_{n\to\infty}u_n^n = \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^a}{(n!)^a}\cdot\frac{((2n+1)!!)^b}{((2n-1)!!)^b}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a(((2n+1)!!)^b}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right)^a\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^b\left(\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}\right)^b = e^a 2^b\left(\frac{e}{2}\right)^b = e^{a+b}.$$

Denoting $x_n = \left(\sqrt[n+1]{((n+1)!)^a((2n+1)!!)^b} - \sqrt[n]{(n!)^a((2n-1)!!)^b}\right) =$

$$=\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^a\left(\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}\right)^b\cdot n^{a+b-1}\cdot\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n$$

, therefore

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{e^a}\cdot\frac{2^b}{e^b}\cdot 1\cdot\ln e^{a+b}\cdot\lim_{n\to\Re}n^{a+b-1}=\begin{cases}0,\text{ daca } a+b<1\\ \frac{2^b}{e},\text{ daca } a+b=1.\\ \infty,\text{ daca } a+b>1\end{cases}$$

Q95. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that the equation $2010^n+2038^n=2024^n$ doesn't have solutions in positive integers for $n>2$.

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania. Using Fermat`s Great Theorem we have :
Equation $x^n+y^n=z^n$ does not have solutions in integers for $n>2$.
Solution by author. For $n\geq 2$ and $a,b>0$ we have

$$(a+b)^n\leq 2^{n-1}(a^n+b^n)\Rightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leq\frac{a^n+b^n}{2}\text{ and if } c=\frac{a+b}{2}\Rightarrow c^n\leq\frac{a^n+b^n}{2}<a^n+b^n.$$

Therefore, if $c=\frac{a+b}{2}$ and $n>2$, then the equation $a^n+b^n=c^n$ does not have solutions.

Hence, if $a=2010,\ b=2038$ and $c=\frac{2010+2038}{2}=2024$, then the equation $2010^n+2038^n=2024^n$ doesn't have solutions in positive integers for $n>2$.

Q96. Proposed by Florin Rotaru, Focșani, Romania. Prove that the equation $x^4+y^4+z^4=2u^2$ has infinite solutions in positive integers.

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania. The infinite set $\left\{(x,y,z,u)=\left(0,2n,2n,4n^2\right)/n\in\mathbf{N}\right\}$ is a solution to the equation $x^4+y^4+z^4=2u^2$.
Solution by author. If $x_k=k, y_k=k, z_k=2k, u_k=3k^2$ where $k\in N^*$,
since $k^4+k^4+16k^4=2(3k^2)^2$, then we determine an infinite solutions of the equation from the statement of problem.

Q97. Proposed by Dorin Marghidanu, Corabia, Romania. If $a_1,a_2,...,a_n>0$ and $a_1+a_2+...+a_n=S$, then prove that

$$\left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}}+\left(a_1^{a_2}a_2^{a_3}...a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}}+...+\left(a_1^{a_n}a_2^{a_1}...a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}}\leq S.$$

Solution by Marin Chirciu, Pitești, Romania. From Weighted Means Inequality we have:

$$\left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}}=\sqrt[S]{a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}}\leq\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{S},$$

$$\left(a_1^{a_2}a_2^{a_3}...a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}}=\sqrt[S]{a_1^{a_2}a_2^{a_3}...a_n^{a_1}}\leq\frac{a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1}{S},\ ...,$$

$$\left(a_1^{a_n}a_2^{a_1}...a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}}=\sqrt[S]{a_1^{a_n}a_2^{a_1}...a_n^{a_{n-1}}}\leq\frac{a_1a_n+a_2a_1+...+a_na_{n-1}}{S}.$$

Adding the n inequalities get

$$LHS=\left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}}+\left(a_1^{a_2}a_2^{a_3}...a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}}+...+\left(a_1^{a_n}a_2^{a_1}...a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}}\leq\frac{S^2}{S}=S=RHS.$$

Equality occurs if and only if $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Solution by Ángel Plaza, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

The proposed inequality follows by the weighted GM-AM inequality. Note that

$$(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n})^{\frac{1}{S}} \le \frac{a_1}{S} a_1 + \frac{a_2}{S} a_2 + \dots + \frac{a_n}{S} a_n,$$

$$(a_1^{a_2} a_2^{a_3} \dots a_n^{a_1})^{\frac{1}{S}} \le \frac{a_2}{S} a_1 + \frac{a_3}{S} a_2 + \dots + \frac{a_1}{S} a_n,$$

(…)

$$(a_1^{a_n} a_2^{a_1} \dots a_n^{a_{n-1}})^{\frac{1}{S}} \le \frac{a_n}{S} a_1 + \frac{a_1}{S} a_2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{S} a_n$$

and, by summing up previous inequalities the problem is done.

Solution by author. With the weighted means inequality,

$\left(a_1^{w_1} a_2^{w_2} \dots a_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+w_2+\dots+w_n}} \le \dfrac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$, where $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$, we have:

$\left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}} \le \dfrac{1}{S} \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, (1);

$\left(a_1^{a_2} a_2^{a_3} \dots a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}} \le \dfrac{1}{S} \cdot (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1)$, (2); .....;

$\left(a_1^{a_n} a_2^{a_1} \dots a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}} \le \dfrac{1}{S} \cdot (a_1 a_n + a_2 a_1 + \dots + a_n a_{n-1})$, ($n$). Adding the relations (1), (2), ..., (n), we obtain

$$\left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{S}} + \left(a_1^{a_2} a_2^{a_3} \dots a_n^{a_1}\right)^{\frac{1}{S}} + \dots + \left(a_1^{a_n} a_2^{a_1} \dots a_n^{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{S}} \le$$

$$\le \frac{1}{S} \cdot [a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)] =$$

$= \dfrac{1}{S} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \dfrac{1}{S} \cdot S^2 = S$. Equality occurs iff $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dfrac{S}{n}$.

Q98. Proposed by Rovsen Pirkuliyev, Azerbaijan. Prove that in all triangle ABC (with usual notations) holds the following inequality: $\sum \left(\dfrac{\cos \frac{A}{2}}{h_a} \right)^2 \ge \dfrac{1}{R^2}$.

Solution by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. Using $AM - GM$ inequality we obtain

$$\left(\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{h_a} \right)^2 = \frac{p(p-a)}{bc} \cdot \frac{a^2}{4S^2} = \frac{a^2 p(p-a)}{4bcp(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{(p-b+p-c)^2}{4bc(p-b)(p-c)} \ge \frac{4(p-b)(p-c)}{4bc(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{1}{bc}.$$

It remains to prove that $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \ge \frac{1}{R^2}$, that is the item 5.24 from O. Bottema, *Geometric Inequalities*.

Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania. Lemma. In ΔABC holds $\sum \dfrac{\cos \frac{A}{2}}{h_a} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{R}$.

$$\sum \frac{\cos \frac{A}{2}}{h_a} \overset{AM-GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\prod \frac{\cos \frac{A}{2}}{h_a}} = 3\sqrt[3]{\frac{\prod \cos \frac{A}{2}}{\prod h_a}} = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{4R}}{\frac{2r^2 p^2}{R}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{r^2 p}} \overset{(1)}{\ge} \frac{\sqrt{3}}{R} = RHS,$$

where (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{r^2 p}} \overset{Mitrinovic\&Euler}{\geq} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{R^2}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}R}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3 R^3}{8}}} = \frac{2}{\sqrt{3}R}$.

By Lemma $LHS = \sum\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^2 \overset{CS}{\geq} \frac{\left(\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^2}{3} \overset{Lema}{\geq} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{R}\right)^2}{3} = \frac{1}{R^2} = RHS$.

Equality occurs iff the triangle is equilateral.

Generalization If $n \in \mathbf{N}$ then in ΔABC $\sum\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^{2n} \geq \frac{3^{1-n}}{R^{2n}}$.

Proof. Lema. In ΔABC $\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$.

$$\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a} \overset{AM-GM}{\geq} 3\sqrt[3]{\prod\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}} = 3\sqrt[3]{\frac{\prod\cos\frac{A}{2}}{\prod h_a}} = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{p}{4R}}{\frac{2r^2p^2}{R}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{r^2p}} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sqrt{3}}{R} = RHS,$$

where (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{r^2 p}} \overset{Mitrinovic\&Euler}{\geq} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{R^2}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}R}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3 R^3}{8}}} = \frac{2}{\sqrt{3}R}$.

For $n=0$ we optain 3=3. For $n \in \mathbf{N}^*$ we use Hölder. Using Lemma:

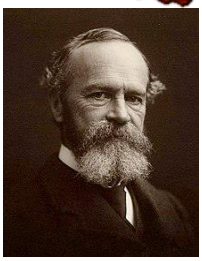
$$LHS = \sum\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^{2n} \overset{Holder}{\geq} \frac{\left(\sum\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^{2n}}{3^{2n-1}} \overset{Lema}{\geq} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{R}\right)^{2n}}{3^{n-1}} = \frac{3^{1-n}}{R^{2n}} = RHS.$$

Observation. For $n=1$ we obtain the Problem Q98.

Solution by author. in all triangle ABC (with usual notations) holds

$$h_a \leq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} \Leftrightarrow h_a^2 \leq bc\cos^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\frac{A}{2}}{h_a^2} \geq \frac{1}{bc}$$ and other two similarly.

So, $\sum\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{h_a}\right)^2 \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{9}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2}$ an if we using the well-known $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$ we obtain the desired inequality. The equality holds iff the triangle ABC is equilateral.



„ Secretul înțelepciunii este să știi ce lucruri să treci cu vederea.”
William James
(1646- 1716)

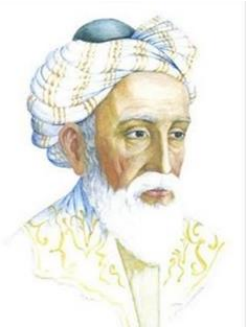
6. Caleidoscop matematic

Calendarul matematicienilor străini
Aniversări și comemorări în anul 2023

de Ionel Tudor

OMAR KHAYYAM (18.05.1048-4.12.1131)

S-au împlinit în anul 2023, 975 de ani de la nașterea renumitului matematician, astronom, poet și filosof persan Omar Khayyam, născut în orașul Nișapur din Horasan, la data de 18.05.1048. În matematică a avut preocupări de algebră și geometrie. El cunoștea teorema binomului pentru orice exponent natural și a dat demonstrația numerică a procedeului indian de extragere a rădăcinii pătrate și cubice, bazat pe formula pătratului și cubului unui binom. În lucrarea ,,Comentarii privind dificultățile din introducerile la cărțile ale lui Euclid” se ocupă de teoria paralelelor și de teoria rapoartelor.



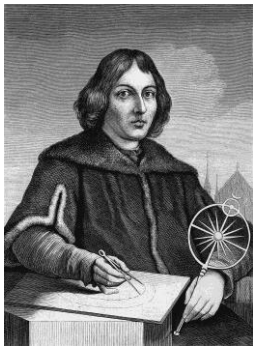
Înaintea lui Khayyam nu se făcea o delimitare strictă între aritmetică și algebră. În tratatul său ,,Despre demonstrațiile problemelor de algebră și almukabala’’ el a scris că ,,rezolvările algebrice se efectuează cu ajutorul ecuației’’.

Omar Khayyam a pus problema rezolvării numerice a ecuației de gradul al treilea, dar eforturile lui au fost zadarnice. ,,Demonstrarea acestor formule în cazul în care obiectul problemei este un număr absolut nu-i posibilă pentru noi și nici pentru cei care stăpânesc această artă. Poate cineva din cei care vin după noi o va afla’’. Și într-adevăr, rezolvarea prin radicali a ecuației de gradul trei o vor face peste 500 de ani italienii Del Ferro și Nicolo Tartaglia. Khayyam a dat clasificarea ecuațiilor analizând 25 de forme de ecuații și a fost primul care a determinat soluția geometrică generală a ecuațiilor cubice.

Khayyam a avut o contribuție importantă în reformarea calendarului persan, el stabilind un calendar care avea o eroare de o zi la 5000 de ani. A fost apreciat de contemporani ca om de știință dar mai ales ca poet prin vestitele sale catrene ,,Rubayatele’’care au fost traduse în limbile europene din secolele 19 și 20. Multe din rezultatele lui Omar Khayyam au rămas timp de secole necunoscute în Europa și multe dintre ele fiind redescoperite. A murit în anul 1131 în orașul natal unde, în 1934, după 800 de ani s-a ridicat un monument în semn de apreciere a omului și a operei sale.

NICOLAUS COPERNIC (19.02.1473-24.05.1543)

La 19 februarie 2023 s-au aniversat 550 de ani de la nașterea astronomului, matematicianului, fizicianului și medicului polonez Nicolaus Copernic. S-a născut la Torun într-o familie de origine germană. A urmat studii superioare de matematică, retorică ,gramatică și poetică la Universitatea din Cracovia iar la 20 ani obține titlul de doctor în aceste științe. În anul 1496 pleacă în Italia unde mai studiază medicina și dreptul canonic la Universitatea din Bologna ,cea mai mare din Europa în acel timp. Începe să se intereseze de astronomie și geografie iar în 1503 i se acordă titlul de Doctor în Drept canonic.



Copernic este considerat fondatorul astronomiei moderne. În opera sa ,,Șase cărți despre mișcările de revoluție ale corpurilor cerești terminată în 1530 dar apărută în 1543 la Nürnberg, Copernic a fundamentat științific sistemul heliocentric , arătând că planetele

și Pământul se rotesc în jurul axelor proprii și în jurul Soarelui , infirmând teoria geocentrică a lui Ptolemeu. Copernic a calculat distanțele planetelor față de Soare și a explicat procesul de succesiune a anotimpurilor , precesia echinocțiilor și mișcarea retrogradă a planetelor. Descoperirea sistemului heliocentric de către Copernic a venit în contradicție cu percepțiile Bisericii dar și cu ale înaintașilor Ptolemeu și Aristotel.

A mai publicat lucrarea ,,Despre revoluțiile sferelor cerești'' care a marcat ruptura dintre concepțiile medievale și cele renascentiste referitoare la lume. De asemenea în 1542 îi apare lucrarea ,,Trigonometrie Copernici''. Între 1543 și 1600 au fost puțini adepți ai sistemului copernician, cei mai renumiți fiind Galileo Galilei și Johannes Kepler. După respingerea teoriei lui Copernic de către autoritățile ecleziastice cu ocazia procesului lui Galilei(1633), doar câțiva filosofi iezuiți mai acceptau ideea unui univers heliocentric. Abia la sfârșitul secolului XVII , după apariția lucrărilor lui Isaac Newton asupra mecanicii cerești , sistemul copernician a fost admis de majoritatea gânditorilor europeni. Copernic a decedat la 24 mai 1543, în localitatea Frambork.

BLAISE PASCAL (19.06.1623-19.08.1662)

S-au împlinit în anul 2023, 400 de ani de la nașterea matematicianului, fizicianului și filosofului francez Blaise Pascal. În istoria științei, Pascal a fost de o mare precocitate, el nu a urmat nicio școală și nicio universitate. A fost însă instruit de tatăl său, Etienne Pascal și el matematician dar și magistrat francez.

Sub îndrumarea acestuia, Blaise Pascal la vârsta de doar 11 ani alcătuise un ,,Tratat al sunetelor'' iar la 12 ani regăsea 32 de propoziții al lui Euclid. La 16 ani a creat un tratat asupra secțiunilor conice și la 19 ani a construit o mașină de calcul (în 1642 prima mașină de calcul din lume) numită pascalina.

În fizică a dat ,,legea lui Pascal'' privind transmiterea presiunii prin fluide(principiul hidrostaticii) și în memoria lui unitatea de presiune se numește ,,pascal''. De asemenea în informatică există limbajul de programare ,,Pascal''. Ca matematician, Blaise Pascal, a avut cercetări de teoria numerelor, algebră, geometrie, analiză și împreună cu Pierre Fermat este fondatorul calculului probabilităților.

A folosit metoda demonstrației prin inducție completă. În geometrie ,Pascal a dat o teoremă privind hexagonul înscris într-o conică , a obținut prin proiecție o teoremă relativă la conice ditr-o teoremă a cercului și a propus probleme privind cicloida.

În anul 1654, Pascal i-a trimis lui Fermat lucrarea ,, Tratat despre triunghiul aritmetic''(apărută la Paris în 1665). În acestă lucrare, ca și în ,,Tratat despre ordinele numerice''(Paris ,1665), sunt cuprinse contribuțiile lui Pascal în domeniul analizei combinatorice, mai exact erau prezentate relațiile fundamentale dintre coeficienții binomiali pe care el îi identifica cu combinări $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Această formulă aditivă de formare a elementelor din ,,triunghiul lui Pascal '' fusese cunoscută în India cu două secole î.H.Teorema generală a dezvoltării binomului în cazul exponentului natural , apare pentru prima dată la matematicianul arab Al Kași (1380-1429) dar se pare că și Omar Khayyam o cunoștea în secolul 12. Cuvântul ,,combinare'' în sensul actual aparține lui Pascal. În corespondența din 1654 între Pascal și Fermat odată cu analiza combinatorie, a mai fost fondată o nouă știință matematică, cea de calculul probabilităților.

Punctul de plecare a fost o problemă ce apare în jocul cu zaruri, pusă de Luca Pacioli în 1494 și studiată apoi fără succes de Cardano(1539) și Tartaglia(1556). Soluția corectă pentru această problemă(de repartiție a mizei între doi jucători, pe care trebuie s-o obțină unul dintre ei după ce el va fi însumat un anumit număr de puncte în cazul în care jocul se întrerupe înainte ca unul dintre parteneri să atingă acest număr de puncte), a fost dată de Pascal și confirmată de Fermat care obținuse același rezultat , dar pe o cale mai simplă.

Despre matematică, Pascal afirma că ,,Obiectul matematicii este atât de serios încât este util să nu pierdem ocazia pentru a-l face puțin mai disctractiv''.

Despre univers, Pascal spunea că ,,Universul este un cerc al cărui centru este pretutindeni iar circumferința nicăeri''.

În lucrarea lui de filosofie ,,Pensées'' spunea că ,, Omul nu este decât o trestie , cea mai fragilă din natură, dar o trestie gânditoare''. Ca și alte genii ale matematicii(Galois,Abel,Ramanujan), Pascal a avut o viață scurtă , de 39 ani , decedând la 19 august 1662.

LAZARE NICOLAS MARGUERITE CARNOT (13.05.1753-2.08.1823)

Pe 2 august 2023 s-au împlinit 200 de ani de la moartea lui Lazare Carnot, matematician fizician, inginer, general și om politic francez. A avut preocupări și rezultate în algebră, geometrie, trigonometrie și mecanică. În 1803, prin lucrarea ,,Geometria poziției'', apare ca unul din creatorii geometriei analitice(în același timp cu Gaspard Monge(1746-1818)). În această lucrare a dat interpretări asupra soluțiilor negative ale ecuațiilor algebrice.Tot în 1803 a extins teorema lui Menelaus(70-140) pentru poligoane, în spațiu și pentru plane. Alte lucrări au fost ,,Despre corelația figurilor în geometrie''(1801) și ,,încercâri asupra teoriei transversalelor''(1806).

Tot în geometrie a introdus noțiunea de ,,patrulater complet'' Carnot a construit întreaga trigonometrie plană bazându-se pe teorema proiecțiilor. În mecanică a formulat principiile de echivalență ale sistemelor de forțe care acționează un solid rigid, a definitivat conceptul de lucru mecanic, a dat legea variației impulsului total în timpul ciocnirii. Principalele rezultate le-a sintetizat în lucrările ,,Eseu asupra mașinilor în general''(1783) în care a dat teorema ce îi poartă numele în legătură cu saltul energiei cinetice la introducerea de noi legături percutante și ,,Principiile fundamentale ale echilibrului și mișcării''(1803).

Lazare Carnot a participat la fondarea Școlii Politehnice din Paris și a participat la Revoluția Franceză din 1789, primind diverse misiuni. În 1796 este ales membru al Academiei de Științe dar în 1797 a cedat locul lui Napoleon Bonaparte(1769-1821) viitorul împărat al Franței(1804-1815). Este reales în 1800 însă este exclus în 1815 din motive politice. În 1823 este exilat și moare în Belgia. Fiul său, Sadi Carnot, a ajuns un mare fizician care a enunțat al doilea principiu al termodinamicii(principiul lui Carnot) ce a condus la fundamentoarea termodinamicii moderne. Alt fiu a fost Lazare Hippolyte Carnot (1801-1888) care a ajuns ministru al Instrucției Publice și senator în 1875. Un nepot al lui Lazare Carnot a fost Marie France Sadi Carnot(1837-1894) fiul lui Hipolyte Carnot .Acesta a participat activ la viața politică franceză fiind de mai multe ori ministru și a ajuns chiar președintele Franței în perioada 1887-1894. În timpul unei expoziții de la Lyon, în 1894, președintele Sadi Carnot a fost asasinat. În timpul prețedenției sale, rămășițele pământești ale lui Lazare Carnot au fost aduse la Pantheon.

În Franța ,numeroase monumente, instituții, străzi și bulevarde poartă numele lui Lazare Carnot care figurează și printre numele celor 72 de savanți înscriși pe Turnul Eiffel.

LEOPOLD KRONECKER (7.12.1823-29.12.1891)

S-au împlinit în anul 2023, 200 de ani de la nașterea lui Leopold Kronecker, matematician și om de afaceri german. S-a născut în localitatea Legnica , în provicenția Silezia din Regatul Prusiei (acum în Polonia).

În 1841 devine student la Universitatea din Berlin, unde la matematică îl are profesor pe Gustave Dirichlet iar în 1845 susține lucrarea de disertație în teoria algebrică a numerelor sub îndrumarea lui Dirichlet. În 1853 a scris un memoriu despre solubilitatea ecuațiilor algebrice extinzând lucrările lui Évariste Galois asupra teoriei ecuațiilor. A funcționat ca profesor la Universitatea Humboldt din Berlin unde a avut ca student pe Georg Cantor (1845-1918), creatorul teoriei mulțimilor.

Kronecker a fost ales în 1861 membru al Academiei din Belin dar a fost și membru al Academiei de Științe din Paris și la Royal Society din Londra.

A avut preocupări și rezultate remarcabile în domeniile teoriei numerelor ,

algebrei(teoria ecuațiilor, numere algebrice) și funcțiilor eliptice. Kronecker a fost un adversar al teoriei numerelor a lui Cantor fiind adeptul aritmetizării matematicii. El susținea că ,, toate rezultatele matematice

ale celor mai profunde cercetări trebuie să se poată exprima în final sub forma simplă de proprietăți ale numerelor întregi'' și nu lua în considerare numerele complexe , numerele iraționale , numerele raționale negative sau fracțiile ordinare , păstrând doar pe cele raționale pozitive.

De la aceste idei a apărut disputa dintre el și Weierstrass (1815-1897) și disputa cu Cantor. Rezultatul acestor dispute a fost o aprofundare a fundamentelor matematice realizată în secolul 20. Kronecker a introdus cunoscuta notație $|a_{ij}|$ pentru determinanți și a găsit un procedeu de reducere a numărului de încercări pentru determinarea rangului unei matrici. În 1866 a soluționat definitiv problema descompunerii polinoamelor în factori cu coeficienți raționali.

Studiind celebra lucrare ,,Cercetări'' a lui Gauss(1777-1855) care marca o perioadă nouă în istoria teoriei numerelor, Kronecker afirma ,,Conținutul lor va servi peste veacuri ca izvor pentru toate cercetările aritmeticii''.

De asemenea, el afirma că ,,Dumnezeu a creat numerele naturale. Restul este treaba omului''. A murit la 29 decembrie 1891 , după 68 de ani și a fost înmormântat la Berlin , în Imperiul German.

TULLIO LEVI-CIVITA(28.03.1873-29.12.1941)

Anul acesta s-au împlinit 150 de ani de la nașterea în 1873, la Padova, a matematicianului și fizicianului italian Tullio Levi –Civita. Este cunoscut prin lucrările de calcul tensorial și aplicațiile lui în teoria relativității, lucrări de teoria numerelor, analiză, mecanică analitică, mecanică cerească(problema celor trei corpuri) și lucrări de hidrodinamică.

A fost membru al Academiei Italiene de Științe , Societății Regale din Londra, Academiei Franceze de Științe, Academiei de Științe din Berlin, Academiei de Științe din Torino, Academiei de Științe din Saint Petersburg. În perioada 1898-1918 este șef al catedrei de mecanică rațională din Padova iar în 1918 este numit la catedra de analiză superioară a Universității Sapienza din Roma.

În anii 1915-1917 , Levi-Civita a avut o corespondență cu Albert Einstein pe probleme legate de câmpul gravitațional static și alte aspecte privind ecuațiile câmpurilor gravitaționale, energia gravitațională sau existența undelor gravitaționale. În 1933 a contribuit la ecuațiile mecanicii cuantice ale fizicianului englez Paul Dirac. Levi-Civita a fost profesorul geometrului român Gheorghe Vrânceanu (1900-1979) la Roma, când acesta își pregătea doctoratul. De asemenea, a fost conducătorul de doctorat al mai multor matematicieni printre care și profesorii români Octav Onicescu , Mendel Haimovici și Gheorghe Pic.

Levi –Civita l-a considerat pe marele nostru geometru Dimitrie Pompeiu ca fiind cel mai bun cunoscător al teoriei funcțiilor uniforme la începutul secolului 20.

A decedat la Roma în 29 decembrie 1941, la vârsta de 68 de ani .

Bibliografie

Adrian Stan, și colab - O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph Buzău, 2015
Mircea Trifu, Florin Diac, Costel Chiteș-Școala matematică românească de-a lungul timpului-Editura Oscar Print, București, 2010
Ion Purcaru, Octavian Bâscă-Pagini din istoria matematicii: oameni, idei și fapte de referință-Editura Universitară, București, 2017
Wikipedia

2024 AN BISECT

DOUĂMII DOUĂZECI ȘI PATRU

de Béla Kovács, Satu Mare

Un an nou: **2024**. Este an bisect, are 366 zile. Ziua în plus, conform explicațiilor din istoria calendarelor este ziua de după 23 februarie, adică 24 februarie și se numește ziua bisectă. Zilele următoare se decalează fiecare, astfel luna februarie are 29 de zile. Din considerații practice se acceptă și este mai convenabil ca 29 februarie să fie ziua bisectă.

În acest an de câte ori vom scrie numărul 2024, de câte ori îl vom întâlni, vom observa, vom citi? Și nu numai în scrieri legate de matematică. Ce știm, ce putem afla despre acest număr 2024 ? Vom analiza și vom prezenta câteva informații, care pot fi complectate de cei interesați.

2024 este un **număr natural par**.

Este un **număr compus**, aflat între cele mai apropiate numere prime: $2017 < 2024 < 2027$

Descompunerea lui în factori primi: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Divizorii săi sunt: 1 , 2 , 4 , 8 , 11 , 22 , 23 , 44 , 46 , 88 , 92 , 184 , 253 , 506 , 1012 , 2024.

Are 16 divizori. Suma divizorilor este 4320.

Media aritmetică a divizorilor este 270, număr natural, pentru care 2024 este un **număr aritmetic**.

Suma divizorilor mai mici ca 2024 este:

$1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 22 + 23 + 44 + 46 + 88 + 92 + 184 + 253 + 506 + 1012 = 2296$;

mai mare ca 2024, astfel este un **număr abundent**. Are abundența: $2296 – 2024 = 272$

Suma a 6 divizori este: $2024 = 1012 + 506 + 253 + 184 + 46 + 23$, deci este un **număr semiperfect**.

Cele 16 divizori ai săi pot fi împărțite în două grupe, având aceași sumă 2160.

$(1 + 2 + 4 + 8 + 11 + 22 + 88 + 2024) + (23 + 44 + 46 + 92 + 184 + 253 + 506 + 1012) = 2 \cdot 2160 = 4320$.

Conform acestei proprietăți 2024 este un **număr Zumkeller**.

2024 este divizibil cu suma cifrelor sale: $2024 = (2 + 0 + 2 + 4) \cdot 253$

Numărul 2024 împreună cu 2295 formează o pereche de **numere semiamiabile**, pentru că suma divizorilor unuia dintre numere, exceptând numărul in sine, micșorat cu unu, este egal cu celălalt număr. Și invers. Numărul 2295 are tot 16 divizori și suma lor, exceptând numărul în sine, este 2025.

Numărul 2024 este **intangibil** pentru că nu poate fi expimat ca suma divizorilor alicoți ai unui număr natural. Dar este un **număr practic** pentru că orice număr mai mic ca el, se poate exprima ca o suma de divizori diferiți ai lui 2024.

Exemple: $2000 = 1012 + 506 + 253 + 184 + 44 + 1$ $1000 = 506 + 253 + 184 + 46 + 11$

$500 = 253 + 184 + 46 + 11 + 4 + 2$ $150 = 92 + 46 + 8 + 4$

Numărul 2024 se poate scrie în trei moduri ca o sumă de numere naturale consecutive. Este astfel un **număr politicos** de rang 3. Iată:

$2024 = 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 95 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99$. Se scrie ca o sumă de 23 numere naturlae consecutive.

$2024 = 119 + 120 + 121 + 122 + 123 + 124 + 125 + 126 + 127 + 128 + 129 + 130 + 131 + 132 + 133 + 134$. Aici cu 16 numere naturale consecutive.

$2024 = 179 + 180+ 181 + 182 + 183 + 184 +185 + 186 + 187 + 188 + 189$. Aici cu 11 numere naturale consecutive.

Se poate scrie ca o sumă de numere naturale pare consecutive:

2024 = 246 + 248 + 250 + 252 + 254 + 256 + 258 + 260
2024 = 174 + 176 + 178 + 180 + 182 + 184 + 186 + 188 + 190 + 192 + 194
2024 = 66 + 68 + 70 + 72 + 74 + 76 + 78 + 80 + 82 + 84 + 86 + 88 + 90 + 92 + 94 + 96 + 98 + 100 + 102 + 104 + 106 + 108 + 110
Se poate scrie ca o sumă de numere naturale impare consecutive:
2024 = 1011 + 1013 **2024** = 503 + 515 + 507 + 509
2024 = 163 + 165 + 167 + 169 + 171 + 173 + 175 + 177 + 179 + 181 + 183 + 185 + 187 + 189 + 191 + 193 + 195 + 197 + 199 + 201 + 203 + 205
Se poate scrie ca suma unor numere cubice consecutive:
2024 = $2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3$
Scrierea ca suma pătratelor unor numere pare consecutive:
2024 = $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+14^2+16^2+18^2+20^2+22^2$
Scrierea cu puterile lui 2, în mai multe feluri::
2024 = $2^{11}-2^4-2^3$ **2024** = $2^{11}-2^5+2^3$
2024 = $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3$ **2024** = $2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4-2^3$
Scrierea cu puterile lui 3: **2024** = $3^7-3^5+3^4-3^0$ **2024** = $3^7-3^4-3^4-3^0$
Nu se poate descumpune într-o sumă de două pătrete:.
Se poate descompune într-o sumă de trei pătrate:
2024 = $2^2+16^2+42^2$ 2024 = $2^2+24^2+38^2$ 2024 = $8^2+14^2+42^2$
2024 = $10^2+18^2+40^2$ 2024 = $10^2+30^2+32^2$ 2024 = $16^2+18^2+38^2$
2024 = $18^2+26^2+32^2$
Se descompune într-o diferență de două pătrate:
2024 = $507^2 - 505^2$ 2024 = $255^2 - 251^2$ 2024 = $57^2 - 35^2$
2024 = $45^2 - 1^2$: este un număr Cunninghan.
Inversul numărului 2024 se poate descompune într-o sumă de două fracții egiptene:

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2025}+\frac{1}{4098600}=\frac{1}{2025}+\frac{1}{2024\cdot 2025}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2026}+\frac{1}{2050312}=\frac{1}{2026}+\frac{1}{2024\cdot 1013}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2028}+\frac{1}{1026168} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2032}+\frac{1}{514096} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2035}+\frac{1}{377440}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2040}+\frac{1}{258060} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2046}+\frac{1}{188232} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2047}+\frac{1}{180136}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2056}+\frac{1}{130042} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2068}+\frac{1}{95128} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2070}+\frac{1}{91080}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2088}+\frac{1}{66033} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2112}+\frac{1}{48576} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2116}+\frac{1}{46552}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2145}+\frac{1}{35880} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2200}+\frac{1}{25300} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2208}+\frac{1}{24288}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2266}+\frac{1}{18952} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2277}+\frac{1}{18216} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2376}+\frac{1}{13662}$$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2392}+\frac{1}{13156} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2508}+\frac{1}{10488} \quad \frac{1}{2024}=\frac{1}{2530}+\frac{1}{10120}$$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2553}+\frac{1}{9768}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2728}+\frac{1}{7843}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2760}+\frac{1}{7590}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2992}+\frac{1}{6256}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{3036}+\frac{1}{6072}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{3082}+\frac{1}{5896}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{3496}+\frac{1}{4807}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{3960}+\frac{1}{4140}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{4048}+\frac{1}{4048}$

Inversul numărului 2024 se poate descompune într-o diferență de două fracții egiptomiene:

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{88}-\frac{1}{92}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{552}-\frac{1}{759}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{966}-\frac{1}{1848}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1012}-\frac{1}{2024}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1056}-\frac{1}{2208}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1288}-\frac{1}{3542}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1320}-\frac{1}{3795}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1495}-\frac{1}{5720}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1518}-\frac{1}{6072}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1540}-\frac{1}{6440}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1656}-\frac{1}{9108}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1672}-\frac{1}{9614}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1771}-\frac{1}{14168}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1782}-\frac{1}{14904}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1840}-\frac{1}{20240}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1848}-\frac{1}{21252}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1903}-\frac{1}{31832}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1932}-\frac{1}{42504}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1936}-\frac{1}{44528}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1960}-\frac{1}{61985}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1978}-\frac{1}{87032}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{1980}-\frac{1}{91080}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{1992}-\frac{1}{125994}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2001}-\frac{1}{176088}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2002}-\frac{1}{184184}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2008}-\frac{1}{254012}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{370392}$

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2016}-\frac{1}{510048}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{1022120}$ $\frac{1}{2024}=\frac{1}{2022}-\frac{1}{2046264}$

$$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2023}-\frac{1}{4094552}=\frac{1}{2023}-\frac{1}{2023\cdot 2024}$$

Se află și printre numere pitagorice:

$90^2 + 2024^2 = 2026^2$ $1407^2 + 2024^2 = 2465^2$ $1518^2 + 2024^2 = 2530^2$

$1632^2 + 2024^2 = 2600^2$ $2415^2 + 2024^2 = 3151^2$

Scrierea cu factoriali: $2024 = \frac{8!}{4!}+\frac{6!}{2!}-4!+3!+2!$ $2024 = \frac{2!\cdot 14!+7!\cdot 9!}{2!\cdot 5!\cdot 9!}+1!$

$2024 = \frac{7!}{2!}-\frac{6!}{2!}-5!-4!+3!+2!$ $2024 = 7!-\frac{9!}{5!}+3!+2!$

$2024 = 3\cdot 6! - 5! - 4! + 3! + 2!$ $2024 = \frac{10!}{6!}-\frac{9!}{5!}+3!+2!$

Scrierea cu combinări:

2024 $= C_{23}^2+C_{23}^3$ **2024** $= C_5^3+C_{25}^3-C_{13}^3$ **2024** $= C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+\ldots+C_{23}^2 = C_{24}^3$

În ultima relație 2024 apare ca o sumă de numere triunghiulare consecutive, respectiv este un număr tetraedral.

Nu este număr pătratic, nu este număr pentagonal, nici hexagonal și așa maideparte, îl vom întâlni printre numere 74-poligonale. 2024 este al 8 - lea termen al șirului $b_n = 36n^2 - 35n$.

1 , 74 , 219 , 436 , 725 , 1086 , 1519 , **2024** , 2601 , 3250 , ...

Tot așa 2025 este al 9-lea număr 58-poligonal, ca termen al șirului $c_n = 28n^2 - 27n$.

1 , 58 , 171 , 340 , 565 , 846 , 1183 , 1576 , **2025** , 2530 , , , , ,

În fine: 2023 este al 7-lea număr 98-poligonal, fiint un termen al șirului $a_n = 48n^2 - 47n$.

1 , 98 , 291 , 580 , 965 , 1446 , **2023** , 2696 , 3465 , 4330 , . . .

Se poate exprima folosind o singură cifră:

$2024 = 7 \cdot (7 \cdot 7 - 7) \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + 7 + 7 : 7$

$2024 = 88 \cdot (8 + 8 + 8) - 88$

$2024 = (333 + 3 + 3 : 3)(3 + 3) + (3 + 3) : 3$

$2024 = (1111 - 111 + 11 + 1) \cdot (1 + 1)$

$2024 = 2222 - 222 + 22 + 2$

$$2024 = \frac{3333-333+33+3}{3} \cdot \frac{3+3}{3} \qquad 2024 = \frac{4444-444+44+4}{4} \cdot \frac{4+4}{4}$$

$$2024 = \frac{5555-555+55+5}{5} \cdot \frac{5+5}{5} \qquad 2024 = \frac{6666-666+66+6}{6} \cdot \frac{6+6}{6}$$

$$2024 = \frac{7777-777+77+7}{7} \cdot \frac{7+7}{7} \qquad 2024 = \frac{8888-888+88+8}{8} \cdot \frac{8+8}{8}$$

$$2024 = \frac{9999-999+99+9}{9} \cdot \frac{9+9}{9}$$

Se poate exprima cu tremenii șirului Fibonacci:

$2024 = F(2) + F(3) + F(7) + F(9) + F(14) + f(17) = 1 + 2 + 13 + 34 + 377 + 1597$

Ecuația de tip Pell $x^2 - 2024y^2 = 1$ are o soluție: $x = 45$ și $y = 1$ și o altă soluție: $x = 4049$ ș $y = 90$

Apare în inegalități: $1936 = 44^2 < 2024 < 45^2 = 2025$ $\quad 1.1^{79} < 2024 < 1.1^{80}$

$$\sum_{k=1}^{63} k < 2024 < \sum_{k=1}^{64} k \qquad \sum_{k=1}^{17} k^2 < 2024 < \sum_{k=1}^{18} k^2 \qquad \sum_{k=1}^{8} k^3 < 2024 < \sum_{k=1}^{9} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{209} \sqrt{k} < 2024 < \sum_{k=1}^{210} \sqrt{k} \qquad \sum_{k=1}^{403} \ln k < 2024 < \sum_{k=1}^{404} \ln k \approx 2024.49$$

$$\sum_{k=1}^{816} \lg k < 2024 < \sum_{k=1}^{817} \lg k \approx 23.4 \qquad 2.7176 < \left(1+\frac{1}{2024}\right)^{2024} < 2.718 < e$$

$$2024 = 14 + \frac{2\cdot 4}{3-\frac{2\cdot 4}{3}} + \frac{3\cdot 5}{4-\frac{3\cdot 5}{4}} + \frac{5\cdot 7}{6-\frac{5\cdot 7}{6}} + \frac{11\cdot 13}{12-\frac{11\cdot 13}{12}}$$

2024 cu cifrele romane: MMXXIV = MXII + MXII

Anul 2024 are 366 zile, 8784 ore, 527040 minute și 31.622.400 secunde.

2024! (factorial) este un număr uriaș având ultimele 503 cifre de zero. Este cu mult mai mare decât googol.

2^{2024} de asemenea este un număr foarte mare în care scriere apare grupa de cifre 666. Un astfel de număr se numește apocalipt.

Bibliografie: www.numbersaplenty.com

profesor: ***Béla Kovács***, *Satu Mare*
βελα

,, Viața este un exercițiu continuu pentru”
rezolvarea creativă a problemelor”.
Michael J. Gelb

(1952 -)

7. Poșta redacției

Dragi cititori, elevi și profesori, a apărut **numărul 33** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noștri, și care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi și profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă și performantă.

Profesorii și elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții și probleme cu enunț și rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e-mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate, de preferat scrise cu programul mathtype (**salvate în Word 2003-2007**). **Materialele primite trebuie să fie originale și să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise și către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările și comenzile pentru **numărul 34** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **01 OCTOMBRIE 2024**. Vă urăm succes și vă așteptăm.

ŞTIAŢI CĂ...?

Cifra 7 este cel mai popular număr favorit. Dacă te-ai îndreptat spre cineva de pe stradă și l-ai întrebat care este numărul lor preferat – dintre toate numerele între 1 și 100 – există aproape 10% șanse să spună „7”. Acestea au fost constatările matematicianului Alex Bellos, care a cerut respondenților să identifice numărul lor preferat și a găsit „7” ca fiind cea mai populară alegere.

Cifra 7 este un număr prim chiar mistic, o cifră a Universului și se regăsește în :
cele șapte stele ale Ursei Mari; șapte zile ale săptămânii, cele șapte note muzicale, cele șapte culori fundamentale, cele șapte vârste ale omului (nașterea, copilăria, adolescența, tinerețea, paternitatea, bătrânețea, moartea), cele șapte păcate capitale (lăcomia, avariția, orgoliul, invidia, desfrâul, lenea, furia), cele șapte minuni ale lumii (marea piramidă din Chichen Itza, Marele zid chinezesc, ruinele incașe Machu-Pichu, Statuia lui Iisus din Rio, Colosseumul din Roma, Orașul Petra din Indonezia), cele șapte mărimi prevăzute de Sistemul Internațional de Măsuri și Greutăți (lungimea, masa, timpul, intensitatea curentului electric, temperatura termodinamică, intensitatea luminoasă, cantitatea de substanță) sau în chimie PH 7 indicând nivelul neutru de aciditate al unei substanțe.

Elevi rezolvitori

Colegiul Economic „ Maria Teiuleanu” Pitești, Argeș.:
Clasa a VII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof**. Grigorie Dan Lucian**
Clasa a X-a: Maria- Amina Tanasi; **Clasa a XII-a:** Florentina Stanca, Gabriel Enache**. Prof. Daniel Văcaru.**
Liceul Tehnologic „Meserii și Servicii”, Buzău:
Clasa a X-a: Găvăneanu Mariana, Sava Gabriela, Mitrovici Izabela, ; **Prof. Adrian Stan.**
Liceul Teoretic „Alexandru Marghiloman”, Buzău
Clasa a X-a: Zaharia Darius Andrei, Bărbunea Daniela Nicoleta, Cazacu Rareș Ștefan, Radu Cătălina, Isăcilă Ema, Prof**. Stan Adrian**
Colegiul Național „Frații Buzești”, Craiova
Clasa a XI-a: Alexie Mihnea, Turcu Stiolica Alexandru, Boiangiu Vlad; **Clasa a XII-a**: Cașcotă Dalina, Rada Andra; Prof. **Tutescu Lucian**. **Clasa a VIII-a:** Iana Bianca, Tudorașcu Rareș, Schwarz Isabella. Prof. **Sanda Iulia**
Clasa a X-a: Mușat Horia, Negret Bianca, Cîrstea Ștefan, Cernaianu Alex, Colan Mara, Oroviceanu Vlad, Prof. **Moanță Cristian.**
Clasa a XI-a: Moanță Ștefan. Prof. **Goiceanu Dorina**
Liceul Energetic Craiova
Clasa a VII-a: Boldea Tania Maria, Buruiană Petru Cătălin. Prof. **Grigorie Dan Lucian**
Liceul Teoretic Bechet
Clasa a XII-a: Percea Valentina, Prof**. Iacob Meda Elena**
Școala Gimnazială Mircea Eliade, Craiova:
Clasa a V-a: Afrem Sara, Drăgan Raul, Pascu Ștefan, Geană Rebeca, Prisnel Sara**.** Prof. **Grigorie Dan Lucian.**
Scoala Preuniversitară de Măsură Smeeni, Buzău
Clasa a VI-a: Bunea Eliza, Neagu Delia, Manolache Andreea**;**
Clasa a VIII-a: Stănescu Daria, Buzoianu Alexandra, Ghiță Carlos. Prof**. Ion Stănescu.**

CURIOZITĂȚI CU NUMERE

$4=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1+2+3+4+5}$; $8=\frac{4\cdot56}{4+5+6}$; $10=\frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{1+2+3+4}$;

$13=\frac{1^5+2^5+3^5+4^5+5^5}{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}$; $16=\frac{6\cdot7\cdot8}{6+7+8}$; $20=\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{3+4+5+6}$;

$37=\frac{3^3+7^3}{3+7}$; $48=\frac{4^3+8^3}{4+8}$; $72=\frac{3^2\cdot4^2\cdot5^2}{3^2+4^2+5^2}$;

$1000=\frac{3^3\cdot4^3\cdot5^3}{3^3+4^3+5^3}$; $241=\frac{2^8+4^8+1^8}{2^4+4^4+1^4}$; $415=\frac{4^5+1^5+5^5}{4+1+5}$

Inspectoratul Scolar Judetean Buzau

Societatea de Stiinte Matematice din Romania, Filiala Buzau

Liceul Tehnologic " Meserii și Servicii " Buzău

organizează

Concursul Judetean de Matematică

SCLIPIREA MINTII

Editia a XVI-a, clasele IX-XII

16 MAI 2024

Cadrele didactice din județul Buzău care doresc să participe cu elevii de clasele IX- XII, care învață după programa M1, M2, trebuie să solicite acordul de parteneriat, să participe la propunerea subiectelor, să asigure supraveghere și evaluare.
Concursul se desfășoară JOI, 16 MAI 2024, ora 14,00.

INFORMAȚII la prof STAN ADRIAN, ady_stan2005@yahoo.com

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

REVISTA SCLIPIREA MINȚII

NR. 33 ANUL XVII - APRILIE 2024

Cuprins

1. Istoria matematicii 1

170 de ani de la nașterea matematicianului Henri Poincare
Adrian Stan 1

2. Articole și note matematice 3

Generalizarea unor probleme din Gazeta Matematică
D.M. Bătinețu Giurgiu, Daniel Sitaru, Neculai Stanciu 3

On 2023- 2024 Albania Olympiad Probleme 10-th Grade
de Neculai Stanciu 7

Asupra unei probleme din Evaluarea națională 2024
de Dumitru Preotesa 8

3. Probleme rezolvate 10

4. Probleme propuse 42

5. Quickies 49

6. Caleidoscop matematic 55

7. Poșta redacției 63

LEI 15 RON

editgraph
editură | tipar offset | tipar digital
www.editgraph.ro

ISSN 2247 – 6601
ISSN – L 2247 – 6601