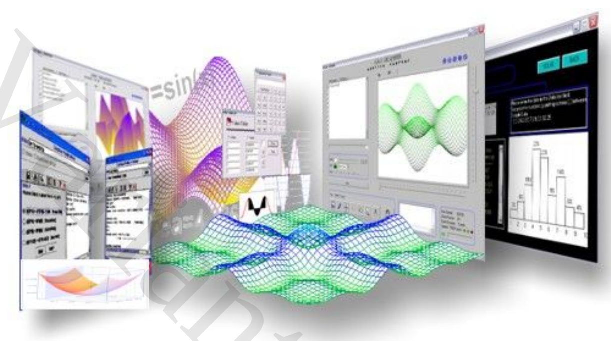
BAREM CULEGERE ONLINE

BACALAUREAT LA MATEMATICĂ 2012

Modele de subiecte cu bareme realizate după modelului oficial

www.mateinfo.ro & www.bacmatematica.ro



BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Prof: Andone Elena.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{63}$=0,(015873) Stabileşte a 2012-a zecimală ca fiind 1	3p 2p
2.	f(2)= - 3 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(-3)$ f(-3)= $-\frac{11}{2}$	1p 2p 2p
3.	Notăm 3^x=t Ecuaţia devine $5t^2-2t-3=0$ cu soluţiile $t_1=1$, $t_2= -\frac{3}{5}$ $3^x=1 \rightarrow x=0$, $3^x= -\frac{3}{5}$ nu are soluţii în mulţimea numerelor reale	1p 2p 2p
4.	6!=1·2·3·4·5·6 = 720	2p 3p
5.	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$	2p 3p
6.	raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din ipotenuză	2p

	Se calculează ipotenuza cu ajutorul teoremei lui Pitagora→i=10 R=5	1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	A^2=$\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ $A^2-2A+5I_2=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=O_2$	2p 2p 1p
b)	det A=5 → A este inversabilă $A=\dfrac{1}{\det A}A^*, A^*=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$(A-I_2)^2=A^2-2A+5I_2-4I_2=$ $O_2-4I_2=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$	3p 2p
2. a)	x ∘ y=xy-x-y+7= x(y-1) – (y-1) + 6= (x-1)(y-1)+6 → x ∘ y=(x-1)(y-1)+6	1p 3p 1p
b)	Relaţia ce trebuie demonstrată reprezintă asociativitatea legii de compoziţie x ∘ (y ∘ z)=(x-1)(y-1)(z-1)+5x+1 (x ∘ y) ∘ z=(x-1)(y-1)(z-1)+5z+1 Egalitatea celor două expresii nu se realizează pentru orice numere reale x, y, z → legea nu este asociativă	3p 2p
c)	x ∘ x=31 x ∘ x=(x-1)^2+ 6→ (x-1)^2=25 →	2p 2p

	x=6 sau x=- 4	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \rightarrow grafic ul\ funcţiei\ nu\ admite\ asimptotă\ orizontală\ la + \infty$ Studiem existenţa asimptotei oblice y=mx+n şi n m= n=1 → y= x+1 este asimptotă oblică la $+\infty$	2p 2p 1p
b)	f'(x)=$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ f'(x)=0 →x=0, x=2 se realizeză tabelul de variaţie al funcţiei funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$ şi pe intervalul $(0,\infty)$; funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$ şi pe intervalul $(1,2)$.	1p 1p 1p 2p
c)	Se calculează derivata a doua $f'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ se realizează tabelul de semn al derivatei a doua pe intervalul $(-\infty, 1)$ f'' este negativă deci funcţia f va fi concavă	1p 1p 1p 2p
2. a)	$l_s(0)=l_d(0)=f(0)=0$ →f este continuă în punctul x=0 Pe mulţimea numerelor reale nenule f este continuă fiind compunere de funcţii elementare→f continuă pe ℝ →f admite primitive pe ℝ	2p 2p 1p

b)	$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c_1, x>0\\ e^x-x+c_2, x\le 0\end{cases}$ Din continuitatea funcţiei F în punctul x=0 $\rightarrow c_1=1+c_2$ F(1)=0 $\rightarrow \frac{1}{2}\ln 2+c_1=0\rightarrow c_1=-\frac{1}{2}\ln 2$ $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln 2, x>0\\ e^x-x-\frac{1}{2}\ln 2-1, x\le 0\end{cases}$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_{-2}^{3} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx=$ $=\left(e^x-x\right)\Big\vert_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_{0}^{3}=1-e^{-2}-2+\frac{1}{2}\ln 10=$ $=\frac{1}{2}\ln 10-e^{-2}-1$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Prof: Andone Elena.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	1<2011<2012 $\log_{2012}1<\log_{2012}2011<\log_{2012}2012$ $0<\log_{2012}2011<1$ Partea întreagă va fi 0	3p 2p
2.	Pentru a determina imaginea funcţiei f, impunem condiţia ca ecuaţia f(x)=y să admită soluţii reale. $x^2-4x+5=y\to x^2-4x+5-y=0$ $\Delta\ge 0\to y-1\ge 0, \operatorname{Im} f=[1,\infty)$	1p 2p 2p
3.	Scriem relaţiile lui Viete $x_1+x_2=-3, x_1x_2=-8$ $x_1^2+x_2^2=9+16=25$	1p 2p 2p
4.	$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$	2p 3p

5.	$\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}\to\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-2}{5-2}\to 3y=x-2$	2p 3p
6.	cos(180^0-x)= - cosx= $-\frac{2}{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia dreptei A_2A_3 este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix}=0$ Dezvoltând determinantul se obţine 9x-2y-18=0	2p 2p 1p
b)	aria triunghiului $A_2A_4A_6$ este egală cu $\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ $\Delta=\begin{vmatrix} 2^2 & 3^2 & 1 \\ 2^4 & 3^4 & 1 \\ 2^6 & 3^6 & 1 \end{vmatrix}=36\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 16 & 81 & 1 \end{vmatrix}=4320$ A=2160	1p 3p 1p
c)	Calculăm $\Delta=\begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}=2^n\cdot 3^n\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}2^n\cdot 3^n\cdot 2\neq 0,(\forall)n\in\mathbb{N}$ →cele trei puncte un sunt coliniare	1p 2p 2p
2. a)	$x*y=2xy+4x+4y+3=2x(y+2)+4(y+2)-5=$ $=2(x+2)(y+2)-5$	1p 3p 1p
b)	Să verificăm dacă există e, număr real astfel încât x∗e=e∗x=x, oricare ar fi x număr real	3p

	x∗e= 2xe+4x+4e+3 Dacă x∗e=x, oricare ar fi x număr real →2xe+3x+4e+3=0, oricare ar fi x număr real x(2e+3) +4e+3=0, oricare ar fi x număr real→2e+3=0 şi 4e+3=0 contradicţie →nu există element neutru	2p
c)	$x*x=2(x+2)^2-5$ $x*x*x=4(x+2)^3-6(x+2)-5$ Ecuaţia cerută devine : $4(x+2)^3-6(x+2)-5=-7 \to 4(x+2)^3-6(x+2)+2=0 \to$ $2(x+2)^3-3(x+2)+1=0$ Notăm x+2=t, ecuaţia $2t^3-3t+1=0$ are soluţiile t=1→x= - 1, $t=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \to x=\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$ şi $t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \to x=\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=0$, se aplică regula lui L'Hospital	2p 2p 1p
b)	Se aplică regula de derivare a unui produs (lnx)'= $\frac{1}{x}$ (x^2)'=2x f'(x)= 2xlnx+x	1p 1p 1p 2p
c)	f'(x)= 2xlnx+x=x(2lnx+1) f'(x)=0 → x=0 şi x=$e^{-\frac{1}{2}}$ se realizeză tabelul de variaţie al funcţiei	1p 1p 1p

	pe intervalul $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ f este monoton descrescătoare şi pe intervalul $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ f este monoton crescătoare	2p
2. a)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = \ln(x+2)\Big\|_0^1 =$ $\ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$	2p 2p 1p
b)	V=$\pi\int_0^2 \frac{1}{(x+2)^2}dx = \pi(-\frac{1}{x+2})\Big\|_0^2 = \frac{\pi}{4}$	3p 2p
c)	Fie F o primitivă a funcţiei f. F'(x)=f(x)= $\frac{1}{x+2}$ >0, oricare $x \geq 0$ $\rightarrow$F strict crecătoare	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Andone Elena

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$ $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = -\frac{3}{4}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ $-3 < -\frac{3}{4} < -\frac{1}{8}$	1p 1p 1p 2p
2.	f este bijectivă deci este inversabilă pentru a determina inversa procedăm astfel: f(x)=y → -2x+3=y x= $\frac{3-y}{2}$ $f^{-1}(x)=\frac{3-y}{2}$	1p 2p 2p
3.	Impunem condiţiile de existenţă : x-1>0, x-1≠ 1,x+2>0 →x$\epsilon(1,\infty)-\{2\}$ $\log_{x-1}(x+2)=2 \leftrightarrow \log_{x-1}(x+2)=\log_{x-1}(x-1)^2$ Utilizând injectivitatea funcţiei logaritm → x+2=(x-1)^2 Soluţia convenabilă este x=$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	1p 2p 2p

4.	$A_5^3 + C_4^2 - P_4 = 60 + 6 - 24 = 42$	2p 3p
5.	Fie M mijlocul segmentului AB, M(0,1) ; $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{-1-1} = 1$, panta mediatoarei va fi -1 Ecuaţia mediatoarei : y-1= - x	2p 3p
6.	sinx=$\frac{1}{3}$ →cosx= $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $tgx = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	A+B=$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ det (A+B)=4	2p 2p 1p
b)	detA=8 → A este inversabilă $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	înmulţim egalitatea AX=B,la stânga cu A^{-1} X= A^{-1}B X=$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p

2. a)	f(2)=0, f(1)=2	1p
	- 2a+b= - 5, a-b=1	3p
	a= 4, b=3	1p
b)	$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{a}{2}$	3p
	Din relaţiile lui Viete, $x_3 + x_2 + x_1 = a$ şi $x_1 x_2 x_3 = -2$	2p
c)	f(X)= X^3-4X^2+3X+2	2p
	împărţim polinomul f la x-2 şi obţinem câtul C(X)=X^2-2X-1	2p
	ecuaţia de gradul al doilea asociată polinomul C are discriminantul pozitiv → polinomul f are toate rădăcinile reale.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$	2p
	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$	2p
	(se aplică regula lui L'Hospital)	1p
b)	Ecuaţia tangentei: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)	1p
	f(x_0)=0	1p
	f'(x)= $\frac{1-\ln x}{x^2}$, f'(x_0)=1	1p
	y=x-1	2p
c)	f'(x)= $\frac{1-\ln x}{x^2} = 0$	1p
	lnx-1=0→ x=e	1p
	se întocmeşte tabelul de variaţie al funcţiei	1p
		2p

	din tabel se observă că punctul de coordonate (e, $\frac{1}{e}$) este punct de maxim	
2. a)	$I=\int f(x)dx=\int x'\sqrt{x^2+64}dx=x\sqrt{x^2+64}-\int\frac{x^2+64-64}{\sqrt{x^2+64}}dx=$ $=x\sqrt{x^2+64}-I+64\ln(x+\sqrt{x^2+64})$ $2I=x\sqrt{x^2+64}+64\ln(x+\sqrt{x^2+64})$ $I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+64}+64\ln(x+\sqrt{x^2+64}))$	2p 2p 1p
b)	Utilizăm metoda schimbării de variabilă: $x^2+64=t$ $2xdx=dt$ $\int xf(x)dx=\int x\sqrt{x^2+64}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{3}t\sqrt{t}=$ $\frac{1}{3}(x^2+64)\sqrt{x^2+64}$	1p 1p 1p 2p
c)	$V=\pi\int_0^1(x^2+64)dx=\pi(\frac{x^3}{3}+64x)\Big\vert_0^1=\frac{193\pi}{3}$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Prof: Andone Emanuel

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_{10}=a_1+9r = 7+27=34$ $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=205$	3p 2p
2.	O ecuaţie de gradul al doilea are rădăcini reale distincte dacă şi numai dacă $\Delta>0$ $\Delta= 4m^2+1$ $4m^2+1>0$ oricare ar fi m număr real, deoarece reprezintă o sumă de pătrate	1p 2p 2p
3.	$G_f\cap Oy$: $f(0)= 5^{-2}-1= -\frac{24}{25}$ $G_f\cap Ox$: rezolvăm ecuaţia $f(x)=0\to 5^{x-2}=1\to x-2=0\to x=2$ $A(0, -\frac{24}{25})$, $B(2,0)$	1p 2p 2p
4.	$P_3=3!=6$ $A_4^2=\frac{4!}{2!}=12$, $A_4^2-3P_3=12-18=-6$	2p 3p
5.	Doi vectori sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este 0$\to$ $2(5+a)+2a=0$ $a=-\frac{5}{2}$	2p 3p

6.	$A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}\to$ $32\sqrt{3}=\frac{8\cdot 16\cdot \sin A}{2}\to \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Măsura unghiului A este egală cu 60^0 sau 120^0 $\cos A=\frac{1}{2}$ *sau* $\cos A=-\frac{1}{2}$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul său este nenul, det $A=3a^4-a^2$ $\det A=3a^3-a^2$ deci $a\in R-\{0,\frac{1}{3}\}$ A este inversabilă pentru orice a $a\in R-\{0,\frac{1}{3}\}$	2p 2p 1p
b)	$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -12\\ 0 & -2 & -18\\ -6 & 4 & 8\end{pmatrix}$ $(A^2)^T=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -6\\ 4 & -2 & 4\\ -12 & 18 & 8\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$3A=\begin{pmatrix}0 & 3a & -3a\\ -9 & 12 & -9a\\ -3a & 3a & 0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}a^2-3a & -a^2+4a & -3a^2\\ 3a^2-12 & -3a^2-3a+16 & -9a\\ -3a & -a^2+4a & -2a^2\end{pmatrix}$ $A^2-3A+2I_3=\begin{pmatrix}a^2-3a+2 & -a^2+a & -3a^2+3a\\ 3a^2-3 & -3a^2-3a+6 & 0\\ 0 & -a^2+a & 2-2a^2\end{pmatrix}=O_3$, deci, a=1	1p 2p 2p

2. a)	$a*(-b)= -ab+a^2+b^2$ $a*(-b)-ab= -ab+a^2+b^2-ab=(a-b)^2$ finalizare	1p 3p 1p
b)	Din definiţia monoidului → legea "* " trebuie săfie asociativă Din relaţia $x*(y*z)=(x*y)*z$, oricare ar fi x,y,z numere reale rezultă $xz(a+b)+x(a^2-a)-zb(b+1)=0$, oricare ar fi x,y,z numere reale→ $a+b=0$, $a^2-a=0$ şi $b(b+1)=0$ →$a=b=0$ sau $a=1$ şi $b= - 1$	3p 2p
c)	Utilizând rezultatul obţinut la punctul anterior, se disting două cazuri $a=b=0 \to x*y=xy$, mulţimea elementelor inversabile fiind $\mathbb{R}^*$ $a=1$ şi $b= -1 \to x*y= xy+x+y$ elementul neutru al acestei legi este 0 mulţimea elementelor inversabile este $\mathbb{R}-\{-1\}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$ $f(x)+f'(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x}=1 \to$ $x=0$	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}=0 \to x=2$ Se realizează tabelul de variaţie al funcţiei Se precizează semnul primei derivate Pe intervalul $(-\infty,2)$ f este strict crecătoare şi pe intervalul $(2,\infty)$ f *este* monoton descrescătoare	1p 1p 1p 2p

c)	f(0)= -1 f'(0)= 2 ecuaţia tangentei :y- f(0)= f'(0)(x-0) y+1=2x	1p 1p 1p 2p
2. a)	$g(x)=(x-1)^3$ $\int g(x)dx=\int (x-1)^3 dx=\frac{(x-1)^4}{4}+C$	2p 2p 1p
b)	$f(x)=x+a+\frac{bx+c}{x^2+x+1}\rightarrow$ $x^3-3x^2+3x-1=x^3+(a+1)x^2+x(a+b+1)+a+c\rightarrow$ a+1=-3; a+b+1=3; a+c=-1→ a= -4; b=6; c=3	1p 1p 1p 2p
c)	$\int x-4+\frac{3(2x+1)}{x^2+x+1}dx=\frac{x^2}{2}-4x+3\ln(x^2+x+1)+C$ $(x^2+x+1)'=2x+1\rightarrow$ $\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx=\ln(x^2+x+1)+C$ $\int x-4+\frac{3(2x+1)}{x^2+x+1}dx=\frac{x^2}{2}-4x+3\ln(x^2+x+1)+C$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Prof: Andone Emanuel.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_7 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 7} = \frac{2}{\log_5 7}$ $\log_5 7 \cdot \log_7 25 = 2$,deci este număr natural	3p 2p
2.	$x^2+x+m \geq -4 \Leftrightarrow x^2+x+m+4 \geq 0$ o funcţie de gradul al doilea are semn constant, semnul coeficientului lui x^2 , pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta \leq 0, \Delta = -4m-15$ $-4m-15 \leq 0 \to m \in [-\frac{15}{4}, \infty)$	1p 2p 2p
3.	$\frac{1}{5^x} = 5^{-x}$ Ecuaţia devine $5^{-x} = 5^{-4}$ x=4	1p 2p 2p
4.	$A_n^2 = n(n-1) = 56$ Se rezolvă ecuaţia de gradul doi şi se alege soluţia naturală n=8	2p 3p
5.	Se calculează fiecare latură a triunghiului cu formula $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ AB=AC=1, BC=$\sqrt{2}$ $P_{ABC}=2+\sqrt{2}$	2p 3p

6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$ $\cos A=\frac{1}{2}\to \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $2I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $A^2=2I_2$	2p 2p 1p
b)	$A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & 1\\ 1 & -1-x\end{pmatrix}$ $\det(A-xI_2)=x^2-2=0$ $x=\pm\sqrt{2}$	2p 2p 1p
c)	$A^4\cdot X=(A^2)^2\cdot X=(2I_2)^2X=4X$ $X\cdot A^4=X\cdot(A^2)^2=X(2I_2)^2=4X$ $A^4\cdot X=X\cdot A^4$	2p 2p 1p
2. a)	$\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f $\to f(\sqrt{2})=0$ $f(\sqrt{2})=16+4\sqrt{2}-a\sqrt{2}=0$ $a=4+8\sqrt{2}$	1p 3p 1p
b)	Se scriu relaţiile lui Viete $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=\frac{a}{3}$	3p

	$x_1x_2x_3x_4=\frac{2}{3}$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{a}{2}$	2p
c)	$(x-1)^2=x^2-2x+1$ Câtul este $3x^2+8x+14$ şi restul este $x(20-a)-12$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty \to x=0$ este asimptotă verticală la dreapta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \to$ graficul funcţiei nu admite asimptotă orizontală $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty \to$ graficul funcţiei nu admite asimptotă oblică	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-x+1)\ln x}{x^3}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-x+1)}{x^2}\cdot\frac{\ln x}{x}=0$	2p 3p
c)	Ecuaţia tangentei : $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=1$, $y_0=f(1)=0$ $f'(x)=(2x-1)\ln x+\frac{(x^2-x+1)}{x}$, $f'(1)=1$ $y=x-1$	1p 1p 2p 1p
2. a)	Explicitând cele două module se obţine	

	$f(x)=\begin{cases}(-x+2)e^{-x}, x\in(-\infty,0)\\(-x+2)e^{x}, x\in[0,2]\\(x-2)e^{x}, x\in(2,\infty)\end{cases}$ se studiază continuitatea funcţiei f în punctele 0 şi 2, în rest f fiind continuă deoarece este compunere de funcţii elementare $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=2$; $l_s(2)=l_d(2)=f(2)=0 \rightarrow$ f este continuă în punctele x=2 şi x=0 f admite primitive pe mulţimea numerelor reale deoarece orice funcţie continuă admite primitive	2p 2p 1p
b)	Utilizând integrarea prin părţi se obţine $\int(-x+2)e^{-x}dx=(x-1)e^{-x}$ $\int(-x+2)e^{x}dx=(3-x)e^{x}+c_1$ $\int(x-2)e^{x}dx=(x-3)e^{x}+c_2$ Din continuitatea primitivei $\rightarrow c_1=-4$ şi $c_2=2e^2-4$ Deci primitiva funcţiei f va fi $F(x)=\begin{cases}(x-1)e^{-x}, x\in(-\infty,0)\\(3-x)e^{x}-4, x\in[0,2]\\(x-3)e^{x}+2e^2-4, x\in(2,\infty)\end{cases}$ Primitiva care trece prin origine este G(x)=F(x)+c, G(0)=0→c=1	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_4^5 f(x)dx=(x-3)e^x\Big\|_4^5=e^4(2e-1)\geq 32$ 2<e<3→3<2e-1<5 $16<e^4<81$ $e^4(2e-1)>3\cdot 16=48>32$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Prof: ANDONE EMANUEL

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$10\sqrt{3}=\sqrt{300}$ $289<300<324\to\sqrt{289}<\sqrt{300}<\sqrt{324}$ $\to 17<\sqrt{300}<18$ partea întreagă a numărului $\sqrt{300}$ este 17	3p 2p
2.	Se impune condiţia de existenţă $x^2-3x+2>0$ Se rezolvă ecuaţia de gradul al doilea şi se obţin soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=2$ Utilizând semnul funcţiei de gradul al doilea se obţine $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	1p 2p 2p
3.	Se impune condiţia de existenţă $x+1\geq 0\to x\geq -1$ Se ridică egalitatea la pătrat şi se obţine $x^2+x=0$ Soluţiile vor fi $x_1=0$ şi $x_2=-1$	1p 2p 2p
4.	$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!},0\leq k\leq n,k,n\in\mathbb{N}$ $A_4^2=12$	2p 3p

5.	Ecuaţia unei drepte de pantă cunoscută, care trece printr-un punct cunoscut este: $y-y_0=m(x-x_0)$ $m=5$, $x_0=2$, $y_0=1$ $y-1=5(x-2)$ $y=5x-9$	2p 3p
6.	AC fiind cea mai mare latură a triunghiului, ei i se va opune unghiul cel mai mare→cel mai mare unghi al triunghiului este unghiul B Aplicăm teorema cosinusului $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$, $\cos B=-\dfrac{1}{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Determinantul poate fi calculat fie cu regula lui Saruss fie utilizând proprietăţile determinanţilor $\det A=a^3-3a+2=(a+2)(a-1)^2$	2p 2p 1p
b)	Înlocuind în fiecare ecuaţie a sistemului pe $x=2$, $y=1$, $z=0$ se obţine $a=0$	3p 2p
c)	Pentru $a=4$ $\det A\neq 0$, deci sistemul se rezolvă cu regula lui Cramer $\det A=54$, $\Delta_x=0, \Delta_y=18, \Delta_z=36$ soluţia sistemului va fi $x=0$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{2}{3}$	1p 2p 2p
2. a)	$P(x)=(x^4+1)(x^2+1)(x-1)(x+1)+10=x^8-1+10=x^8+9$ $P(2)=P(-2)=2^8+9=265$ $Q(x)=(x-1)(x+1)+10=x^2+9$, se observă că polinomul $Q(x)>0$,oricare ar fi x număr real→ $\lvert Q(a)\rvert=Q(a)$, oricare ar fi a număr real	1p 3p 1p
b)	Câtul împărţirii este $x^6-9x^4+81x^2-729$ şi restul 6570	3p 2p
c)	$x^2+9=x^2-9i^2=$	2p

	=(x-3i)(x+3i)	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s(1)=\sqrt{a^2+a+1}, l_d(1)=\lvert a\rvert, f(1)=\sqrt{a^2+a+1}$ f este continuă în punctul x=1 dacă $l_s(1)=l_d(1)=f(1)$ $\sqrt{a^2+a+1}=\lvert a\rvert \to$ridicând la pătrat se obţine : $a^2+a+1=a^2$ a= - 1	2p 2p 1p
b)	Pentru a= -1 funcţia f devine: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x+1}, x\le 1\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x}, x>1\end{cases}$ f’$_s$(1)=$\frac{1}{2}$, f’$_d$(1)=∞ f nu este derivabila în punctul x=1, acesta fiind punct unghiular pentru graficul funcţiei f	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=2$	1p 2p 2p
2. a)	$\int_0^1 (x+3)f(x)dx=\int_0^1\frac{x+3}{(x+3)^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2(x+3)}{(x+3)^2+1}dx=$ $=\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10)\Big\rvert_0^1=\frac{1}{2}(\ln 17-\ln 10)=\frac{1}{2}\ln\frac{17}{10}$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f'(x)f''(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\{[f'(x)]^2\}dx=\frac{1}{2}[f'(x)]^2\Big\rvert_0^1$	1p 1p

	$f'(x)=-\dfrac{2x+6}{(x^2+6x+10)^2}$, $f'(1)=-\dfrac{8}{289}$, $f'(0)=-\dfrac{3}{50}$	1p
	$f'(x)=\dfrac{-2x+6}{(x^2+6x+10)^2}$	1p
	$f'(1)=\dfrac{4}{289}$; $f'(0)=\dfrac{3}{50}$;	
	$\int_0^1 f'(x)f''(x)dx=\dfrac{1}{2}[(-\dfrac{8}{289})^2-(\dfrac{3}{50})^2]$	1p
c)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \dfrac{(x+3)'}{(x+3)^2+1}dx=arctg(x+3)\Big\|_1^2=arctg5-arctg4$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Prof: Andrei Lenuţa

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$8=\dfrac{x-3+x+3}{2}$ $16=2x\Rightarrow x=8$	3p 2p
2.	$f(0)=0-2012=-2012$, $f(1)=1-2012=-2011$ $f(2012)=2012-2012=0$ $p=0$	2p 2p 1p
3.	$3^{2x}=3^{3x-3}$ $2x=3x-3$ $x=3$	1p 2p 2p

4.	p=numărul cazurilor favorabile/numărul cazurilor posibile Avem trei cazuri favorabile şi cinci cazuri posibile (prin verificări , se obţin propoziţii adevărate pentru n= 1,2,3) $p=\frac{3}{5}$	1p 2p 2p
5.	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}$=8, $A_{\Delta ABC}=4$	2p 3p
6.	$\sin 70^0=\sin\left(90^0-20^0\right)=\cos 20^0$ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ Ţinând cont de relaţia de mai sus obţinem $\cos^2 20^0+\sin^2 20^0=1$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Folosim relaţia $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$ $x_1+x_2+x_3=0$	2p 3p
b)	$x_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ rădăcină a ecuaţiei $\Rightarrow x_i^3-4x_i+3=0\Rightarrow x_i^3=4x_i-3, i=\overline{1,3}$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=4\left(x_1+x_2+x_3\right)-9=4\cdot 0-9=-9$	3p 2p
c)	$d=3x_1x_2x_3-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)$ $x_1x_2x_3=-3$ $d=3\cdot(-3)+9=0$ Obs. Determinantul se poate rezolva usor folosind proprietăţile determinanţilor, şi anume se adună toate liniile (coloanele) se obţine suma rădăcinilor care este egală cu 0 şi astfel determinantul este egal cu 0.	3p 1p 1p
2. a)	$A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}2012^x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2012^y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}2012^x\cdot 2012^y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2012^{x+y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A_{x+y}$	2p 3p
b)	(M,·) grup abelian (comutativ) dacă sunt îndeplinite următoarele axiome asociativitate, comutativitate, element neutru, elemente simetrizabile Asociativitate $\left(A_x\cdot A_y\right)\cdot A_z=A_x\cdot\left(A_y\cdot A_z\right),\forall A_x,A_y,A_z\in M$ $\left(A_x\cdot A_y\right)\cdot A_z=A_{x+y}\cdot A_z=A_{(x+y)+z}=A_{x+(y+z)}=A_x\cdot\left(A_y\cdot A_z\right)$ Comutativitate $A_x\cdot A_y=A_y\cdot A_x,\forall A_x,A_y\in M$ $A_x\cdot A_y=A_{x+y}=A_{y+x}=A_y\cdot A_x$ Element neutru $(\exists)A_e\in M$ astfel încât $A_x\cdot A_e=A_x,\forall A_x\in M$	1p 1p 1p 1p

	$A_{x+e}=A_x \Rightarrow x+e=x \Rightarrow e=0$,deci elementul neutru este A_0 Elemente simetrizabile $A_x \cdot A_{x'}=A_e \Rightarrow A_{x+x'}=A_0 \Rightarrow x+x'=0 \Rightarrow x'=-x$	1p
c)	$f(x+y)=A_{x+y}$ $A_{x+y}=A_x \cdot A_y$ $A_x \cdot A_y = f(x)\cdot f(y)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\frac{1}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)'=x'+1'+\left(\frac{1}{x+1}\right)'=1-\frac{1}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	2p 2p 1p
b)	Monotonia funcţiei este dată de semnul derivatei întâi $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x^2+2x=0$ $x_1=-2, x_2=0$, $f'(x)\geq 0$ pentru $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$ pentru $x\in[-2,0]-\{-1\}$ Pentru $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ f este crescătoare, iar pentru $x\in[-2,0]-\{-1\}$ f este descrescătoare	1p 1p 2p 1p
c)	$l_s(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=-\infty$ $l_d(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=+\infty$ Ecuaţia asimptotei verticale este $x=-1$	2p 2p 1p
2. a)	$\left(\sqrt{x^2+5}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ $\int_0^2 \frac{x}{f(x)}dx=\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx=\int_0^2\left(\sqrt{x^2+5}\right)'dx=\sqrt{x^2+5}\Big\|_0^2$ $\sqrt{x^2+5}\Big\|_0^2=3-\sqrt{5}$	2p 2p 1p
b)	$V=\pi\int_2^4 f^2(x)dx$ $V=\pi\int_2^4\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2dx=\pi\int_2^4(x^2+5)dx$	1p 2p 2p

	$V=\pi\left(\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big\|_2^4=\pi\left(\frac{64}{3}+20-\frac{8}{3}-10\right)=\frac{86\pi}{3}$	
c)	$\int_{-2}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx=\int_{-2}^{0}x\sqrt{x^2+5}dx+\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx$ $\int_{-2}^{0}x\sqrt{x^2+5}dx=-\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx$ $\int_{-2}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx=\int_{-2}^{0}x\sqrt{x^2+5}dx+\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx=-\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx+\int_{0}^{2}x\sqrt{x^2+5}dx=0$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Prof: Andrei Lenuţa

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$C_5^3=10$ $10-10=0$	3p 2p
2.	$5x+6>0\Rightarrow x>-\frac{6}{5}\Rightarrow x\in\left(-\frac{6}{5},+\infty\right)$ $5x+6=36\Rightarrow x=6$ $6\in\left(-\frac{6}{5},+\infty\right)$, deci soluţia ecuaţiei este $x=6$	1p 2p 2p
3.	Ecuaţia are rădăcini reale egale dacă $\Delta=0$ $\Delta=b^2-4ac=(3m+2)^2-4=9m^2+24m+4-4=9m^2+24m$ $9m^2+12m=0\Rightarrow m_1=0,m_2=-\frac{4}{3}$ şi $m_2=0$	1p 2p 2p
4.	Fie x preţul iniţial al produsului, atunci $x-\frac{5}{100}x=190$ $\frac{95}{100}x=190$ $x=\frac{190\cdot100}{95}$ $x=200$ lei	2p 1p 1p 1p
5.	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-5}{0-5}=\frac{y-4}{2-4}$	2p 3p

	$2(x-5)=5(y-4)\Rightarrow 2x-5y+10=0$	
6.	Formula pentru aria triunghiului este $A_{\Delta DEF}=\dfrac{DE\cdot DF\cdot\sin D}{2}$ $A_{\Delta DEF}=\dfrac{12\cdot 6\cdot\sin 60^0}{2}=36\cdot\sin 60^0$ $A_{\Delta DEF}=36\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=4A$	2p 3p
b)	$X(a)\cdot X(b)=(aA+I_2)(bA+I_2)=abA^2+aA+bA+I_2$ Ţinând cont că $A^2=4A$ $\Rightarrow X(a)\cdot X(b)=4abA+aA+bA+I_2=(4ab+a+b)A+I_2=X(a+b+4ab)$	3p 2p
c)	$X(a)$ inversabilă $X(a)\Leftrightarrow\det(X(a))\neq 0$ $\det(X(a))=\begin{vmatrix}a+1&a\\3a&3a+1\end{vmatrix}=(a+1)(3a+1)-3a^2$ $\det(X(a))=3a^2+a+3a+1-3a^2=4a+1\neq 0$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$	1p 2p 2p
2. a)	Aplicăm relaţiile lui Viete $x_1+x_2+x_3=-4$ şi $x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3=-10$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3)=(-4)^2-2(-10)$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=16+20=36$, este o constantă, deci nu depinde de m	1p 3p 1p
b)	$x_i\ (i=\overline{1,3})$ rădăcină a lui $f\Rightarrow f(x_i)=0\Rightarrow x_i^3=-4x_i^2+10x_i-m$ $\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-4(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+10(x_1+x_2+x_3)-3m$ Înlocuind $x_1+x_2+x_3=-4$ şi $x_1^2+x_2^2+x_3^2=26$ se obţine $-144-3m=-9\Rightarrow 3m=-135\Rightarrow m=-45$	3p 2p
c)	$x_1+x_2+x_3=-4, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_2=-10, x_1x_2x_3=-m$ $d=\begin{vmatrix}x_1+x_2+x_3&x_2&x_3\\x_1+x_2+x_3&x_3&x_1\\x_1+x_2+x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix}1&x_2&x_3\\1&x_3&x_1\\1&x_1&x_2\end{vmatrix}=$ $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2-x_1^2-x_2^2-x_3^2)$ $d=-4(-10-26)=-4(-36)=144\in\mathbb{N}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\dfrac{\left(x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2}}$ $=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ funcţia nu admite asimptotă orizontală $y=mx+n$, $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}\right)=0$ Ecuaţia asimptotei ablice este $y=x$	1p 1p 2p 1p
c)	f convexă dacă $f''(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $f''(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)''=\dfrac{x'\sqrt{x^2+2}-x\left(\sqrt{x^2+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}$ $\dfrac{x^2+2-x^2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$	1p 2p 2p
2. a)	$\int (x+9)^2\cdot\dfrac{1}{x+9}dx=\int (x+9)dx$ $\int xdx+9\int dx=\dfrac{x^2}{2}+9x+C$	2p 3p
b)	$f_2(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$ $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{x^2+9}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+9\right)'}{x^2+9}dx$ $=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big\|_0^1$ $=\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+9)-\ln(0+9)\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$	1p 2p 1p 2p
c)	Aria este egală cu $\int\limits_0^1 f_{2012}(x)dx$ $0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x^{2012}\leq 1\Leftrightarrow 9\leq x^{2012}+9\leq 10$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{10}\leq\dfrac{1}{x^{2012}+9}\leq\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow\dfrac{1}{10}\leq f_{2012}(x)\leq\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{10}\leq\int\limits_0^1 f_{2012}(x)dx\leq\dfrac{1}{9}$	1p 2p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	a=3 $b=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ a<b	2p 2p 1p
2.	$\Delta=b^2-4ac=9-8=1$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2},x_2=1$ $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\cap\mathbb{Z}=\{1\}$	1p 2p 2p
3.	$\frac{10}{100}\cdot 150=15$ lei 150 lei+15 lei=165 lei preţul obiectului	2p 3p
4.	$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!},n,k\in\mathbb{N},n\geq k$ $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=60$	2p 3p
5.	$A\left(m^2,4m+1\right)$ se află pe dreapta d dacă şi numai dacă coordonatele punctului A verifică ecuaţia dreptei d. În ecuaţia dreptei punem $x=m^2$ şi $y=4m+1$, obţinem $m^2+4m+4=0\Rightarrow(m+2)^2=0\Rightarrow m=-2$	2p 3p
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	1p 3p

	$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$ Cum x este măsura unui unghi ascuţit, rezultă $\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	1p
	$\det A = 8+0+0-0-0-0$	3p
	$\det A = 8$	1p
b)	A^{-1} este inversa lui A dacă $A^{-1}\cdot A = I_3$	2p
	$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$	3p
c)	Am văzut la punctul a că A^{-1} este inversa lui A	1p
	Deci, $X = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	2p
	$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	2p
2. a)	$\sqrt{2012}\cdot\sqrt{2012} = 2012$	1p
	$\sqrt{2012} * \sqrt{2012} = \sqrt{2012}\cdot\sqrt{2012} - \sqrt{2012}\cdot\sqrt{2012} - \sqrt{2012}\cdot\sqrt{2012} + 2012 + \sqrt{2012}$	3p

	Rezultatul final $\sqrt{2012} * \sqrt{2012} = \sqrt{2012}$	1p
b)	$x * y = xy - x\sqrt{2012} - y\sqrt{2012} = x\left(y - \sqrt{2012}\right) - \sqrt{2012}\left(y - \sqrt{2012}\right) + \sqrt{2012}$ $x * y = \left(x - \sqrt{2012}\right)\left(y - \sqrt{2012}\right) + \sqrt{2012}$	3p 2p
c)	$x * a = a \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2012}\right)\left(a - \sqrt{2012}\right) + \sqrt{2012} = a$ $\left(x - \sqrt{2012}\right)\left(a - \sqrt{2012}\right) + \sqrt{2012} - a = 0 \Leftrightarrow \left(a - \sqrt{2012}\right)\left(x - \sqrt{2012} - 1\right) = 0$ Cum x este un număr real oarecare $\Rightarrow a = \sqrt{2012}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	f continuă în $x_0 = 1 \Leftrightarrow l_s(1) = l_d(1) = f(1)$ $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (2x-1) = 1,\ l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\frac{2}{x^2+1}\right) = 1,\ f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$ Deci f este continuă în $x_0 = 1$	1p 3p 1p
b)	$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{4x^2-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-1}$, avem cazul de excepţie $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{(2x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1}$ Deci, limita este egală cu $\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Calculăm $f'(x)$, $f'(x) = \left(\frac{2}{x^2+1}\right)' = \frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f'(2) = -\frac{8}{25}$ Ecuaţia este $y - \frac{2}{5} = -\frac{8}{25}(x-2)$ $8x + 25y - 26 = 0$	1p 2p 2p
2. a)	$f_1(x) = -3x^2 + 4x + 2012$ $F(x) = \int f_1(x)\,dx = \int \left(-3x^2 + 4x + 2012\right)dx = -3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 2012x + C$ $F(x) = -x^3 + x^2 + 2012x + C$	1p 3p 1p

b)	$f_2(x)=8x+2012$ Aria este egală cu $A=\int_0^1 f_2(x)dx$ $A=\int_0^1(8x+2012)dx=8\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1+2012x\Big\|_0^1=4-0+2012-0$ $A=2016$	1p 1p 2p 1p
c)	$\int_1^{e^2}\frac{f_2(x)-2012}{x}\cdot\ln xdx=\int_1^{e^2}\frac{8x+2012-2012}{x}\cdot\ln xdx=\int_1^{e^2}\frac{8x}{x}\cdot\ln xdx=8\int_1^{e^2}\ln xdx$ Integrala obţinută se rezolvă prin părţi $8\int_1^{e^2}\ln xdx=8\int_1^{e^2}(x)'\ln xdx=8\left(x\ln x\Big\|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x(\ln x)'dx\right)$ $8\left(e^2\ln e^2-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)=8\left(2e^2-x\Big\|_1^{e^2}\right)=8\left(2e^2-e^2+1\right)=8\left(e^2+1\right)$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Prof . Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1$ $N=0\in\mathbb{N}$	2p 2p 1p
2.	$\Delta=m^2-12$ $\Delta\geq0\Leftrightarrow m^2-12\geq0\Leftrightarrow$ $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3},\infty\right)$	1p 2p 2p

3.	$2\cdot 9^x = 3^{x+1} + 5\cdot 3^x - 6$ $3^x = t \Rightarrow 2t^2 = 3t + 5t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ $t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ $t_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$	2p 1p 1p 1p
4.	Nr. cazuri posibile =12 $C_{11}^0 = C_{11}^{11} = 1$ $C_{11}^k \vdots 11 (\forall) k \in \{1, 2, ..., 10\}$ Nr. cazuri favorabile =10 $P = \frac{5}{6}$	1p 1p 1p 1p 1p
5.	$AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{20}, BC = 5$ ΔABC dreptunghic în A (R.T.P) M centrul cercului circumscris $\Rightarrow M$ mijlocul lui (BC) $\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	2p 1p 1p 1p
6.	$m = 0 \Rightarrow \vec{u}$ şi $\vec{v}$ necoliniari $m \neq 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 1}{m} = 2$ $\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = 5$ $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$.	1p 2p 2p
b)	$A^2 = 4A - 5I_2$ se verifică prin calcul direct $A^{n+1} = 4A^n - 5A^{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se demonstrează prin inducţie matematică	2p 3p
c)	Presupunem că $(\exists) m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = I_2 \Rightarrow \det A^m = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\det A)^m = 1 \Leftrightarrow 5^m = 1$ fals	2p 3p
2. a)	$f = g\cdot h + r$ $h = X^4 - X^3 + X$ $r = -X^3 + 1$	1p 2p 2p
b)	Relaţiile lui Viette $\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -1 \\ p = x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ $x_1^2 + x_2^2 = s^2 - 2p = -1$	1p 1p

	x_1 şi x_2 rădăcinile lui $g \Rightarrow \begin{cases} x_1^2+x_1+1=0/\cdot x_1 \\ x_2^2+x_2+1=0/\cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3=-x_1^2-x_1 \\ x_2^3=-x_2^2-x_2 \end{cases}$ $\Rightarrow x_1^3+x_2^3=1+1=2$	2p 1p
c)	$f\left(x_1^2\right)+f\left(x_2^2\right)=\left(x_1^{16}+x_1^8+1\right)+\left(x_2^{16}+x_2^8+1\right)=$ $=\left(x_1+x_2\right)+\left(x_1^2+x_2^2\right)+2=$ $=-1-1+2=0\in\mathbb{N}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}$	2p 3p
b)	$f^2(x)=-2f'(x)\cdot\sqrt{3+x}\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}$ $\frac{1}{f(x)}=\sqrt{3+x}+2\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}\Rightarrow$ relaţia adevărată $f'(x)=-\frac{f^2(x)}{2\sqrt{3+x}}<0\ (\forall)x\in(-3,1)\cup(1,\infty),\ f_s(1)=f_d(1)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe D	1p 1p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei la grafic într-un punct $f(-2)=\frac{1}{3},\ f'(-2)=-\frac{f^2(-2)}{2}=-\frac{1}{18}$ $\Rightarrow y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+18y-4=0$	1p 2p 1p 1p
2. a)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ (1) $F'(x)=\left(e^{\cos x}+\sin x-x+1\right)'==-\sin x\cdot e^{\cos x}+\cos x-1=f(x)\ (\forall)x\in\mathbb{R}\quad (2)$ (1)şi $(2)\Rightarrow F$ primitivă pentru f	1p 2p 2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=\left(e^{\cos x}+\sin x-x\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=2-e-\frac{\pi}{2}$	2p 1p 2p

c)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-\cos x+1}{(\sin^2 x-1)e^{\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx =$	2p
	$=\frac{1}{\cos x}\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} =$	2p
	$=\sqrt{2}-1$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 11

Prof . Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$N=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2012}-1}{-\frac{1}{3}-1}:\frac{3^{2012}-1}{3^{2012}}=$	3p
	$=\frac{2}{3}$	2p
2.	a şi b sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-12=0$	3p
	$\Rightarrow$ numerele sunt -3 şi 4	2p
3.	$2\log_2 x-1\le 3$	1p
	$\Leftrightarrow \log_2 x\le 2$	1p
	$\Leftrightarrow x\le 4$	2p
	$\Rightarrow x\in\{1,2,3,4\}$	1p
4.	$x-\frac{20}{100}x=\frac{4}{5}x$	1p
	$\frac{110}{100}\cdot\frac{4}{5}x=1760$	2p
	$x=2000$	2p
5.	M mijlocul lui (AB) $\Rightarrow$ M(1,2)	1p
		1p

	$m_{AB}=\frac{1}{2}$ d mediatoarea $\Rightarrow m_d=-2$ $d:2x+y-4=0$	1p 2p
6.	$\sin 0^0=0, \sin 90^0=1$ $\sin^2 15^0+\sin^2 75^0=\sin^2 15^0+\cos^2 15^0=1$ $\sin^2 30^0+\sin^2 60^0=1$ $\sin^2 45^0=\frac{1}{2}$ $S=\frac{7}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=4+m^2-m^2+2m-2m-m^2$ $=4-m^2$	3p 2p
b)	(S)sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$ $4-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$	2p 3p
c)	$m=0\Rightarrow \det A=4$ $d_x=4, d_y=4, d_z=-4\Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y,z)\in\{(1,1,-1)\}$	1p 3p 1p
2. a)	$f_{a,b} \vdots (X-1) \Leftrightarrow f_{a,b}(1)=0$ $f_{a,b}(1)=2a^2-2ab+b^2+2a+1=(a-b)^2+(a-1)^2$ $(a-b)^2+(a-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)^2=0\\(a-1)^2=0\end{cases}$ $\Rightarrow a=b=1$	1p 2p 2p 1p
b)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f_{1,1}=2X^3-2X^2+X-1\Rightarrow$ $\begin{cases}s_1=x_1+x_2+x_3=1;\ s_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{1}{2};\ s_3=x_1x_2x_3=\frac{1}{2}\end{cases}$ $S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=s_1^2-2s_2=0$ $\begin{cases}2x_1^3-2x_1^2+x_1-1=0\\2x_2^3-2x_2^2+x_2-1=0\\2x_3^3-2x_3^2+x_3-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1^3=2x_1^2-x_1+1\\2x_2^3=2x_2^2-x_2+1\\2x_3^3=2x_3^2-x_3+1\end{cases}$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\frac{1}{2}(2S_2-s_1+3)=1$	1p 1p 1p 1p 1p

c)	$2\cdot 8^x-2^{2x+1}+2^x-1=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{3x}-2\cdot 2^{2x}+2^x-1=0$ Notăm $2^x=t \Rightarrow 2t^3-2t^2+t-1=0$ $\Rightarrow (t-1)(2t^2+1)=0 \Rightarrow t=1$ $2^x=1 \Rightarrow x=0$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(x\sqrt{3}-2\right)^3$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left[-2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$	1p 2p 2p
b)	Fie m_1 şi m_2 pantele celor două tangente $m_1=f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1$ $m_2=f'\left(\sqrt{3}\right)=1$ $m_1\cdot m_2=-1 \Rightarrow$ cele două tangente sunt perpendiculare	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left[\left(1+\left(f'(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f'(x)-1}}\right]^{\frac{f'(x)-1}{x-\sqrt{3}}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^3-1}{x-\sqrt{3}}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-3\right)\left[\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)\right]}{x-\sqrt{3}}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)}=e^{3\sqrt{3}}$	2p 2p 1p
2. a)	$\int_{-1}^{1}(x+2)f_1(x)dx=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=$ $=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$ $=-2$	1p 2p 2p
b)	$I_1=\int_{-1}^{1}\dfrac{x-1}{x+2}dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\dfrac{3}{x+2}\right)dx=$ $=x\Big\vert_{-1}^{1}-3\ln\lvert x+2\rvert\Big\vert_{-1}^{1}=2-3\ln 3$	3p 2p

c)	$\Leftrightarrow I_{n+1}+3I_n=\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)^{n+1}+3(x-1)^n}{x+2}dx=$ $=\int_{-1}^{1}(x-1)^n dx=\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\Big\|_{-1}^{1}=$ $=\frac{(-2)^{n+2}}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 12

Prof . Badea Daniela

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r=3$ $a_1=-15$ $S_n=0\Leftrightarrow n=11$	1p 1p 3p
2.	$x\neq 1$ $\frac{x^2-x-6}{x-1}\leq 0$ $x\in(-\infty,-2]\cup(1,3]$ $A=\{2,3\}$	1p 1p 2p 1p

3.	$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\frac{13}{9}$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot t+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}=\frac{13}{9}$	1p
	$\Leftrightarrow 6t^2-13t+6=0\Rightarrow t_1=\frac{3}{2},t_2=\frac{2}{3}$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=-1$	1p
	$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{2}{3}\Rightarrow x=1$	1p
4.	$A_5^3-A_4^2=$ $=60-12=48$	3p 2p
5.	$B'\left(\frac{5}{2},1\right),O(0,0)$ mijloacele laturilor	2p
	ecuaţia dreptei determinate de două puncte	1p
	OB': $2x-5y=0$	2p
6.	p=9	1p
	S=$\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}=6\sqrt{6}$	2p
	$r=\frac{S}{p}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}a^2 & a & -1\\ b^2 & b & -1\\ c^2 & c & -1\end{vmatrix}=$	2p
	$=(b-a)(c-b)(c-a)$	3p
b)	$d_x=(b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)$ $d_y=-(b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ac)$ $d_z=-abc(b-a)(c-b)(c-a)$ $\Rightarrow x=a+b+c,y=-(ab+bc+ac),z=-abc$	3p 2p

c)	Fie t_1,t_2,t_3 rădăcinile ecuaţiei date Fie $\Rightarrow \begin{cases} t_1+t_2+t_3=x=a+b+c \\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=-y=ab+bc+ac \\ t_1t_2t_3=-z=abc \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=a \\ t_2=b \\ t_3=c \end{cases}$	1p 2p 2p
2. a)	Suma coficienţilor polinomului f este egală cu $f(1)$ $f(1)=7^{2012}+14 \Leftrightarrow$ $f(1)=7(7^{2011}+2)\vdots 7$	2p 1p 2p
b)	$g=(x+2)(x+3)$ $f=(x+2)(x+3)\cdot q+r,$ $\text{grad}r<2\Rightarrow r=ax+b$ $\left.\begin{array}{l} f(-2)=1^{2012}-8+10=3 \\ f(-2)=-2a+b \end{array}\right\}\Rightarrow -2a+b=3;$ $\left.\begin{array}{l} f(-3)=(-1)^{2012}-12+10=-1 \\ f(-3)=-3a+b \end{array}\right\}\Rightarrow -3a+b=-1$ $\begin{cases} -2a+b=3 \\ -3a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow r=4x+11$	1p 1p 2p 1p
c)	$g(x)=(x+2)(x+3)\Rightarrow \frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3},(\forall)x\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\Rightarrow S=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+....+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}=\frac{1007}{2016}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=2\cdot e^{2x}+2x=2(e^{2x}+x)$ $f'(x)>0(\forall)x\in[0,1]$ $\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$	2p 2p 1p
b)	$f(0)=-1<0,\ f(1)=e^2-1>0$ f continuă pe $[0,1]$ $\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină în $(0,1)$ (1) f strict crescătoare pe $[0,1]$ (2) $(1),(2)\Rightarrow f$ are o singură rădăcină în $(0,1)$	1p 1p 1p 1p 1p

c)	$f''(x)=2\left(2e^{2x}+1\right)$, $f'''(x)=2^3e^{2x}\Rightarrow P_3(A)\quad (\mathrm{I})$ $P_k(A)\Rightarrow P_{k+1}(A)$ $f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(2^ke^{2x}\right)'=2^{k+1}e^{2x}\ (A)\quad (\mathrm{II})$ Din (I) şi $(\mathrm{II})\Rightarrow P_n\ (A)(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 3$	2p 2p 1p
2. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{1}{3}}{x^3}==$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-1}{3x^3}=\dfrac{1}{3}$	3p 2p
b)	$\int\dfrac{x}{(x+1)^2}dx=\int\dfrac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=$ $\int\dfrac{1}{(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}dx=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+C$ Fie $H(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+c,$ $H(0)=-1\Leftrightarrow 1+c=-1\Leftrightarrow c=-2$ $\Rightarrow H(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}-2$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$V=\int_0^1\pi f^2(x)dx=$ $=\pi\dfrac{(x+1)^5}{5}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{31\pi}{5}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 13

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 2x-1\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3\le 2x-1\le 3$ $-1\le x\le 2$ dar $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow A=\{-1,0,1,2\}$ $\Rightarrow \text{card}A=4$	2p 1p 1p 1p
2.	$A(0,3)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=3\Leftrightarrow b=3$ $-\dfrac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=-2$ $\Rightarrow f(x)=x^2-2x+3$	2p 2p 1p
3.	$\text{CE}: x^2-2x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ $x^2-2x-3=0$ $x_1=-1,\ x_2=3\overset{\text{CE}}{\Rightarrow} S=\{-1,3\}$	1p 2p 2p
4.	$C_{10}^3=$ $=120$	3p 2p
5.	$x_1x_2+y_1y_2=0\Rightarrow$ $m^2-2m+1=0$ $m=1$	2p 2p 1p
6.	$\cos(180^0-x)=-\cos x$ $\cos 90^0=0$ $S=0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=2I_2$ $A^{2012}=2^{1006}\cdot I_2$;	3p 2p
b)	$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$; $XA=AX$ $\Rightarrow\begin{cases} t=x \\ y=2z\end{cases}$ finalizare	1p 3p 1p
c)	$A^{2k}=2^kI_2,(\forall)k\in\mathbb{N}^*$ $A^{2k+1}=2^kA,(\forall)k\in\mathbb{N}$ $A+A^3+A^5+....+A^{2011}=A+2A+2^2A+...+2^{1005}A=$ $=(1+2+2^2+...+2^{1005})A=(2^{1006}-1)A$ $A^2+A^4+A^6+....+A^{2012}=(2+2^2+...+2^{1006})I_2=2(2^{1006}-1)I_2.$	1p 1p 2p 1p
2.	Definiţia elementului neutru	2p

a)	$e=5\in\mathbb{Z}$	3p
b)	Definiţia elementului simetrizabil $3'=3\in\mathbb{Z}$	2p 3p
c)	$x*y=(x-4)(y-4)+4$ $S=(a*4)*b=4*b=4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2},\ f(1)'=\dfrac{e}{4}$ $t: y-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{4}(x-1)\Leftrightarrow ex-4y+e=0$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\infty$	3p 2p
c)	concluzia $\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & -1 & & \frac{1}{2} & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & - & - & - & + & +0 & - & - & + & + \\ \hline f(x) & \infty & \searrow & 0 & \nearrow & \frac{9}{4} & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	4p 1p
2. a)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivă pentru $f\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=f(x)$ $F'(x)=3x^2+1>0\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$\int f(x)dx=x^3+x+C$ Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^3+x+c$ $A(1,3)\in G_F\Leftrightarrow F(1)=3\Leftrightarrow 2+c=3\Leftrightarrow c=1$ $F(x)=x^3+x+1$	2p 1p 1p 1p
c)	$g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=(x+1)e^x$ $\int_0^1 g(x)dx=(x+1)e^x\Big\|_0^1-e^x\Big\|_0^1=$ $=2e-1-e+1=e$	1p 3p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 14

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ progresie aritmetică, $a_1 = 2, r = 3$	1p
	$S_n = 155 \Leftrightarrow 3n^2 + n - 310 = 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 10$	3p
	$x = a_{10} = 29.$	1p
2.	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m \\ \lvert x_1 - x_2 \rvert = 1 \end{cases} \Rightarrow$	2p
	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2m \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$	2p
	$1 - 2m - 2m = 1 \Leftrightarrow m = 0$	1p
3.	$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	Prin ridicare la pătrat se obţine $4x^2 - 21x + 26 = 0$	1p
	$x_1 = 2 \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	$x_2 = \frac{13}{4} \notin \left[1, \frac{5}{2}\right]$	1p
	$\Rightarrow S = \{2\}$	1p
4.	$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$	1p
	$C_{10}^2 = 5 \cdot 9 = 45$	1p
	$3P_3 = 3 \cdot 6 = 18$	1p
	$\mathrm{N} = 9 \cdot 17 \vdots 17$	2p
5.	$\Delta \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x$	2p
	$\frac{\lvert\Delta\rvert}{2} = 3 \Rightarrow \lvert x \rvert = 2$	2p
	$x_{1,2} = \pm 2$	1p

6.	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=$ $=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Demonstrarea relaţiei	5p
b)	$A^n(a,b)=A\left(a^n,na^{n-1}b\right),(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ Demonstrarea prin inducţie sau cu metoda binomială	3p 2p
c)	$a^{2012}=1\Rightarrow a=\pm1$ $2012a^{2011}b=2012$ $a=1\Rightarrow b=1\Rightarrow A(1,1)$ $a=-1\Rightarrow b=-1\Rightarrow A(-1,-1)$	2p 1p 1p 1p
2. a)	$\begin{cases}f(1)=0\\f(-1)=-4\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a-b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$	2p 3p
b)	Relaţiile lui Viette $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{s_2}{s_3}=1$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2$ $a^2-2=1\Leftrightarrow a_{1,2}=\pm\sqrt{3}$	2p 1p 1p 1p
c)	$\Delta=s_1\left[s_2-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]=$ $=1(1+1)=2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases}x^2-x-2;\ x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)\\-x^2+x+2;\ x\in(-1,2)\end{cases}$ f derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ (funcţii elementare) şi	1p 1p

	$f^{'}(x)=\begin{cases}2x-1;\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)\\ -2x+1;\ x\in(-1,2)\end{cases}$ $f_s^{'}(-1)=-3,\ f_d^{'}(-1)=3,\Rightarrow f$ nu e derivabilă în -1 analog f nu e derivabilă în 2 $\Rightarrow \mathrm{D}^{'}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$	1p 1p 1p
b)	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & -1 & & \frac{1}{2} & & 2 & & +\infty \\ \hline f(x)^{'} & + & + + + + + + & \| & + + + + & +0 & - - - - & \| & + + + + + + & + \\ \hline f(x) & \infty & \searrow & 0 & \nearrow & \frac{9}{4} & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$ Concluzia conform tabelului	3p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty\Rightarrow h$ nu are asimptotă orizontală $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}(h(x)-x)=-\dfrac{1}{2}$ $d: y=x-\dfrac{1}{2}$ asimptotă oblică spre ∞	1p 1p 2p 1p
2. a)	f continuă pe $(0,\mathrm{e})\cup(e,\infty)$ - funcţii elementare $f_s(e)=f(e)=f_d(e)=1\Rightarrow f$ continuă în e $\Rightarrow f$ continuă pe $(0,\infty)\Rightarrow f$ admite primitive pe $(0,\infty)$	2p 1p 2p
b)	$h(x)\le 0\,(\forall)x\in\left[e^{-1},1\right]$ $A=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\ln x\,dx$ Integrând prin părţi $\Rightarrow A=\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}\ln x\right)\Big\|_{\frac{1}{e}}^{1}=$ $=\dfrac{e^2-3}{4e^2}$	1p 1p 2p 1p
c)	$\ln x\le x-1\ (\forall)x\in[1,2]$ şi $\ln x>0,\ x-1>0\ (\forall)x\in[1,2]$ $\Rightarrow \ln^{2012}x\le(x-1)^{2012}\ (\forall)x\in[1,2]$ prin integrare pe $[1,2]\Rightarrow$ $\Rightarrow\int_1^2 f^{2012}(x)dx\le\dfrac{1}{2013}$	1p 1p 1p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 15

Prof: Badea Ion

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\left(5-\sqrt{3}\right)+\log_2\left(5+\sqrt{3}\right)-\log_2 11=\log_2 22-\log_2 11=$ $=\log_2 2=1$	3p 2p
2.	$S=2\left(1+2+3+...+2012\right)-2012=$ $=2\cdot\frac{2012\cdot 2013}{2}-2012=$ $=2012^2$	2p 2p 1p
3.	$2^{x^2+x+0,5}=2^{\frac{5}{2}}\Leftrightarrow$ $x^2+x-2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\{-2,1\}$	1p 2p 2p
4.	$x\in\mathbb{N}, 2\le x\le 10$ Formula de calcul a combinărilor $x\ge 6$ $\Rightarrow x\in\{6,7,8,9,10\}$	1p 1p 2p 1p
5.	Formula pentru coordonatele mijlocului unui segment $\mathrm{A}(2,2),\mathrm{B}(-2,-2)$ şi $\mathrm{C}(4,0)$	2p 3p
6.	$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=$ $=\left(\frac{5}{13}\right)^2$ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos\alpha<0$ $\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(x)=x\left(x^2+3\right)$ $A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$	3p 2p

b)	$\det A(1) = 4 \Rightarrow A(1)$ inversabilă	1p
	$A^*(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}(1) = \frac{1}{\mathrm{d}} A^*(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2p
c)	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}(1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2p
2. a)	$\mathrm{U}(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$	2p
	$\mathbb{Z}_6 - \mathrm{U}(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$	1p
	$S = \hat{3}$	2p
b)	$\det A = \hat{3}x + \hat{4}$	2p
	$\det A = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{4} = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{3}x = \hat{3} \Leftrightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$	1p
	$\det A = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{4} = \hat{5} \Leftrightarrow \hat{3}x = \hat{1} \Leftrightarrow x \in \Phi$	1p
	$\Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$	1p
c)	$(x, y) \in \{(\hat{1}, \hat{2})\}$	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 7}{e^x}$	1p
	Se aplică regula lui l'Hospital de două ori şi se obţine	2p
	$l = 0 \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow d : y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	1p
b)	F derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 2)$	1p
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}$, $f(1) = 3e$, $f(2) = e^2$	1p

	$\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & + & + & + & + & 0 & - & 0 & + & + \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 7 & \nearrow & 3e & \searrow & e^2 & \nearrow & +\infty \end{array}$ $\Rightarrow$ 1 – maxim local, 2 – minim local	2p 1p
c)	$f(0)=7,\ f(1)=3e,\ f(2)=e^2$ $7\le e^2$ Conform tabelului de la b) $\Rightarrow 7\le f(x)\le 3e,\ (\forall)x\in[0,2]$	1p 1p 3p
2. a)	f continuă $\int_{-1}^{0}\sin x dx=-1+\cos 1$ $\int_0^1 \frac{x}{x+2}dx = x\Big\|_0^1 - 2\ln(x+2)\Big\|_0^1 =$ $=1-2\ln\frac{3}{2}$ $I=\cos 1-2\ln\frac{3}{2}$	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$I=\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x dx$ $I=\frac{\pi}{2}$ $V=\pi\int_{-\pi}^{0} f^2(x)dx=\pi\int_{-\pi}^{0}\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2}$	2p 1p 2p
c)	$\int_0^x f(t)dt = x-2\ln(x+2)+2\ln 2$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 16

Prof:Bășcău Cornelia

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16, \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}, \log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$ $16-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=16\in\mathbb{N}$	3p 2p
2.	$a, a+2, a+8$ în prog. geom. rezultă $(a+2)^2=a(a+8)$ $a^2+4a+4=a^2+8a, 4a=4$ $a=1$	1p 2p 2p
3.	$(f\circ f)(x)=3(3x-2)-2=9x-8$ $(f\circ f)(x)-f(x)=6x-6$ $6x-6=0, x=1$	2p 2p 1p
4.	C_{10}^2 $\frac{10!}{2!(10-2)!}=45$	2p 3p
5.	$\begin{cases}3x-2y=0\\2x-3y=5\end{cases}$ $A(-2,-3)$	2p 3p
6.	$\cos 60^0=\frac{1}{2}\quad \cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 120^0=-\cos 60^0$ $\cos 60^0+\cos 45^0+\cos 120^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(-1.1)$, $A_2(-2,2)$	:2p 2p

	$A_1A_2:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_{A_1} & y_{A_1} & 1 \\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1 \end{vmatrix}=0$ $A_1A_2: x=-y$	1p
b)	$A_{AA_2A_3}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert, \Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_{A_2} & y_{A_2} & 1 \\ x_{A_3} & y_{A_3} & 1 \end{vmatrix}$ $A_{AA_2A_3}=\frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$A_{2011}(-2011,2011), A_{2012}(-2012,2012)$ $\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_{A_{2011}} & y_{A_{2011}} & 1 \\ x_{A_{2012}} & y_{A_{2012}} & 1 \end{vmatrix}=0$ Deci O, A_{2011},A_{2012} coliniare	1p 2p 2p
2. a)	$2012\circ(-2012)=2012^{2012-2012}=$ $2012^0=1$	5p
b)	$x^2\circ 2x=2012^{x^2+2x}$ $2012^{x^2+2x}=2012^{-1}$ $x^2+2x=-1, x=-1$	3p 2p
c)	$x\circ y\circ z=2012^{2012^{x+y}+z}$ $2012^{2012^{x+y}+z}=2012^{z+2012}$ $x+y=1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\dfrac{(2x-1)}{(x^2-2x+1)}\right)' = \dfrac{(2x-1)'(x^2-2x+1)-(2x-1)(x^2-2x+1)'}{(x^2-2x+1)^2} =$ $\dfrac{2(x-1)^2-2(2x-1)(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x-1)(2x-2-4x+2)}{(x-1)^4} = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$	3p 2p
b)	$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$ $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-2x}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow x=0$ $f'(x)\ge 0, x\in[0,1), f'(x)<0, x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ $x=1\min, f(1)=-1 \Rightarrow f(x)\ge -1$	1p 1p 1p 2p
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\infty, \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty \Rightarrow x=1$ asimptotă verticală spre ∞ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asimptotă orizontală spre $\pm\infty$ Funcţia admite asimptotă verticală, asimptotă orizontală şi nu admite asimptotă oblică.	2p 2p 1p
2. a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1$ $f(x)=-1$ $f cont. \Rightarrow f ad.prim.$	1p 1p 1p 2p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(2x+1)dx + \int_{0}^{1}(3x^2+2x-1)dx =$ $\left(x^2-x\right)\Big\|_{-1}^{0} + \left(x^3+x^2-x\right)\Big\|_{0}^{1} =$ $=-2+1=-1$	2p 2p 1p
c)	$\int_{a}^{2} f(x)dx = \int_{a}^{2}(3x^2+2x-1)dx = \left(x^3+x^2-x\right)\Big\|_{a}^{2} = 9 \Leftrightarrow$ $10-a^3-a^2+a=9 \Leftrightarrow$ $a^3+a^2-a-1=0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)^2=0 \Leftrightarrow$ $a=1; a=-1, a\in\left[\dfrac{1}{3},2\right] \Rightarrow a=1$	2p 1p 1p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 17

Prof:Bășcău Cornelia

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|\frac{2x}{5}-\frac{1}{3}\right\|=\frac{14}{3}$ $\frac{2x}{5}-\frac{1}{3}=\pm\frac{14}{3}$ $x\in\left\{\frac{25}{2},-\frac{65}{6}\right\}$	2p 2p 1p

2.	$(f \circ f)(x) = a(ax-3)-3 = a^2x-3a-3$ $(f \circ f)(-1) = -1 \Leftrightarrow -a^2-3a-3=-1 \Leftrightarrow a^2+3a+2=0 \Leftrightarrow$ $a \in \{-2,-1\}$	2p 2p 1p
3.	$a=-1$ $b=-\frac{1}{2}$ $c=-\frac{1}{3}$ $d=0$ $a<b<c<d$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$P=\frac{\text{nr.caz.fav.}}{\text{nr.caz.posibile}}$ $\text{nr.caz.posibile}=90$ $\text{nr.caz.fav}=6$ $P=\frac{1}{15}$	1p 1p 2p 1p
5.	$\frac{MN}{\sin P}=\frac{NP}{\sin M}=2R$ $\frac{3}{1/2}=\frac{NP}{\sqrt{2}/2}=2R$ $NP=3\sqrt{2}, R=3$	2p 2p 1p
6.	$MN^2=40$ $NP^2=40$ $MN=NP \Rightarrow \Delta MNPis$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix}$ $\det A=-a^2-a+7$	2p 3p
b)	$\det A=5\neq 0$ $d_x=5, d_y=5, d_z=5$ $S=\{1,1,1\}$	1p 3p 1p

c)	$\det A = -a^2 - a + 7$ $a^2 + a - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 29 \neq p.p.$ $a_{1,2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \det A \neq 0, \forall a \in \mathbb{Q}$	1p 2p 2p
2. a)	$x \circ y = x(y - 2012) - 2012(y - 2012) + 2012 =$ $(x - 2012)(y - 2012) + 2012$	3p 2p
b)	$\exists e \in \mathbb{R} a.i. x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $x \circ e = x \Rightarrow (x - 2012)(e - 2012) + 2012 = x \Rightarrow$ $e = 2013 \in \mathbb{R}$	1p 2p 2p
c)	$x \circ 2012 = 2012 \circ x = 2012, \forall x \in \mathbb{R}$ $1 \circ 2 \circ ... \circ 2012 \circ 2013 = x \circ 2012 \circ 2013 = 2012$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$(x^{2012})' = 2012x^{2011}$ $(2012^x)' = 2012^x \ln 2012$ $f'(x) = 2012x^{2011} + 2012^x \ln 2012$	2p 2p 1p
b)	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $x_0 = 1, y_0 = 1$ $f'(1) = 2012(1 + \ln 2012) = a$ $ax - y - a + 1 = 0$	1p 1p 1p 2p
c)	$f''(x) = 2012 \cdot 2011x^{2010} + 2012^x \ln^2 2012$ $x^{2010} \geq 0, 2012^x > 0$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f conv. pe \mathbb{R}$	2p 1p 2p
2. a)	$\int_2^4 (f(x) - \frac{1}{x})dx = \int_2^4 \frac{1}{x+2} dx =$ $= \ln\|x+2\| \Big\|_2^4 =$ $= \ln 6 - \ln 4 = \ln \frac{3}{2}$	2p 2p 1p

b)	$F prim. f \Rightarrow F'(x)=f(x), \forall x \in [1,\infty)$ $F''(x)=f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}<0$ $F''(x)<0 \Rightarrow F conc. pe [1,\infty)$	2p 2p 1p
c)	$\int_1^2 (\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2})dx =$ $(\ln\|x\|+\ln\|x+2\|)\Big\|_1^2 =$ $\ln\frac{8}{3}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 18

Prof: Băşcău Cornelia

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$[-2.5]=-3$ $\{-2,5\}=0,5$ $\|-2,5\|=2,5$ [-2,5]+{-2,5}+|-2,5|=-3+0,5+2,5=0	1p 1p 1p 2p
2.	$\div a+1, 1-a, 5a-3 \Rightarrow 2(1-a)=(a+1)+(5a-3)$ $8a=4 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$	3p 2p

3.	$s=-\frac{13}{12}, p=-10$ $x, y - sol.ec.: t^2 - st + p = 0$ $t^2 + \frac{13}{12}t - 10 = 0$ $\Delta = \left(\frac{77}{12}\right)^2, t_{1,2} = \frac{-\frac{13}{12} \pm \frac{77}{12}}{2}$ $S = \left\{\left(\frac{8}{3}, -\frac{15}{4}\right), \left(-\frac{15}{4}, \frac{8}{3}\right)\right\}$	1p 1p 1p 1p 1p
4.	$cond.: x > 0, x-1 > 0 \Rightarrow x \in (1, \infty)$ $\log_2 x(x-1) = 1$ $x(x-1) = 2$ $x \in \{-1, 2\}$ $S = \{2\}$	1p 1p 1p 1p 1p
5.	$A(2,0), B(4,2), C(6,-4)$ $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ $G(4, -\frac{2}{3})$	2p 2p 1p
6.	$AB = \sqrt{(-2-a)^2 + (1-a-4)^2}$ $2a^2 + 10a + 13 = 13$ $a = 0, a = -5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F(-1) + f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	2p 3p
b)	$f(2x) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p

c)	$f(x)\cdot f(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$ $\left(f(x)\right)^n=\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & x^n \end{pmatrix}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ $f(2)+...+\left(f(2)\right)^{2012}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix} 2^{2012} & 0 \\ 0 & 2^{2012} \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 2+..+2^{2012} & 0 \\ 0 & 2+..+2^{2012} \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 2^{2013}-2 & 0 \\ 0 & 2^{2013}-2 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$g=0\Rightarrow x^2+\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$ $x=\hat{3}$ $x=\hat{4}$	1p 2p 2p
b)	$g\,\vert\, f\Rightarrow f=g\cdot c\Rightarrow f(\hat{3})=\hat{0}, f(\hat{4})=\hat{0}$ $\hat{3}^4=\hat{1}, \hat{4}^4=1$ $\hat{1}+a=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{4}$	2p 2p 1p
c)	$f=x^4+\hat{1}$ $\hat{a}^4\in\left\{\hat{0},\hat{1}\right\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5$ $f(\hat{a})\in\left\{\hat{1},\hat{2}\right\}, \forall a\in\mathbb{Z}_5$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ $f'(x)=\ln 2012(2012^x+2012^{-x})$ $f'(0)=2\ln 2012$	2p 2p 1p
b)	$2012^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\ln 2012(2012^x+2012^{-x})>0, \forall x\in\mathbb{R}$	2p 3p
c)	$D=\mathbb{R}\Rightarrow f$ nu admite as.vericale	1p

	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ deci fcț.nu admite asimptote orizontale $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ deci fcț.nu admite as.oblice	2p 2p
2. a)	$\int_e^{e+1}\frac{1}{x^2-1}dx=$ $=\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|\Big\|_e^{e+1}=$ $\frac{1}{2}\ln\frac{e(e+1)}{(e+2)(e-1)}$	2p 2p 1p
b)	$g(x)=(x-1)^2$ $\int g(x)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C$	2p 3p
c)	$\int_2^3 2x\cdot\frac{1}{\left(x^2-1\right)^n}dx=$ $\int_2^3\frac{1}{\left(x^2-1\right)^n}\cdot\left(x^2-1\right)'dx=$ $=\frac{1}{(-n+1)\left(x^2-1\right)^{n-1}}\Big\|_2^3=-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{8^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}\right),(\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 2$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 19

Prof: Brabeceanu Silvia

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\lvert \frac{x+3}{2} \right\rvert \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{x+3}{2} \le 1$ $\left.\begin{matrix} -5 \le x \le -1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \{-5,-4,-3,-2,-1\}$	3p 2p
2.	$A \in G_f \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow c=0$ $V \in G_f \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a}=2 \\ \frac{-\Delta}{4a}=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$ Finalizare $f(x)=x^2-4x$	1p 3p 1p
3.	Condiţii $\begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{-5}{2},+\infty\right)$ $2x+5=(x+3)^2 \Rightarrow x^2+4x+4=0$ $x=-2 \in \left[\frac{-5}{2},+\infty\right)$	1p 2p 2p
4.	$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$ $A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=20$ Finalizare $3 \cdot 6+5 \cdot 20=118$	2p 2p 1p
5.	$\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{3}{a-1}=\frac{a}{2}$ $a^2-a-6=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=3 \\ a_2=-2 \end{cases}$; $a>0 \Rightarrow a=3$	2p 3p
6.	$\cos B=\frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2 \cdot BC \cdot BA}$ $\cos B=\frac{9}{16}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A-2I_3=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -4\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$	2p
	$\det(A-2I_3)=-12$	3p
b)	$\det(A)=-2$	3p
	$\det(A)=-2\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3$	2p
c)	Din b). $\det(A)=-2\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ inversa matricei A	2p
	$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot I_3 \Rightarrow X=A^{-1}$,	1p
	$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}13 & 7 & -11\\ -9 & -5 & 7\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$	1p
	Soluţia ecuaţiei este inversa matricei A	1p
2. a)	$e=6$ elementul neutru al legii de compoziţie dacă $x*6=6*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$	3p
	$x*6=x+6-6=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$	1p
	$6*x=6+x-6=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$	1p
b)	$(x^2+3x-1)*(2x^2-x+6)\geq 0 \Rightarrow 3x^2+2x-1\geq 0$	2p
	$3x^2+2x-1=0\Rightarrow \Delta=16\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}\\ x_2=-1\end{cases}$	2p
	Folosind semnul funcţiei de gradul doi, soluţia inecuaţiei este $x\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$	1p
c)	$\frac{1}{2}*\frac{1}{2^2}*\cdots\cdots*\frac{1}{2^7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^7}-6\cdot 6$	2p
		1p

	Formula $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, q \neq 1$ a progresiei geometrice de raţie $q = \frac{1}{2}$	2p
	Calcule care vor conduce la $\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right]}{-\frac{1}{2}} - 36 = -\frac{1}{2^7} - 35 = -\left(\frac{1}{2^7} + 35\right) < 0$	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Condiţia ca o funcţie să fie continuă într-un punct x_0	2p
	$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$; $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$	2p
	$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 0$	1p
b)	$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-3)^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{(x+3)^2}, & x > 0 \end{cases}$	3p
	f descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$	2p
c)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $f(0) = \frac{2}{3}$	2p
	Din tabelul de variaţie al funcţiei: $f(x) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$	3p
2. a)	$n = 1 \Rightarrow f_1(x) = 4x^2 + 8x + 16$	1p
	$\int f_1(x)dx = \int (4x^2 + 8x + 16)dx = 4\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x + c$	4p
b)	$A = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (4x^2 + 8x + 16)dx$	2p
		3p

	$A=\left(\frac{4x^3}{3}+4x^2+16x\right)\Big\|_0^1=\frac{64}{3}$	
c)	$\int_1^2 \frac{f_2(x)-16}{x}\cdot e^x dx=\int_1^2 \frac{16x^2+16x}{x}\cdot e^x dx$ $16\int_1^2 (x+1)e^x dx=16\left[(x+1)e^x\Big\|_1^2-\int_1^2 e^x dx\right]=16e(2e-1)$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 20

Prof: Brabeceanu Silvia

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4=54$, $q=3$ şi $a_1=2$ $S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=728$	3p 2p
2.	Ecuaţia $mx^2-(m+1)x+m=0$ are soluţii reale egale $\Leftrightarrow \Delta=0$. $b^2-4ac=0 \Rightarrow (m+1)^2-4\cdot m\cdot m=0$	1p 1p 3p

	$-3m^2+2m+1=0\Rightarrow\begin{cases}m_1=1\\ m_2=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$	
3.	Condiţii $\begin{cases}x+3>0, x\in(-3,+\infty)\\ 2x-1>0, x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ $\log_2(x+3)+\log_2(2x-1)=2\Rightarrow(x+3)(2x-1)=4$ $2x^2+5x-7=0\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x_1=\dfrac{-7}{2}}\\ x_2=1\end{cases}$	2p 1p 2p
4.	Numerele naturale $\overline{abc}$ scrise cu cifrele 1 şi 2, corespund funcţiilor $f:\{a,b,c\}\to\{1,2\}$ care sunt în total $2^3=8$, deci sunt 8 numere: $111,\ 112,\ 121,\ 122,\ 211,\ 212,\ 221,\ 222$. Favorabile cerinţei de a fi divizibile cu 4 sunt doar două dintre ele: 112 şi 212. Probabilitatea cerută este $p=\dfrac{2}{8}=0,25$	3p 1p 1p
5.	CM - mediatoarea segmentului $AB\Rightarrow C$ mijlocul segmentului şi $CM\perp AB$. $\left.\begin{array}{l}x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ $CM\perp AB\Rightarrow m_{CM}\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_{CM}=\dfrac{1}{3}$ $CM: y-y_C=m_{CM}(x-x_C)\Rightarrow CM: x-3y+1=0$	1p 1p 1p 2p
6.	Se utilizează formula lui Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului. $p=\dfrac{6+7+11}{2}=12$ $S=\sqrt{12(12-7)(12-11)(12-6)}=6\sqrt{10}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -12 & 12\end{pmatrix}$ şi $2A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -6 & 6\end{pmatrix}$	2p
	$A^2-2A=2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$	2p
	$2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=2A$	1p
b)	Din a). $\Rightarrow A^2=4A$	1p
	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2$	2p
	$X(a)\cdot X(b)=I_2+aA+bA+ab(4A)=I_2+(a+b+4ab)A=X(a+b+4ab)$	2p
c)	$X(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(X(a))\neq 0$	2p
	$X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ -3a & 1+3a\end{pmatrix}$	1p
	$\det(X(a))=\begin{vmatrix}1+a & -a\\ -3a & 1+3a\end{vmatrix}=1+4a$	1p
	$\forall a\in\mathbb{Z},\ 1+4a\neq 0\Rightarrow X(a)$ inversabilă	1p
2. a)	$m=3\Rightarrow f=X^3+X^2-15X+4$	1p
	Împărţirea obişnuită sau schema lui Horner	3p
	$q=X^2+3X-9,\ r=-14$	1p
b)	Efectuarea împărţirii	2p
	f divizibil cu $X+4\Leftrightarrow r=0$	1p
	$r=0\Rightarrow 17m-35=0\Rightarrow m=\dfrac{35}{17}$	2p
c)	Relaţiile lui Viete $\begin{cases}S_1=1\\ S_2=-15\\ S_3=-2\end{cases}$	1p

	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=S_1^2-2S_2=31$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-15\left(x_1+x_2+x_3\right)+6=0,$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+15\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)-6=40$	2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\left(2^x-x\ln 2\right)'$ $f'(x)=\left(2^x-1\right)\ln 2$	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\ln 2$	2p 3p
c)	$f'(x)=0\Rightarrow\left(2^x-1\right)\ln 2=0$ $\ln 2>0$ $2^x-1=0\Rightarrow x=0$	1p 2p 2p
2. a)	$I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}dx$. Subst. $\sqrt{1-x}=t\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$; $dx=-2\sqrt{1-x}dt\Rightarrow\ I_0=2\int_0^1 t^2dt=\dfrac{2}{3}$ $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=2\int_0^1\left(t^2-t^4\right)dt=\dfrac{4}{15}$	3p 2p
b)	Se aplică metoda integrării prin părţi $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx=\dfrac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx-\dfrac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$ $I_n=\dfrac{2n}{3}I_{n-1}-\dfrac{2n}{3}I_n$ $I_n\left(1+\dfrac{2n}{3}\right)=\dfrac{2n}{3}I_{n-1}\Rightarrow I_n=\dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$	1p 2p 1p 1p

c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}dx$ $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^{n+1}\le x^n$ şi cum $0\le 1-x\le 1\Rightarrow x^{n+1}\sqrt{1-x}\le x^n\sqrt{1-x}$ Deci $\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}dx\le\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\Rightarrow I_{n+1}\le I_n\Rightarrow (I_n)_{n\ge0}$ descrescător	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 21

Prof: Brabeceanu Silvia

- ♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Raţionalizarea fiecărei fracţii sau aducerea la acelaşi numitor $\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{4-3}=14$ Finalizare $14\in\mathbb{N}$	1p 3p 1p
2.	Pentru ca să existe intervalul I se pune condiţia: $\frac{x^2+1}{2}\le\frac{3x+4}{4}$	1p 3p

	$2x^2-3x-2\le 0$ Finalizare $x\in\left[\frac{-1}{2},2\right]$	1p
3.	$A(-1,1)\in G_f \Rightarrow f(-1)=1$ şi $B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\in G_f \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ Rezolvarea sistemului $\begin{cases}-3a+2b=1\\ 2a+4b=3\end{cases} \Rightarrow S=\left\{\left(\frac{1}{8},\frac{11}{16}\right)\right\}$	2p 3p
4.	Fie x - preţul iniţial. $x-18\%$ din $x=820$. $x-\frac{18}{100}x=820 \Rightarrow \frac{41}{50}x=820$ $x=1000$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}+2\vec{u}-3\vec{v}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+2\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$	2p 3p
6.	$m\left(\hat{C}\right)=30^0 \Rightarrow BC=2\cdot AB=40\sqrt{3}$ Din teorema catetei $AB^2=BC\cdot BD \Rightarrow BD=10\sqrt{3}$ $CD=BC-BD=30\sqrt{3}$ Se aplică teorema înălţimii $AD^2=BD\cdot DC=30$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(1,2)$ şi $A_2(2,5)$ Ecuaţia dreptei $A_1A_2:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ $A_1A_2:3x-y-1=0$	1p 2p 2p

<table>
<tr><td>b)</td><td>Punctele A_1, A_2, A_n sunt coliniare dacă determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ n & n^2+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 1 \\ n_2 = 2 \end{cases}$</td><td>2p

3p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$A_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\Delta\right|$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$A_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|2\right| = 1$</td><td>2p

2p

1p</td></tr>
<tr><td>2.
a)</td><td>$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \perp y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 1 + 2) = \frac{1}{2}(xy - x - y + 1) + 1$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}(xy - x - y + 1) + 1 = \frac{1}{2}\left[x(y-1) - (y-1)\right] + 1 = \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + 1$</td><td>2p

3p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$5^x \perp 3^{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(5^x - 1\right)\left(3^{x-1} - 1\right) + 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(5^x - 1\right)\left(3^{x-1} - 1\right) = 0$

$5^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$3^{x-3} - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$</td><td>3p

1p

1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$x \perp x \perp x \perp x \perp x = (x \perp x) \perp (x \perp x) \perp x = \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1\right] \perp \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1\right] \perp x$

Se aplică în continuare a).

Finalizare $x \perp x \perp x \perp x \perp x = \frac{1}{2^4}(x-1)^5 + 1$</td><td>2p
2p

1p</td></tr>
</table>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Asimptota oblică are ecuaţia $y = mx + n,\ m \neq 0$	1p

	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)=mx\right]=1$ $y=x+1$	2p 1p 1p
b)	$f'(x)=\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4\\x_2=-2\end{cases}$ Din tabloul de variaţie al funcţiei rezultă că x_1,x_2 sunt puncte de extrem	2p 1p 2p
c)	$L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x}\right)^x$ caz exceptat 1^∞ $L=e^l=e^1=e$ $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x}{x^2+3x}=1$	1p 3p 1p
2. a)	$\frac{6}{9+x^2}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow 6x\le 9+x^2$ $0\le 9+x^2-6x\Leftrightarrow 0\le(3-x)^2$ $(3-x)^2\ge 0$ adevărat pentru $\forall x\in(0,+\infty)$	1p 2p 2p
b)	$\int_1^{\sqrt{3}}f(x)dx=6\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{9+x^2}dx=6\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\Big\|_1^{\sqrt{3}}$ $\int_1^{\sqrt{3}}f(x)dx=2\left(\frac{\pi}{6}-arctg\frac{1}{3}\right)$	3p 2p
c)	Integrând relaţia de la punctul a). avem $\int_1^e f(x)dx\le\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_1^e=1$	2p 2p

	Folosind punctul b). avem $2\left(arctge - arctg\frac{1}{3}\right) \le 1$ Finalizare $arctge \le \frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 22

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Termenul general al progresiei aritmetice $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, precizarea valorilor lui a_1, n, r. Calculul lui $a_{11} = 2 + (11-1)\cdot 3$ de unde rezultă $a_{11} = 32$	3p 2p
2.	Formula $log_a\, a = 1$, $0 < a < 1$, $a > 1$ şi $log_3 3 = 1$	1p

	Formulele $m \log_a A = \log_a A^m$, $0 < a < 1, a > 1, A > 0$ $$\log_a A + \log_a B - \log_a C = \log_a \frac{AB}{C},\ 0 < a < 1, a > 1, A, B, C > 0$$	2p
	Calculele $\log_3 3 + 3\log_3 2 - 2\log_3 4 = 1 + \log_3 \frac{2^3}{4^2} = 1 - \log_3 2$	2p
3.	Intersecţia G_f cu Ox înseamnă rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$	1p
	Rezolvarea ecuaţiei $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	2p
	Calculele $\Delta = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ deci $G_f \cap Ox = \{A, B\}$, A(3, 0), B(2, 0).	2p
4.	Formulele $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, $P_n = n!$	2p
	Calculele $C_5^2 = 10$, $A_5^2 = 20$, $P_3 = 6$ şi finalizarea $2C_5^2 - A_5^2 + P_3 = 2 \cdot 10 - 20 + 6 = 6$	3p
5.	Înmulţirea unui vector $\vec{t} = a\vec{i} + b\vec{j}$ cu un scalar s real, $s\vec{t} = sa\vec{i} + sb\vec{j}$	2p
	Calculele $2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) - 3(3\vec{i} - 2\vec{j}) = -5\vec{i} + 12\vec{j}$.	3p
6.	Formula pentru aria triunghiului $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.	2p
	$\sin A = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$.	1p
	Calculul ariei $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 20$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea sistemului este inversabilă dacă $D(a) \neq 0$.	2p
	$D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 1 \\ a^2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ determinant Vandermonde sau se aplică una din regulile uzuale pentru	2p

	calculul lui D(a) D(a) = -2(a - 1)(a - 3). $a \neq 1,\quad a \neq 3$.	1p
b)	$A^t = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, det A^t = det A Din punctul a) D(a) = -2(a - 1)(a - 3) D(2) = -2(2 - 1)(2 - 3) = 2	3p 2p
c)	Din punctul a) D(a) = -2(a - 1)(a - 3) , D(4) = -2(4 - 1)(4 - 3) = - 6 Cu metoda lui Cramer se calculează $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 16 & 9 & 1 \end{vmatrix}$. Calculele conduc la D_x = -16, D_y= 30, D_z = -20 şi $x = \frac{D_x}{D(4)}$, $y = \frac{D_y}{D(4)}$, $z = \frac{D_z}{D(4)}$ deci S = {($\frac{8}{3}$, -5, $\frac{10}{3}$) } .	1p 2p 2p
2. a)	Din relaţiile lui Viète $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$, $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$, $x_1x_2x_3x_4 = 16$ se determină S = 0, f(S) =16, P = 16, f(S)+ P = 16 + 16 = 32.	1p 3p 1p
b)	Polinomul $f = X^4 - 8X^2 + 16$ se restrânge în $(X^2 - 4)^2 = (X - 2)^2(X + 2)^2$. Unul din factorii lui f este polinomul g deci g divide f.	3p 2p
c)	Din punctul b) rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = -2$. $x_1^4 = x_2^4 = 2^4 = 16$, $x_3^4 = x_4^4 = (-2)^4 = 16$. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 16 + 16 = 32$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.	2p
	Calculul lui $(\frac{2x}{x^2+3})' = \frac{(2x)'(x^2+3) - 2x(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$, deci $f'(x) = \frac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$.	2p
	Calculul lui $f'(0) = \frac{2}{3}$.	1p
b)	Rezolvarea ecuaţiei $f'(x) = 0$ conduce la aflarea punctelor de extrem.	1p
	Din punctul a) $f'(x) = \frac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$ şi $f'(x) = 0$ rezultă $\frac{-2(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = 0$.	1p
	$x^2 - 3 = 0$ şi $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.	1p
	$f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ de unde rezultă punctele de extrem de coordonate $(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$.	2p
c)	Notarea $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x}{x^2+3} - x) = L$.	1p
	Aducerea la acelaşi numitor L= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x - x(x^2+3)}{x^2+3}$.	1p
	Calculele L = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3 - x}{x^2+3}$.	1p
	Observarea nedeterminării $\frac{\infty}{\infty}$ şi găsirea limitei L = $-\infty$.	2p
2. a)	Orice funcţie continuă admite primitive, *f* este contină pe **R** - {1}, pentru continuitatea lui *f* în $x_0 = 1$ se calculează limitele laterale şi $f(1)$.	2p
	$l_s = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(-x^2+3x-2) = 0$, $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+3)\ln x = 0$, $f(1) = (1+3)\ln 1 = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 1$.	2p
	f admite primitive pe **R**.	1p
b)	0 şi $\frac{1}{2} < 1$ deci $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2+3x-2)dx$.	1p
	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	1p

	$\int(-x^2+3x-2)dx=-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x+c$. $\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2+3x-2)dx=(-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x)\mid_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}+3\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}-2(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}$.	1p 2p
c)	$1,\ e^2\geq 1$ deci $\int_1^{e^2}\frac{f(x)}{x+3}dx=\int_1^{e^2}\frac{(x+3)\ln x}{x+3}dx=\int_1^{e^2}\ln x dx$. Formula de integrare prin părţi $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ f, g derivabile cu derivatele continue. $\int_1^{e^2}\ln x dx=x\ln x\mid_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx=x\ln x\mid_1^{e^2}-x\mid_1^{e^2}=e^2+1$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 23

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Termenul general al progresiei aritmetice $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$, precizarea valorilor lui a_1, n, r. Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.	3p

	Calculele $a_{25} = 3 + (25 - 1)\cdot(-2) = 3 - 48 = -45$, $S_{25} = \frac{(3-45)\cdot 25}{2} = -21\cdot 25 = -525$.	2p
2.	Ecuaţia de gradul al II-lea are soluţii reale egale pentru $\Delta = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4\cdot 2m = m^2 - 10m + 1$. $\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 1 = 0$, $\Delta_m = 100 - 4 = 96$, $m_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta_m}}{2a}$ $m_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.	1p 2p 2p
3.	Intersecţia G_f cu Ox înseamnă rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. $\Rightarrow 3^{2x+1}-1 = 0 \leftrightarrow 3^{2x+1} = 1 \leftrightarrow 2x+1 = 0 \leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ deci $G_f \cap Ox = \{A\}$, $A(-\frac{1}{2}, 0)$. Intersecţia G_f cu Oy înseamnă $f(0)$, $f(0) = 3^{2\cdot 0+1}-1 = 2$ deci $G_f \cap Oy = \{B\}$, $B(0, 2)$.	1p 2p 2p
4.	Formulele $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, $P_n = n!$ Calculele $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $P_3 = 6$ conduc la ecuaţia $n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$.	2p 3p
5.	Condiţia ca doi vectori $\vec{t} = a\vec{i} + b\vec{j}$ şi $\vec{r} = c\vec{i} + d\vec{j}$ să fie coliniari $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ Calculele pentru ca vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ să fie coliniari $\frac{a+2}{3} = \frac{a-3}{-2} \leftrightarrow 3(a-3) + 2(a+2) = 0$ $\leftrightarrow 5a = 5 \leftrightarrow a = 1$	2p 3p
6.	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, $a, b \in \mathbf{R}$ $75^0 = 45^0 + 30^0$ $\sin 75^0 = \sin 45^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 45^0$, valorile remarcabile $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 75^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia dreptei *BC*: $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$, *B*(1, 2) şi *C*(- 3, -2) Calculele $2x - 2 - 3y + 6 + 2x - y = 0 \leftrightarrow x - y + 1 = 0$. Ecuaţia dreptei *BC*: $x - y + 1 = 0$.	2p 2p 1p
b)	*A*(3, *a*), *B*(*a*, 2) şi *C*(- 3, -2) pentru *a* = -2 devin *A*(3, -2), B(-2, 2) şi *C*(- 3, -2) $A_{\Delta ABC} = \left\| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix} \right\|$, $A_{\Delta ABC} = \left\| \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix} \right\|$ Calculul determinantului conduce la $A_{\Delta ABC} = 12$	3p 2p
c)	$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$ pentru ca A, B, C să fie coliniare. $\begin{vmatrix} 3 & a & 1\\ a & 2 & 1\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix} = 6 - 2a - 3a + 6 + 6 - a^2 = -a^2 - 5a + 18$, $a^2 + 5a - 18 = 0$. $a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+72}}{2}$, se reţine valoarea pozitivă deci $S = \{\frac{-5+\sqrt{97}}{2}\}$.	1p 2p 2p
2. a)	$\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1} \leftrightarrow \hat{2}x + \hat{3} + \hat{2} = \hat{1} + \hat{2}$. $\leftrightarrow \hat{2}x = \hat{3} \leftrightarrow x = \hat{4}$ în $\mathbf{Z}_5$. $S = \{\hat{4}\}$	1p 3p 1p
b)	$\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix} = \hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3} + \hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3} + \hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3} - (\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3} + \hat{1}\cdot\hat{1}\cdot\hat{1} + \hat{2}\cdot\hat{2}\cdot\hat{2})$ $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3} = \hat{1}$, $\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3} = \hat{2}$, $\hat{2}\cdot\hat{2}\cdot\hat{2} = \hat{3}$ de unde rezultă valoarea determinantului $\hat{3} - (\hat{2} + \hat{1} + \hat{3}) = \hat{2}$	3p 2p
c)	Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuaţii se obţine $\hat{3}x = \hat{4} \leftrightarrow x = \hat{3}$. Prin înlocuirea în prima ecuaţie a sistemului se obţine $\hat{1} + y = \hat{1} \leftrightarrow y = \hat{0}$.	2p 2p

	Soluţia sistemului în $\mathbf{Z}_5$ este $S = \{(\hat{3},\ \hat{0})\}$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$, $(f(x)\cdot g(x))' = (\ln x + \frac{x^2}{2})'(x^2 - 3x) + (\ln x + \frac{x^2}{2})(x^2 - 3x)'$, $x > 0$.	2p
	$(f(x)\cdot g(x))' = (\frac{1}{x} + x)(x^2 - 3x) + (\ln x + \frac{x^2}{2})(2x - 3)$	2p
	$(f(x)\cdot g(x))' = x^3 - 3x^2 + x - 3 + (\ln x + \frac{x^2}{2})(2x - 3)$.	1p
b)	Curbura funcţiei se stabileşte folosind *f “(x)*.	1p
	Din punctul a) $f'(x) = (\ln x + \frac{x^2}{2})' = \frac{1}{x} + x$.	1p
	$f''(x) = (\frac{1}{x} + x)' = -\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.	1p
	$f''(x) = 0 \leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$. Funcţia *f* este convexă pe intervalele $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ şi concavă pe intervalul (-1, 1).	2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x + \frac{x^2}{2}}{x^2 - 3x}$.	1p
	$\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x + \frac{x^2}{2}) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - 3x) = +\infty$.	1p
	Nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$ se rezolvă cu regula lui l’Hopital.	1p
	Din punctual a) $(\ln x + \frac{x^2}{2})' = \frac{1}{x} + x$, $(x^2 - 3x)' = 2x - 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pentru care se aplică iar regula lui l’Hopital $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x} + 1}{2} = \frac{1}{2}$.	2p

2. a)	Pentru $x\in[1, 3]$ $\int f(x)dx=\int(x^2+x+\frac{2}{x})dx$, formulele $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$	2p
	Calculele $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$, $\int xdx=\frac{x^2}{2}+c$, $\int\frac{2}{x}dx=2\ln x+c$.	2p
	Finalizarea $\int(x^2+x+\frac{2}{x})dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\ln x+c$, $\forall x\in[1, 3]$.	1p
b)	$\int_1^3(f(x)-x^2-\frac{2}{x})e^x dx=\int_1^3 xe^x dx$.	1p
	Formula de integrare prin părţi $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ f, g derivabile cu derivatele continue.	1p
	$\int_1^3 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^3-\int_1^3 e^x dx$.	1p
	$\int_1^3 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^3-e^x\Big\vert_1^3=2e^3$.	2p
c)	Formula $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx$, $g(x)=f(x)-x=x^2+\frac{2}{x}$.	2p
	$g^2(x)=(x^2+\frac{2}{x})^2=x^4+4x+\frac{4}{x^2}$.	1p
	Calculele $V=\pi\int_1^2(x^4+4x+\frac{4}{x^2})dx=\pi(\frac{x^5}{5}+2x^2-\frac{4}{x})\Big\vert_1^2=(\frac{31}{5}+8)\pi=\frac{71}{5}\pi$.	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 24

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Formula termenului general al progresiei geometrice $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, ($b_n > 0$ din enunţ) , aplicarea ei în relaţiile din enunţ $b_1 - b_1q = 4$, $b_1 - b_1q^3 = 7$ conduce la $4(1+q+q^2) = 7 \leftrightarrow 4q^2 + 4q - 3 = 0$ cu soluţiile $q_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{-3}{2}$.	3p
	Pentru $q_2 = \frac{-3}{2}$ termenii progresiei geometrice nu vor fi toţi pozitivi. Pentru $q_1 = \frac{1}{2}$ se calculează $b_1 = 8$ şi $b_{12} = 8 \cdot (\frac{1}{2})^{11} = (\frac{1}{2})^8$.	2p
2.	Condiţia de existenţă pentru $\frac{x+2}{x-1}$ este $x - 1 \neq 0$.	1p
	$5^{\frac{x+2}{x-1}} = 125 \leftrightarrow 5^{\frac{x+2}{x-1}} = 5^3 \leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = 3.$	2p
	$\leftrightarrow x+2 = 3x - 3 \leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ verifică $x - 1 \neq 0$ şi deci $S = \{\frac{5}{2}\}$.	2p
3.	Condiţiile de existenţă pentru logaritmi $x > 0$, $2x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ conduc la $x > \frac{1}{2}$	1p
	$\log_3 x + \log_3 (2x-1) = 2\log_3(x+1) \leftrightarrow \log_3 x(2x-1) = \log_3 (x+1)^2 \leftrightarrow$ $x(2x-1) = (x+1)^2 \leftrightarrow 2x^2 - x = x^2 + 2x + 1 \leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0.$	2p
	Rezolvarea ecuaţiei de gr. al II-lea duce la soluţiile $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{13}}{2} > \frac{1}{2}$ Mulţimea soluţiilor ecuaţiei logaritmice este $S = \{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$.	2p
4.	$V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, intersecţia G_f cu Oy se obţine calculând $f(0)$.	2p
	$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$, $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{7}{4}$ $\Rightarrow V(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ şi $f(0) = 4 \Rightarrow G_f \cap Oy = \{(0, 4)\}$.	3p
5.	Condiţiile ca doi vectori $\vec{t} = a\vec{i} + b\vec{j}$ şi $\vec{r} = c\vec{i} + d\vec{j}$ să fie egali sunt $a = c$, $b = d$.	2p
	$\vec{v} = \vec{u}$ dacă $5a + 1 = 3{,}5$ şi $2b - 3 = 2{,}4$ de unde $a = 0{,}5$ şi $b = 2{,}7$ deci $S = \{(0{,}5; 2{,}7)\}$.	3p

6.	Teorema cosinusului $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, cu a = BC, b = AC, c = AB.	2p
	$b = 10$, $c = 8$, $\cos A = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$.	1p
	$a^2 = 10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cos 60^0 = 100 + 64 - 80 = 84 \Rightarrow a = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.	2p
	det (A – B) = 4 – 2 = 2 .	2p
	Tr (A -B) = 1+ 0 + (-1) = 0	1p
b)	A inversabilă dacă det A $\neq 0$, det A= 1 + 8 – 6 – 6 = - 3 $\neq 0$ deci $\exists A^{-1}$	3p
	$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, formula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* matricea complemenţilor algebrici ai lui A^t.	
	Calculele $A_{11} = 1$, $A_{12} = 1$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = -5$, $A_{23} = 4$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = 7$, $A_{33} = -5$	2p
	$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$	
c)	Primul element al produsului $A\cdot B$ 18.	1p
	Fiecare din cele 4 puncte se acordă dacă se calculează corect câte două elemente ale matricei produs după relaţia $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$ cu $i, j \in \{1, 2, 3\}$.	2p 2p
	$A\cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 8 & 11 \end{pmatrix}$	
2. a)	$(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.	1p
	$(x * y) * z = (xy - 3x - 3y + 12) * z = (xy - 3x - 3y + 12)z - 3(xy - 3x - 3y + 12) - 3z + 12$	3p
	$x * (y * z) = x * (yz - 3y - 3z + 12) = x(yz - 3y - 3z + 12) - 3x - 3(yz - 3y - 3z + 12) + 12$	

	După desfacerea parantezelor şi reducerea termenilor asemenea în cele două expresii se obţine $(x*y)*z = x*(y*z) \Rightarrow$ ”$*$ ”este asociativă.	1p
b)	Relaţia $x*y = xy-3x-3y+12$ se transformă după înlocuirea lui y cu 5 în $x*5 = x\cdot 5-3x-3\cdot 5+12 = 2x - 3$ $x*5 = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 1 \leftrightarrow x = 2$ deci S = {2}.	3p 2p
c)	Relaţia $x*y = xy-3x-3y+12$ se transformă după înlocuirea lui x cu 2 în $2*C_n^2 = 2C_n^2-3\cdot 2-3C_n^2+12 = -C_n^2+6$ $2*C_n^2 > 1 \Rightarrow -C_n^2+6 > 1 \leftrightarrow -C_n^2 > -5, n \geq 2 \Rightarrow C_n^2 < 5 \leftrightarrow n(n-1) < 10$ Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2*C_n^2 > 1$ este S = {2, 3}	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x-3}{x-4} = \frac{3}{4}$. $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+3}{x+4} = \frac{3}{4}$ şi a valorii funcţiei în $x_0 = 0$, $f(0) = \frac{3}{4}$. $ls = ld = f(0) \Rightarrow f$ este continuă în $x_0 = 0$.	2p 2p 1p
b)	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$. Dacă $2 > 0$ se alege pentru derivare $f(x) = \frac{x+3}{x+4}$. $(\frac{x+3}{x+4})' = \frac{(x+3)'(x+4)-(x+3)(x+4)'}{(x+4)^2}$. $f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2}$ şi $f'(2) = \frac{1}{(2+4)^2} = \frac{1}{36}$.	1p 1p 1p 2p
c)	Asimptota orizontală se determină pentru $x \to \pm\infty$.	1p

	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, l finit. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+4} = 1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x-4} = 1 \Rightarrow f$ admite asimptotă orizontală de ecuaţie $y = 1$ la $\pm\infty$.	1p 1p 2p
2. a)	$f_0(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $\int f_0(x)dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx$. $\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctg\ x + c$ şi $\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx = arctg\ x\vert_1^2$. $arctg\ x\vert_1^2 = arctg\ 2 - \frac{\pi}{4}$.	2p 2p 1p
b)	$I_{2010} = \int_0^1 f_{2010}(x)dx = \int_0^1 \frac{x^{2010}}{x^2+1}dx$. $I_{2012} = \int_0^1 f_{2012}(x)dx = \int_0^1 \frac{x^{2012}}{x^2+1}dx$. $I_{2010} + I_{2012} = \int_0^1 (f_{2010}(x) + f_{2012}(x))dx = \int_0^1 \frac{x^{2010}+x^{2012}}{x^2+1}dx$. $I_{2010} + I_{2012} = \int_0^1 \frac{x^{2010}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2010}dx = \frac{x^{2011}}{2011}\vert_0^1 = \frac{1}{2011}$.	1p 1p 1p 2p
c)	$f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $A(\Gamma_f) = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$. Calculul $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. $A(\Gamma_f) = \int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1})dx = (x - arctg\ x)\vert_1^2 = 1 - arctg\ 2 + \frac{\pi}{4}$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 25

(ascuns - pentru teste)

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 26

Prof: Dogaru Ion

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta = 169$ $x_1 = \frac{1}{7}$; $x_2 = 2$ $x \in [\frac{1}{7}, 2]$	1p 2p 2p
2.	N = Numărul submulţimilor cu 3 elemente ale mulţimii A care conţine elementul 5 este egal cu numărul submulţimilor cu 2 elemente ale mulţimii A\{5}; N = $C_9^2 = 36$	3p 2p
3.	Nr.caz.fav. = 81; Nr.caz.posib.= 90; $p = \frac{\text{nr.caz.fav.}}{\text{nr.caz.posib.}} = 0{,}9$	2p 2p 1p
4.	$\begin{cases} x-1>0 \\ 6x-5>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,+\infty)$; $6x^2 - 11x - 95 = 0$; $\Delta = 2401$; $x_1 = 5 \in (1,+\infty)$; $x_2 = \frac{-19}{6} \notin (1,+\infty)$	1p 1p 1p 1p 1p
5.	$d^2(A,B) = (m+5)^2 + (-m-7)^2 = 100$; $m^2 + 12m - 13 = 0$; $\Delta = 196$; $m_1 = -13$; $m_2 = 1$	2p 2p 1p
6.	$\vec{u} + \vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$; $\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert = 3\sqrt{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\operatorname{rang}A \geq 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\operatorname{rang}A \geq 2 \Leftrightarrow \det A \neq 0$; $\operatorname{rang}A = 2 \Leftrightarrow x = -2$	1p 2p 2p
b)	Pentru x = - 2 $\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;	3p

	$\det A^* = 0$	2p
c)	$Y \in M_{1,3}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{R}$; $x = -1$ şi $YA = B \Rightarrow x = y = z = 1$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$f = x^3 - 9x^2 - x + 9 = (x^2 - 1)(x - 9)$; $q = x - 9$; $r = 0$	3p 2p
b)	x_1, x_2, x_3 rădăcini $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 9$; $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) - 27 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$	2p 3p
c)	$f(3^x) = 0 \Rightarrow (3^x - 1)(3^x + 1)(3^x - 9) = 0$; $3^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$; $3^x + 1 = 0 \Rightarrow$ ecuaţie imposibilă; $3^x - 9 = 0 \Rightarrow x = 2$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x - 4} = \pm\infty \Rightarrow G_f$ nu are AO $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = 1$; $y = x + 1$, asimptotă oblică; f cotinuă pe R $\Rightarrow G_f$ nu are AV	1p 1p 1p 1p 1p
b)	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$; $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}}, \forall x \in R \setminus \{-2,1\}$; $f(x) \cdot f'(x) = x^2 + 2x, \forall x \in R \setminus \{-2,1\}$	1p 2p 2p
c)	$f(-2) = 0 \Rightarrow$ f nu este derivabilă în $x_0 = -2$; $d_s = \lim\limits_{x\nearrow -2} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}}{x + 2} = \lim\limits_{x\nearrow -2} \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}} = +\infty$; $d_d = \lim\limits_{x\searrow -2} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}}{x + 2} = \lim\limits_{x\searrow -2} \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}} = -\infty$	1p 2p 2p
2. a)	$f'(x) = 3(x^2 - 1); f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; f este strict cresc. $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$, respectiv $(1, +\infty)$; f este strict descresc. $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$	1p 2p 2p
b)	$I = \int_2^3 \dfrac{f(x)}{x-1} dx = \int_2^3 (x^2 + x - 2) dx$; $I = \left. \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x \right\|_2^3 = \dfrac{41}{6}$	2p 3p
c)	$\dfrac{x^2 - 13}{f(x)} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+2}, \forall x \in [-1, 0]$; $I = \int_{-1}^{0} \dfrac{x^2 - 13}{f(x)} dx = \left. 2\ln\|x-1\| + \dfrac{4}{x-1} - \ln\|x+2\| \right\|_{-1}^{0}$; $I = -2 - 3\ln 2$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 27

Prof: Dogaru Ion

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^4 = -4$; $(1-i)^4 = -4$; $(1+i)^{2012} - (1-i)^{2012} = (-4)^{503} - (-4)^{503} = 0$	1p 1p 3p
2.	$\begin{cases} 11x+4 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$; $x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şi $x = 15$; Soluţia ecuaţiei: $x = 15$	2p 2p 1p
3.	$a_6 = a_3 + 3r$; $a_{16} = a_{19} - 3r$; $a_3 + a_{19} = a_6 + a_{16} = 2012$	1p 1p 3p
4.	$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x \in [-2,-1] \cup [1,+\infty)$	2p 2p 1p
5.	Fie M mijlocul segmentului [AB] $\Rightarrow M(-1,2)$; $m_{AB} = -1 \Rightarrow m' = 1$ Ecuaţia mediatoarei lui [AB]: $x - y + 3 = 0$	1p 2p 2p
6.	$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $\cos x = -1 \Rightarrow x \in \{\pi + 2k\pi, k \in Z\}$; $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\}$; $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x \in \{\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$	1p 1p 2p 1p

Tabel de semne (punctul 4):

x	$-\infty$ -2 -1 1 $+\infty$
$x+2$	- - - - - - 0 + + + + + + + + + +
x^2-1	+ + + + + + + 0 - - 0 + + + +
$(x+2)(x^2-1)$	- - - - - 0 + + + 0 - - - 0 + + + + +

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Rightarrow \text{rang}M \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$; $\det M = m^2 - 6m + 5$; $\text{rang}M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow m = 1$ sau $m = 5$	2p 2p 1p
b)	A,B,C sunt necoliniare $\Leftrightarrow \det M \neq 0$; $m^2 - 6m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$	3p 2p
c)	$A_{ABC} = \frac{1}{2}\lvert\det M\rvert = \frac{1}{2}\lvert m^2 - 6m + 5\rvert$; $m \in [1,5] \Rightarrow 0 \geq m^2 - 6m + 5 \geq -4$; A_{ABC} maximă = 2	2p 2p 1p

2. a)	Observăm că $x*y=\frac{1}{5}\left[(5x+6)(5y+6)-6\right];\forall x,y\in\mathbb{Z}$; $(x*y)*z=\frac{1}{5}\left[(5x+6)(5y+6)(5z+6)-6\right]=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$; $\Leftrightarrow *$ este asociativă	1p 3p 1p
b)	Elementul neutru al operaţiei $*$ este e = - 1 $\in\mathbb{Z}$; $x*x'=e=\frac{1}{5}[(5x+6)(5x'+6)-6]=-1$; $\Rightarrow 5x'+6=\frac{1}{5x+6}$ Cum $x'\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{5x+6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5x+6\in\{-1,1\}$; $\Rightarrow 5x\in\{-7,-5\}$.Deci x = -1 este simetrizabil şi $x'=-1$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	Observăm că $x*x=\frac{1}{5}\left[(5x+6)^2-6\right];\forall x\in\mathbb{Z}$; Inductiv obţinem $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 2012 ori}}=\frac{1}{5}\left[(5x+6)^{2012}-6\right]$; $\frac{1}{5}\left[(5x+6)^{2012}-6\right]=-1$; $\Leftrightarrow 5x+6=1\Leftrightarrow x=-1\in\mathbb{Z}$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(x+2)e^x,\forall x\in R$; $f'(x)=0\Rightarrow x=-2$; Pe $(-\infty,-2]$ f este strict descrescătoare; Pe $[-2,+\infty)$ f este strict crescătoare	2p 1p 1p 1p
b)	$f''(x)=(x+3)e^x,\forall x\in R$; $f''(x)=0\Rightarrow x=-3$; Pe $(-\infty,-3]$ f este concavă; Pe $[-3,+\infty)$ f este convexă	1p 2p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}}=0$; $y=0$; AO spre $-\infty$	3p 2p
2. a)	F(x) = $3x^2$ + 2lnx + C ; $\forall x\in[1,+\infty)$; F(1) = 2012 $\Rightarrow$ C = 2009; F(x) = $3x^2$ + 2lnx + 2009	2p 2p 1p
b)	$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi(12x^3+24x-4x^{-1})\Big\|_1^2$; $V=110\pi$	3p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=6=m$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0=n$; y = 6x este asimptota oblică către $+\infty$ a graficului funcţiei f.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 28

Prof: Dogaru Ion

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^4 = -4$; $(1+i)^4 = -4$; $(1+i)^{2012} - (1-i)^{2012} = (-4)^{503} - (-4)^{503} = 0$	1p 1p 3p
2.	Notăm $3^x = y \Rightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3; y_2 = 1/3$; $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$; $3^x = 1/3 \Rightarrow x = -1$	3p 1p 1p
3.	$a_6 = a_3 + 3r$; $a_{16} = a_{19} - 3r$; $a_3 + a_{19} = a_6 + a_{16} = 2012$	1p 1p 3p
4.	$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 = 36 \Rightarrow (n+1)(n+2) = 72$; $n + 1 = 8 \Rightarrow n = 7$	3p 2p
5.	Fie M mijlocul segmentului [AB] $\Rightarrow M(-1,1)$; $m_{AB} = -3/4 \Rightarrow m' = 4/3$ Ecuaţia mediatoarei lui [AB]: $4x - 3y + 7 = 0$	2p 1p 2p
6.	$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $\cos x = -1 \Rightarrow x \in \{\pi + 2k\pi, k \in Z\}$; $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\}$; $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x \in \{\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$H^*(t) = \begin{pmatrix} t & -t\ln t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \forall t > 0$; $\det H^*(t) = t^2$	3p 2p
b)	$H(x) \cdot H(y) = \begin{pmatrix} 1 & \ln x + \ln y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$; $\forall x, y \in (0, +\infty)$; Deci $H(x) \cdot H(y) = H(xy)$; $\forall x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p

c)	$H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(10)=\begin{pmatrix}10 & \ln(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10) & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 55\end{pmatrix}$; $\det[H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(10)]=5500$	3p 2p
2. a)	$\left.\begin{matrix}x>2\Rightarrow x-2>0\\ y>2\Rightarrow y-2>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow xy-2x-2y+4>0$; $x*y=xy-2x-2y+6\in G;\ \forall x,y\in G$; G este parte stabilă faţă de operaţia *	3p 1p 1p
b)	Observăm că operaţia * este comutativă; Elementul neutru: e = 3; $x*x'=3\Rightarrow x'(x-2)=2x-3,\forall x\in G$; $x'=2+\dfrac{1}{x-2}>0,\forall x\in G$	1p 1p 1p 2p
c)	$x*y*z=(x-2)(y-2)(z-2)+2,\forall x,y,z\in G$ $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\cdots*\frac{8}{9}=\frac{-3}{2}\cdot\frac{-4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{-10}{9}+2=7$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=2012x^{2011}+2012,\forall x\in\mathbb{R}$; $f(1)=0$; $f'(0)=2012$; $f(1)+f'(0)=2012$	2p 1p 1p 1p
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$; $y=4024(x-1)$	3p 2p
c)	$f''(x)=2012\cdot 2011x^{2010},\forall x\in\mathbb{R}$; $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f$ este convexă	3p 2p
2. a)	$f(x)=x^3+3x,\ \forall x\in R$ (1) $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3+3x)dx=\left.\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{3x^2}{2}\right\|_0^1$; $I=\dfrac{7}{4}$	1p 3p 1p
b)	$f^5(-x)=[(-x)^3+3(-x)]^5=-f^5(x),\ \forall x\in R$; f^5 este funcţie impară $\Rightarrow\int_{-1}^{1}f^5(x)dx=0$	3p 2p
c)	$\int_0^x f(t-1)dt=\left.\dfrac{(t-1)^4}{4}+\dfrac{3(t-1)^2}{2}\right\|_0^x=\dfrac{(x-1)^4+6(x-1)^2-7}{4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t-1)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^4+6(x-1)^2-7}{4x^4}=\dfrac{1}{4}$	3p 1p

Varianta 29

Prof: Gaga Loghin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se observă că, în șirul $1,5,9,\cdots$, între oricare 3 termeni a_{k-1},a_k,a_{k+1} ai șirului există relația $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}=\frac{a_{k-1}+a_{k-1}+8}{2}=a_{k-1}+4=a_k$, deci șirul reprezintă o progresie aritmetică, cu $a_1=1,r=4$.	3p
	$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+61}{2}\cdot n; a_n=a_1+(n-1)r\Rightarrow 61=1+4(n-1)\Rightarrow n=16$. Deci $S=31\cdot 16=496$	2p
2.	Se vede că obținem $f(4)$ dacă facem $x=\frac{1}{2}$	2p
	$\Rightarrow f(4)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+5=\frac{2}{4}-\frac{3}{2}+5=4$	3p
3.	$\log_{x-2}2+\log_{x-2}8=\log_{x-2}2+3\log_{x-2}2=4\log_{x-2}2$.	3p
	Deci $4\log_{x-2}2=4\Rightarrow \log_{x-2}2=1\Rightarrow 2=x-2\Rightarrow x=4$	2p
4.	Dacă elementul 1 intră în toate submulțimile, numărul de submulțimi va fi format din combinările de 9 luate câte k, unde $k=\{0,1,2,\cdots,9\}$.	3p
	Deci numărul de submulțimi este $C_9^0+C_9^1+\cdots C_9^9=2^9=512$.	2p
5.	Doi verctori sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este nul, adică $\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=\overline{0}$	2p
	$\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=\overline{0}\Rightarrow 4(m-2)-3(m+1)=0\Leftrightarrow m=11$.	3p
6.	$A_{ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}$; $A_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, *unde* $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=9$	2p
	$\Rightarrow A_{ABC}=\sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)}=3\sqrt{15}$	1p

	Deci, $\sin B=\dfrac{2A_{ABC}}{AB\cdot BC}=\dfrac{6\sqrt{15}}{32}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}$. Observăm că $M^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix},n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrăm prin inducție.	2p
	Presupunem adevărat că $M^k=\begin{pmatrix}3^k&0\\0&1\end{pmatrix}$ și demonstrăm $M^{k+1}=\begin{pmatrix}3^{k+1}&0\\0&1\end{pmatrix}$	2p
	$M^{k+1}=M^k\cdot M=\begin{pmatrix}3^k&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{k+1}&0\\0&1\end{pmatrix}$. Deci $M^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix},n\in\mathbb{N}^*$	1p
b)	$\det\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}3^n&0\\0&1\end{vmatrix}=3^n$	2p
	$7\cdot\det\left(M^n\right)-4\cdot3^n=729\Leftrightarrow7\cdot3^n-4\cdot3^n=729\Leftrightarrow3^{n+1}=3^6\Rightarrow n=5$	3p
c)	$M+M^2+\cdots+M^{2012}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}3^{2012}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3^2+\cdots+3^{2012}&0\\0&2012\end{pmatrix}$	2p
	$3+3^2+\cdots+3^{2012}=3\cdot\dfrac{3^{2012}-1}{3-1}=3\cdot\dfrac{3^{2012}-1}{2}$, fiind suma unei progresii geometrice cu rația 3 și primul termen 3.	2p
	Deci $S=\begin{pmatrix}\dfrac{3\left(3^{2012}-1\right)}{2}&0\\0&2012\end{pmatrix}$	1p
2. a)	$\begin{cases}f(-1)=0\\f(2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2-(m+1)+2n=0\\16-4(m+1)+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2n=3\\4m-2n=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=5\\n=4\end{cases}$	5p
b)	$x_1^2+x_2^2+x_3^3=4\Leftrightarrow\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)=4$	2p
	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\dfrac{m+1}{2}\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0\end{cases}$	1p

	$\Rightarrow \frac{(m+1)^2}{4} = 4 \Rightarrow (m+1)^2 = 4^2 \Rightarrow (m-3)(m+5) = 0 \Rightarrow m = 3$	2p
c)	$2\cdot 625^x - 6\cdot 25^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 5^{4x} - 6\cdot 5^{2x} + 8 = 0 \Rightarrow 5^{4x} - 3\cdot 5^{2x} + 4 = 0$ Notez $5^{2x} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 4 = 0; \Delta = 9 - 16 < 0$ Ecuația nu admite soluții reale.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{\left(e^{x-2} + xe^{x-2}\right)(x-1)^2 - 2xe^{x-2}(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^{x-2}(x-1)\left[(1+x)(x-1) - 2x\right]}{(x-1)^4} =$ $= \frac{e^{x-2}\left[x^2 - 2x - 1\right]}{(x-1)^3}$	5 p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{x-2}}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{e^{x-2}\left(x^2 - 2x - 1\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 1} = 1$	5 p
c)	Ecuația tengentei într-un punct (x_0, y_0) la graficul funcției f(x) este $y - y_0 = m(x - x_0)$, unde $m = f'(x_0)$ și $y_0 = f(x_0)$. În cazul nostru $x_0 = 2, y_0 = f(x_0) = f(2) = 2;\ m = f'(2) = -1 \Rightarrow$ $y - 2 = -(x-2) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$, care este ecuația tangentei	2 p 2 p 1 p
2. a)	$\int_{-1}^{1} \left(x - f(x) + \ln(x+2)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x - \ln(x+2) + x + 2 + \ln(x+2)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} (2x+2)^2 dx =$ $= 4\int_{-1}^{1} (x+1)^2 dx = 4\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right\|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3}$	5 p

b)	$f'(x)=\frac{1}{x+2}-1=\frac{1-x-2}{x+2}=\frac{-x-1}{x+2}$; $f''(x)=\left(\frac{-x-1}{x+2}\right)'=\frac{-x-2+x+1}{(x+2)^2}=-\frac{1}{(x+2)^2}<0$ Deci funcția este concavă pe $(-2;\infty)$	2p 2p 1p
c)	$A=\int_1^e g(x)=\int_1^e \ln(x+2)dx=\int_1^e (x)'\cdot\ln(x+2)dx=x\cdot\ln(x+2)\Big\|_1^e-\int_1^e \frac{x}{x+2}dx=$ $e\ln(e+2)-\ln 3-x\Big\|_1^e+2\ln(x+2)\Big\|_1^e=e\ln(e+2)-\ln 3-e+1+2\ln(e+2)-2\ln 3=(e+2)\ln(e+2)-$ $+1-3\ln 3$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 30

Prof: Gaga Loghin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^{3}=\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2}\cdot\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=-2\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=-8$ $\Rightarrow \operatorname{Im} z=0$	4p 1p
2.	$x_1^2+x_2^2=16\Rightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=16$ $\begin{cases}x_1+x_2=m-2\\ x_1\cdot x_2=m-3\end{cases}$ $\Rightarrow\left(m-2\right)^2-2\left(m-3\right)=16\Leftrightarrow m^2-4m+4-2m+6=16$ $\Leftrightarrow m^2-6m-6=0\Rightarrow m_1=3+\sqrt{15}, m_2=3-\sqrt{15}$	2p 1p 2p
3.	$C_{2012}^{7}-C_{2012}^{2005}=C_{2012}^{7}-C_{2012}^{2012-2005}=C_{2012}^{7}-C_{2012}^{7}=0$	5p
4.	$p=\dfrac{c_f}{c_p}$, unde c_f reprezintă numărul cazurilor favorabile și c_p numărul cazurilor posibile. Avem $c_p=2013$, iar $c_f=\dfrac{2013}{3}=671$ $p=\dfrac{c_f}{c_p}=\dfrac{671}{2013}=\dfrac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$(\mathrm{m}+2)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ $\Rightarrow \mathrm{m}=3$	3p 2p
6.	Observăm că $BC^2=25=AB^2+AC^2=9+16=25 \overset{cf.Reciproca\ T.Pitagora}{\Rightarrow} \Delta ABC$ este dreptunghic , cu ipotenuza BC. Știm că, într-un triunghi dreptunghic, mediana din vârful unghiului drept este egală cu jumătate din ipotenuză. Notăm cu M mijlocul ipotenuzei BC $\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{2}$	2p 2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{vmatrix}$. $\det A=0 \Rightarrow (x+5)^2-16=0 \Leftrightarrow (x-11)(x+21)=0 \Rightarrow x_1=11, x_2=-21$ (se înlocuieşte cu: $(x+5)^2-16=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+9)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=-9$)	2p 3p
b)	$A^2=\begin{pmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x+5)^2+16 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & (x+5)^2+16 \end{pmatrix}$ $(2x+10)\cdot A=\begin{pmatrix} 2(x+5)^2 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & 2(x+5)^2 \end{pmatrix}$ $(x^2+10x+9)I_2=\begin{pmatrix} x^2+10x+9 & 0 \\ 0 & x^2+10x+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x+5)^2-16 & 0 \\ 0 & (x+5)^2-16 \end{pmatrix}$ $A^2-(2x+10)A+(x^2+10x+9)I_2=$ $\begin{pmatrix} (x+5)^2+16 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & (x+5)^2+16 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2(x+5)^2 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & 2(x+5)^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (x+5)^2-16 & 0 \\ 0 & (x+5)^2-16 \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p 2p
c)	Pentru x=-1 $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^2=4^2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=8A=2^3\cdot A;$ $A^3=A^2\cdot A=2^3\cdot A^2=2^6A;$ Presupunem $A^n=2^{3(n-1)}A$ și demonstrăm $A^{n+1}=2^{3n}A$; $A^{n+1}=A^n\cdot A=2^{3(n-1)}A\cdot A=2^{3(n-1)}A^2=2^{3(n-1)}\cdot 2^3A=2^{3n}A$ Deci $A^n=2^{3(n-1)}A, \forall n\in\mathbb{N}^*$	2p 2p 1p
2. a)	$g=\hat{0}\Rightarrow x+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow x=\hat{1}$. Trebuie să avem $f(\hat{1})=\hat{0}\Rightarrow\hat{1}+a+\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow a+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow a=\hat{1}$	2p 3p
b)	Pentru $a=\hat{1}\Rightarrow f(X)=X^3+X^2+X+\hat{2}$ și $x=\hat{1}$ este soluție a polinomului.	2p 1p

	Se verifică faptul că $x=\hat{1}$ este singura soluție. Împărțind, sau folosind schema lui Horner, obținem $f(X)=\left(X+\hat{4}\right)\left(X^2+\hat{2}X+\hat{3}\right)$	2p
c)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{2};\ f\left(\hat{1}\right)=\hat{0};\ f\left(\hat{2}\right)=\hat{3}+\hat{4}+\hat{2}+\hat{2}=\hat{1};\ f\left(\hat{3}\right)=\hat{2}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{2}=\hat{1};$ $f\left(\hat{4}\right)=\hat{4}+\hat{1}+\hat{4}+\hat{2}=\hat{1}$ $f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+\dots+f\left(\hat{4}\right)=\hat{2}+\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}=\hat{0}$	4p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\ln^2 x}{1+\ln^2 x}=1$	5p
b)	$f'(x)=\frac{\left(-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right)\cdot\left(1+\ln^2 x\right)-\left(1-\ln^2 x\right)\cdot\left(\frac{2}{x}\cdot\ln x\right)}{\left(1+\ln^2 x\right)^2}=$ $=\frac{\frac{2}{x}\cdot\ln x\cdot\left(-1-\ln^2 x-1+\ln^2 x\right)}{\left(1+\ln^2 x\right)^2}=-\frac{4}{x\left(1+\ln^2 x\right)^2}$	2p 3p
c)	Asimptotă verticală. Se caută în x=0: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1-\ln^2 x}{1+\ln^2 x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hospital}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{-\frac{2}{x}\ln x}{\frac{2}{x}\ln x}=-1$. Nu există asimptotă verticală pentru f. Asimptotă orizontală. Se caută la $+\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\ln^2 x}{1+\ln^2 x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{L'Hospital}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{-\frac{2}{x}\ln x}{\frac{2}{x}\ln x}=-1$. Deci $y=-1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Asimptotă oblică. Nu există	2p 2p 2p 1p

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_0^1+arctgx\Big\|_0^1=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}$	5p
b)	$I_3=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x\left(x^2+1\right)-x+1}{x^2+1}dx=$ $=\int_0^1\left(x+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=1-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}=1-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}$ $I_1-I_3=\ln 2-1<0$	2p 2p 1p
c)	$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{x^{n+2}+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n+2}{x^2+1}dx=$ $=\int_0^1 \frac{x^n\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx+2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{n+1}+\frac{\pi}{2}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 31

Prof: Ionescu Maria.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 6+\log_2 10-\log_2 15=\log_2\frac{6\cdot 10}{15}=$ $\log_2 4=2$	2p 3p
2.	Din $9x^2-16\le 0$ obţinem $x_1,x_2=\pm\frac{4}{3}$. Din tabelul de semn se obţine $x\in\left[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right]$.	1p 2p

	Cum $x \in Z \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$	2p
3.	$a_1 = 7, \quad a_1 + a_2 = 17$ $r = 3$ $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow a_7 = 25$	1p 2p 2p
4.	$A_4^3 =$ $\frac{4!}{(4-3)!} = 24$	2p 3p
5.	Fie M mijlocul segmentului BC, obţinem $M(1,-1)$. $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$ $\sqrt{(1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17}$	2p 1p 2p
6.	$\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2}$ $A_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 12\sqrt{3}$	2p 1 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Se verifică în sistemul de ecuaţii astfel: $1-2+3=2$ *adev.* $2+2-3=1$ *adev.* $m-6+6=3$ $\Rightarrow m=3$	1p 1p 1p 2p
b)	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$ $\Rightarrow m^2 - 5m + 1 = -3 \Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0$ Obţinem $m \in \{1, 4\}$.	2p 1p 2p

c)	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$	1p
	Calculând $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3m+3$ şi ştiam din punctul a) că determinantul sistemului este -3	1p
	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3m$	1p
	obţinem soluţia $x=1, y=m-1, z=m \Rightarrow S:\{(1,m-1,m)\}, m\in R$	2p
2. a)	$f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$	2p
	$g\left(\hat{0}\right)=\hat{3}$	2p
	$\Rightarrow f\left(\hat{1}\right)+g\left(\hat{0}\right)=\hat{3}$	1p
b)	Calculăm : $f\left(\hat{0}\right)=\hat{1}, f\left(\hat{1}\right)=\hat{0}, f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}, f\left(\hat{3}\right)=\hat{0}, f\left(\hat{4}\right)=\hat{0}$	4p
	$\Rightarrow x\in\left\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\right\}$	1p
c)	Conform algoritmului împărţirii a două polinoame obţinem câtul $q=X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ şi	3p
	restul $r=\hat{0}$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcţia f este derivabilă pe R, fiind sumă de funcţii derivabile pe R şi $f'(x)=2012x^{2011}+2012^x\ln 2012+2012, \quad \forall x\in R$	5p (2,2,1)
b)	Punctul de abscisă nulă are $x_0=0$.	1p
	Ecuaţia tangentei este : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$	1p

	$f(0)=1+2012=2013, \quad f'(0)=\ln 2012+2012$ $y-2013=(\ln 2012+2012)x \Rightarrow (\ln 2012+2012)x-y+2013=0$	2p 1p
c)	$f''(x)=2012\cdot 2011x^{2010}+2012^x \ln^2 2012, \quad \forall x\in R$ $\Rightarrow f''(x)>0, \quad \forall x\in R \Rightarrow f$ este convexă pe R	2p 3p
2. a)	$\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x+2012}+x+2012\right)dx=$ $=\ln(x+2012)+\frac{x^2}{2}+2012x+C$	2p 3p
b)	Cum $g:[1,2]\to R, \quad g(x)=f(x)-\frac{1}{x+2012}=x+2012$ $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=$ $=\pi\int_1^2 (x+2012)^2\,dx=\pi\frac{(x+2012)^3}{3}\Big\vert_1^2=$ $=\frac{2014^3-2013^3}{3}\pi$	1p 1p 2p 1p
c)	$\int_1^2 f(x^2)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2+2012}+x^2+2012\right)dx=$ $=\left(\frac{1}{\sqrt{2012}}arctg\frac{x}{2012}+\frac{x^3}{3}+2012x\right)\Big\vert_1^2=$ $=\frac{1}{\sqrt{2012}}\left(arctg\frac{2}{2012}-arctg\frac{1}{2012}\right)+\frac{6043}{3}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 32

Prof: Ionescu Maria.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 2x-5\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$	3p
	$x \in Z \Rightarrow x \in \{1,2,3,4\}$	2p
2.	Se pun condiţiile de existenţă : $x-5 \ge 0 \Rightarrow x \in [5,+\infty)$	2p
	$2-x \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty,2]$	2p
	De unde se deduce că ecuaţia nu are soluţii reale.	1p
3.	Cum $f(3)=0$ şi $f(4)=0$	2p
	$\Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)=0$	3p
4.	Notăm $5^x = t,\quad t>0$ şi ecuaţia devine $t^2-6t+5=0$	1p
	$t_1=1,\quad t_2=5$	2p
	$5^x=1 \Rightarrow x=0$	1p
	$5^x=5 \Rightarrow x=1$	1p

5.	$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$	2p
	$\cos A=\dfrac{25+49-64}{2\cdot 5\cdot 7}=\dfrac{1}{7}$	3p
6.	Ecuaţia dreptei MN: $\dfrac{x-x_M}{x_N-x_M}=\dfrac{y-y_M}{y_N-y_M}$	2p
	$\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-3}{-5}$	2p
	$\Rightarrow x-y+1=0$ este ecuaţia dreptei MN.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-1&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-1&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-5\\3&-2&3\\-5&-2&12\end{pmatrix}$	5p
b)	$I_3+A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\2&0&1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$	2p
	De unde se obţine $\det(I_3+A)=-14$	3p
c)	$\det(A)=-8\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$	1p
	$A^{-1}=\dfrac{-1}{8}\begin{pmatrix}3&-7&1\\7&-11&5\\1&-5&3\end{pmatrix}$	4p
2. a)	$x\circ 5=(x-5)(5-5)+5=0+5=5$	2p
	$5\circ x=(5-5)(x-5)+5=0+5=5$	2p
	$\Rightarrow x\circ 5=5\circ x=5,\quad \forall x\in Z$	1p
b)	Căutăm $e\in Z$ a.î. $x\circ e=e\circ x=x,\quad \forall x\in Z$ .Se verifică $x\circ e=e\circ x$.	2p
		3p

	Din $x\circ e = x \Rightarrow (x-5)(e-5)+5-x=0 \Rightarrow (x-5)(e-6)=0 \Rightarrow e=6\in Z$	
c)	$x\circ x\circ x\circ x\circ x = x \Leftrightarrow (x-5)^5+5=x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-5)^5-(x-5)=0 \Leftrightarrow (x-5)\left[(x-5)^4-1\right]=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)=0 \Rightarrow x=5 \\ (x-5)^4=1 \Rightarrow (x-5)=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=4 \end{cases} \end{cases}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcţia f este derivabilă pe R, fiind produs de funcţii derivabile pe R şi $f'(x)=\left(x^2-2012x+2011\right)'e^x+\left(x^2-2012x+2011\right)\left(e^x\right)'$ $f'(x)=(2x-2012)e^x+\left(x^2-2012x+2011\right)e^x=$ $f'(x)=\left(x^2-2010x-1\right)e^x$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-1$ $f'(0)=-1$	3p 2p
c)	Din punctul a) se obţine că funcţia f este descrescătoare pe intervalul [0,2] $\Rightarrow f(2)\le f(1)\le f(0)$ $f(2)=-2009e^2,\ f(0)=2011$ $\Rightarrow -2009e^2\le f(1)\le 2011$	1p 1p 2p 1p

2. a)	$I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx$	1p
	$I_2=\int_0^1 \frac{x^2-4+4}{x+2}dx=\int_0^1 \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}dx+\int_0^1 \frac{4}{x+2}dx$	2p
	$I_2=\left[\frac{x^2}{2}-2x+4\ln(x+2)\right]\Big\|_0^1=4\ln\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$	2p
b)	$I_{n+1}+2I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2}dx+2\int_0^1 \frac{x^n}{x+2}dx$	1p
	$I_{n+1}+2I_n=\int_0^1 \frac{x^n(x+2)}{x+2}dx=\int_0^1 x^n dx$	2p
	$I_{n+1}+2I_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1=\frac{1}{n+1}$	2p
c)	Din $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{2},\quad \forall x\in[0,1],\Rightarrow\frac{x^n}{3}\le\frac{x^n}{x+2}\le\frac{x^n}{2},\quad \forall x\in[0,1],\quad \forall n\in N^*$ şi deci	1p
	$\int_0^1 \frac{x^n}{3}dx\le I_n\le\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx\Leftrightarrow\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$	2p
	Pentru n=2011 se obţine $\frac{1}{3}\le 2012\cdot I_{2011}\le\frac{1}{2}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 33

Prof: Ionescu Maria.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ Vârful parabolei este: $\frac{-b}{2a}=4,\quad \frac{-\Delta}{4a}=-4$ $V(4,-4)$	1p 2p 2p
2.	Din ecuaţia $x^2-(m+1)x+2m=0$ obţinem $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=m+1,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=2m$ Înlocuim în relaţie şi obţinem $3\left[(m+1)^2-4m\right]=2m-2 \Leftrightarrow 3m^2-8m+5=0$ De unde $m_1=1,\quad m_2=\frac{5}{3}$.	2p 2p 1p
3.	Dobânda : $d=700\cdot\frac{5,5}{100}=38,5$ lei Suma finală: $S=700+38,5=738,5$ lei	3p 2p
4.	$C_{2012}^{2010}=\frac{2012!}{2010!\cdot 2!}=2012\cdot 2011$ $C_{2012}^{2}=\frac{2012!}{2!\cdot 2010!}=2012\cdot 2011$ $C_{2012}^{2010}-C_{2012}^{2}=0$ (sau folosirea formulei $C_n^k=C_n^{n-k}, n\geq k$)	2p 2p 1p
5.	Dreptele $d_1: 2mx+3y-7=0$ şi $d_2: 3x-8y+2=0$ sunt perpendiculare $\Leftrightarrow a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0$ $\Leftrightarrow 2m\cdot 3+3\cdot(-8)=0$ $\Leftrightarrow m=4$	2p 2p 1p
6.	$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(6,-1),\quad A_3(8,3)$	2p

	Ecuaţia dreptei este : $\dfrac{x-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_3-y_1}$ $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+1}{4}$ $\Rightarrow 2x-y-13=0$ este ecuaţia dreptei A_1A_3.	1p 1p 1p
b)	$A_{\Delta OA_1A_2}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\right\| \Rightarrow A_{\Delta OA_1A_2}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\|$ $A_{\Delta OA_1A_2}=\dfrac{1}{2}\cdot 13$	3p 2p
c)	Considerăm punctele $A_n\left(n+5,2n-3\right), A_m\left(m+5,2m-3\right), A_p\left(p+5,2p-3\right), \quad \forall n,m,p\in N^*$ Calculăm $\begin{vmatrix} n+5 & 2n-3 & 1 \\ m+5 & 2m-3 & 1 \\ p+5 & 2p-3 & 1 \end{vmatrix}=0$ folosind proprietăţile determinanţilor şi se obţin punctele $A_n\left(n+5,2n-3\right)$ coliniare $\forall n\in N^*$	1p 4p
2. a)	Din relaţiile lui Viete obţinem $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=3$ şi $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=\dfrac{c}{a}=-13$ Folosim $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3\right)$ şi obţinem $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9+26=35$	2p 1p 2p
b)	Se determină rădăcinile : $x_1=-3, \quad x_2=1, \quad x_3=5$ Care verifică relaţia : $x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}\Leftrightarrow 1=\dfrac{-3+5}{2}$	3p 2p
c)	Ecuaţia $25^x-3\cdot 5^x-13+15\cdot 5^{-x}=0$ se rezolvă folosind notaţia $5^x=t, \quad t>0$. Ecuaţia devine: $t^2-3t-13+\dfrac{15}{t}=0\Leftrightarrow t^3-3t^2-13t+15=0$ care are soluţiile determinate anterior. Revenind la notaţie obţinem soluţia ecuaţiei iniţiale: $x\in\{0,1\}$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2-4)'(x^2+4)-(x^2-4)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$ Funcţia f este derivabilă pe R şi $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2}$ $f'(x)=\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$	2p 2p 1p
b)	Calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=1$ Rezultă $y=1$ este ecuaţia asimptotei orizontale la $+\infty$ la graficul funcţiei f .	3p 2p
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$ $f''(x)=\left(\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}\right)'=\dfrac{(16x)'(x^2+4)^2-(16x)\left((x^2+4)^2\right)'}{(x^2+4)^4}$ $f''(0)=\dfrac{16\cdot 16-0}{4^4}=1$	1p 2p 2p
2. a)	*f* continuă pe $(-\infty,0)$ fiind funcţie elementară *f* continuă pe $(0,+\infty)$ fiind compunere de funcţii elementare *f* continuă în $x_0=1 \Leftrightarrow l_S=l_D=f(0)\Leftrightarrow 1=1=1$ adevărat $\Rightarrow$ *f* continuă pe *R* $\Rightarrow f$ admite primitive pe *R*.	2p 2p 1p
b)	$\int_{-2}^{1} f(x)dx=\int_{-2}^{0}(x^2+x+1)dx+\int_{0}^{1}(e^x+x)dx$ $=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_{-2}^{0}+\left(e^x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big\|_{0}^{1}=e+\dfrac{13}{6}$	2p 3p
c)	$\int_{1}^{e} f(\ln x)dx=\int_{1}^{e}(e^{\ln x}+\ln x)dx=\int_{1}^{e}(x+\ln x)dx=\int_{1}^{e}xdx+\int_{1}^{e}\ln xdx$	2p

	$\int_1^e \ln x dx = \left(x \cdot \ln x - x\right)\Big|_1^e = 1$	2p
	$\int_1^e f(\ln x)dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 34

Prof:Isofache Cătălina Anca,C.N.Al..Cuza Ploieşti

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1+2^2+2^4+2^6+2^8+2^{10}+2^{12}=\frac{\left(2^2\right)^7-1}{2^2-1}$.	3p
	Deci S=5461	2p
2.	f(x)=0 $\Rightarrow x^2+6x-7=0$ cu soluţiile $x_1=1; x_2=-7$ .Deci A(1 ;0) şi B(-7 ;0)	3p
	f(0)= $-7 \Rightarrow$ C(0 ;-7)	2p
3.	Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x+7>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;\infty)$	1p

	lg(x+7)-lg(x-2)=1 $\Leftrightarrow \lg\frac{x+7}{x-2}=1 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x-2}=10$ x=10 $\in (2;\infty)$	3p 1p
4.	P=$\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}$. Nr.cazuri posibile=2012:2=1006 2012:6=335,rest 2.Deci 335 numere divizibile cu 6. c.m.m.m.c.al numerelor 4 si 6=12 2012:12=167,rest 8. 335-167=168 numere divizibile cu 6,nedivizibile cu 4. P=$\frac{168}{1006}=\frac{84}{503}$	1p 1p 1p 1p 1p
5.	Din reciproca teoremei lui Pitagora ,rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A. cosB=$\frac{AB}{BC}$.Deci cosB=$\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$.	2p 3p
6.	$\sin(360^0\text{-}x)=-\sin x,\ \forall x\in R$ Aplicând proprietatea de mai sus pentru x=$1^0;2^0;...;179^0$;$\sin180^0$=0 şi $\sin360^0$=0$\Rightarrow$ S=0	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ detA=0	3p 2p
b)	X=$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$;XA=$\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}$;AX=$\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}$.	3p 2p

	Rezultă că c=0 şi a=d. Deci $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.	
c)	Inmulţim la stânga şi la dreapta ecuaţia $Y^2=A$ cu Y,obţinem YA=AY. $Y=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. $Y^2=\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.Rezultă a=0,deci $Y^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.Fals. Ecuaţia nu are soluţii.	1p 2p 2p
2. a)	$x\circ y=2xy+2x+2y+1=2xy+2x+2y+2-1=$ $=2(xy+x+y+1)-1=2(x+1)(y+1)-1$	2p 3p
b)	$(x\circ y)\circ z=4(x+1)(y+1)(z+1)-1$ $x\circ(y\circ z)=4(x+1)(y+1)(z+1)-1$ $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall\, x;y;z\in \mathbf{R}$.	2p 2p 1p
c)	$x\circ(-1)=-1$ şi $(-1)\circ x=-1$; $\forall x\in R$ $[(-2012)\circ(-2011)\ldots]\circ(-1)\circ[0\circ 1\circ\ldots\circ\ \circ\ldots\circ 2012]=-1<0$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=(x^2-4)'(x^2-1)+(x^2-4)(x^2-1)'$ $f'(x)=2x(2x^2-5)$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-4)(x^2-1)-4}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\infty$.	2p 3p
c)	$f''(x)=12x^2-10$. $f''(x)=0\Rightarrow 12x^2-10=0\Rightarrow x_{1;2}=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$. <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\quad +\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\quad +\infty$</td></tr></table>	1p 1p 2p

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>f''(x)</td><td>+ + + + + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>convexă $f\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ concavă $f\left(+\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ convexă</td></tr>
</table>
Deci, funcţia are 2 puncte de inflexiune.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>2.
a)</td><td>$I_0 = \left(\frac{1}{4}\ln(4x+3)\right)\Big|_0^1 \Rightarrow I_0 = \frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$.

$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1\left(1-\frac{3}{4x+3}\right)dx \Rightarrow I_1 = \left(\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{3}{16}\ln(4x+3)\right)\Big|_0^1 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{4}-\frac{3}{16}\ln\frac{7}{3}$.</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$4I_{n+1}+3I_n = 4\int_0^1\frac{x^{n+1}}{4x+3}dx+3\int_0^1\frac{x^n}{4x+3}dx = \int_0^1\frac{4x^{n+1}+3x^n}{4x+3}dx = \int_0^1\frac{x^n(4x+3)}{4x+3}dx = \int_0^1 x^n dx$

$4I_{n+1}+3I_n = x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$</td><td>1p
1p
1p
2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$I_{n+1}-I_n \le 0 \Rightarrow (I_n)_n$ descrescător.

$4I_{n+1}+3I_n \le 7I_n \Rightarrow I_n \ge \frac{1}{7(n+1)}$; $4I_{n+1}+3I_n \ge 7I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \ge \frac{1}{7(n+1)}$.

Deci $\frac{1}{7n} \le I_n \le \frac{1}{7(n+1)} \,\Big|\cdot n$.

Rezultă $7 \le I_n \le \frac{7n}{n+1}$.Obţinem $\lim_{n\to\infty} nI_n .= \frac{1}{7}$.</td><td>1p
2p
1p
1p</td></tr>
</table>

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 35

Prof: IVĂNESCU-GLIGA LILIANA

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x - x = 3 \Leftrightarrow 0 = 3$	2p
	$-x - x = 3 \Rightarrow x = -1{,}5$	2p
	$S = \{-1{,}5\}$	1p
2.	$\Delta = 25$	1p
	$x_1 = 2,\ x_2 = -3$	2p
	$x_1^3 + x_2^3 = -19$	2p
3.	$A_6^5 - A_6^4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3$	2p
	$A_5^4 - A_5^3 = 5\cdot4\cdot3$	2p
	$E = 6$	1p
4.	$\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$	1p
	Verificarea elementelor din $\mathbb{Z}_5$	2p
	$S = \varnothing \Rightarrow P = 0$	2p
5.	$\overrightarrow{OA} = (-5, 0)$	1p
	$\overrightarrow{AB} = (3, 2)$	2p
	$\overrightarrow{OM} = (-\frac{7}{2}, 1)$	2p
6.	$m(\hat{A}) = 120^\circ$, fie $AD \perp BC$	1p
	În ΔABD: $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin A} \Rightarrow AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	2p

	$S_{ABC} = 9\sqrt{3}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$a_{12}a_{21} = -3$ $a_{11}a_{22} = 2m$ S = – (3 + 2m)	2p 2p 1p
b)	det A = – 1 = – S m = – 2	2p 3p
c)	$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ m = –1 $\Rightarrow$ det A = 1 $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$	1p 1p 3p
2. a)	r = 0 Verificare $f(-2) = 0$	2p 3p
b)	$f = (X^2 - 2)(X^2 - 4)$ $f = (X^2 - 2)(X - 2)(X + 2)$	3p 2p
c)	$f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - 2)(X + 2)$ $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$	1p 4p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = e^{-x}(1-x)$ $f'(0) = 1$	3p 2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot 0 =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$	2p 1p 2p
c)	$f''(x) = e^{-x}(x-2)$ x = 2 un singur punct de inflexiune	3p 2p
2. a)	$F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + e^x + C$ $F_1(0) = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{\ln 2}$ $F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + e^x - \frac{1}{\ln 2}$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big\vert_0^1 =$ $= \frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{3} + e$	3p 2p
c)	Aria $\int_1^2 g(x)\,dx =$ $= \int_1^2 x^2 dx$ Aria$\left(\Gamma_g\right) = \frac{7}{3}$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 36

Prof: IVĂNESCU-GLIGA LILIANA

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n = a_1 + (n-1)r$	1p
	$2012 = 1 + 3(n-1)$	1p
	$n = \dfrac{2014}{3} \notin \mathbb{N}$	2p
	$\Rightarrow 2012 \notin (a_n)_{n\geq 1}$	1p

2.	$1 - \|x\| = 0$ $x \in \{-1, 1\}$	2p 3p
3.	$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ $2^n = 64$ n = 6, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	2p 2p 1p
4.	Formula lui P Cazuri favorabile = 7 Cazuri posibile = 7 P = 1	1p 2p 1p 1p
5.	m = – 1 d: y – 1 = – (x – 1) d: x + y – 2 = 0	2p 2p 1p
6.	$A_{OAO'B} = 2A_{ABO}$ $A_{ABO} = 6$ $A_{OAO'B} = 12$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ det (${}^tA$) = – 3	2p 3p
b)	$2A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_{22} = -1$	2p 3p

c)	$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	2p
	S = 26	1p
2. a)	$a_0 = f(0)$	2p
	$f(0) = -1$	3p
b)	$a_0 + ... + a_{15} = f(1)$	3p
	$f(1) = 1$	2p
c)	$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$	1p
	$f(1) = 1 \neq 0$	2p
	$f(-1) = -1 \neq 0$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$	2p
	$f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f(1) + f'(1) = 1$	3p
b)	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ (gradele sunt egale)	3p
	y = 1 as. orizontală	2p
c)	$f'(x) = 0$ şi monotonia lui f	3p
	$\Rightarrow x = 0$ un singur punct de extrem pentru f	2p

2. a)	f continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$ pt. că sunt funcţii elementare f continuă în 0 $\Leftrightarrow$ $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 1$ f continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$\int_{-1}^{1} x\cdot f(x)dx = \int_{-1}^{0} x\cdot e^{x}dx + \int_{0}^{1} x\cdot(1-x)dx = \frac{12-5e}{6e}$ $\int_{-1}^{0} x\cdot e^{x}dx = \frac{2-e}{e}$ $\int_{0}^{1} x\cdot(1-x)dx = \frac{1}{6}$	3p 1p 1p
c)	$V(C_g) = \pi\int_{0}^{1} g^2(x)dx = \pi\int_{0}^{1}(1-x)^2dx =$ $=\pi\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1$ $V(C_g) = \frac{\pi}{3}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 37

Prof: IVĂNESCU-GLIGA LILIANA

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta = 0$ $\Delta = (m-1)(5m-9)$ $m \in \left\{1, \frac{9}{5}\right\}$	1p 2p 2p
2.	$\frac{-3x-2}{x^2+x+1} > 0$ $x^2+x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$ $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow A = \varnothing$	2p 1p 2p
3.	$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, n = 6, k = 3 $T_4 = 20$	2p 3p
4.	$x^2 = t$, $t^2 - 10t + 9 = 0$ $t_1 = 1$, $t_2 = 9$ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$	1p 2p 2p
5.	(AB): $x + 4y - 9 = 0$ $1 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 4$	2p 3p
6.	$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ$ $BC = \sqrt{39}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$d = \begin{pmatrix} m & m & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ d = 10m – 10	2p 3p
b)	$d \neq 0$ $\Rightarrow m \neq 1$ $m \in \mathbb{R} - \{1\}$	2p 2p 1p
c)	$m = 2 \Rightarrow d = 10$ $d_x = 14$, $d_y = -24$, $d_z = -20$ x = 1,4; y = –2,4; z = –2	1p 3p 1p
2. a)	$2^x = 16$ x = 4	3p 2p
b)	e = 1 $2 \circ 2' = 1$ $2' = 0 \in \mathbb{R}$	2p 1p 2p
c)	$x^2 + x - 2 \leq 0$ $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ $x \in [-2; 1]$ adevarat	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = -3$ $f'(x) = 6x^2 - 3$	3p 2p

b)	$f'(x) = 0$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f cresc. pentru $x \in \left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, f descresc. pentru $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	3p 2p
c)	$f''(x) = 12x$, $f(x) - f'(x) + f''(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ $(x - 3)(2x^2 + 9) = 0$ $x = 3 \in \mathbb{R}$	2p 2p 1p
2. a)	$\int \frac{f(x)}{x^2}dx = \int \ln x dx =$ $= x(\ln x - 1) + C$	2p 3p
b)	$\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $\ln x = t \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 tdt =$ $= \frac{1}{2} > 0$	1p 2p 2p
c)	$\int_2^4 \frac{5f(x^2)}{\ln x}dx = 10\int_2^4 x^4 dx =$ $= 2^6(2^5 - 1)$ adevărat	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 38

Prof: LEFTERIU IOANA.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$ $\quad (1-2\sqrt{3})^2=13-4\sqrt{3}$ $(2+\sqrt{3})^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=20,\ 20\in\mathbb{N}$	3p 2p
2.	$a=\dfrac{8+2}{2}=5$ (orice termen al unei progresii aritmetice,începând cu al doilea,este media aritmetica a termenilor vecini) $r=5-2=3, b=8+3=11$ b-a=11-5=6	2p 2p 1p
3.	$\Rightarrow 2^{x+3}=2^{2x-1}$ Din injectivitatea funcţiei exponenţiale $\Rightarrow x+3=2x-1$ $\Rightarrow x=4$	2p 2p 1p
4.	$\log_3^1=0;\log_3^3=1;\log_3^9=2$ p=$\dfrac{\textit{numărul cazurilor favorabile}}{\textit{numărul cazurilor pozibile}}$; $p=\dfrac{3}{5}$	3p 2p
5.	$x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=4; y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=1\Rightarrow M\left(4,1\right)$ AM: $\dfrac{x-x_A}{x_M-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_M-y_A}\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1$	3p 2p
6.	$\sin 110^\circ=\sin\left(180^\circ-70^\circ\right)=\sin 70^\circ;$ $\cos 110^\circ=\cos\left(180^\circ-70^\circ\right)=-\cos 70^\circ$ $\sin 110^0+\cos 110^0-x=\sin 70^\circ-\cos 70^\circ-x=x-x=0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	C= $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$	2p 2p 1p
b)	Coloanele a doua şi a treia sunt proporţionale cu prima. det C = $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -8 & 12 \end{vmatrix}$ =0	3p 2p
c)	D(x)=xC+I$_3$ = $\begin{pmatrix} 1+2x & -4x & 6x \\ 3x & 1-6x & 8x \\ 4x & -8x & 1+12x \end{pmatrix}$; $D(0) = I_3$.Matricea D(x)este inversabilă,dacă $\exists x' \in \mathbb{R}$, astfel încât $D(x) \cdot D(x') = I_3$ = D(0)$\Rightarrow$ $D(8x \cdot x' + x + x') = D(0)$ $8x \cdot x' + x + x' = 0$; $x' = \frac{-x}{8x+1}$; $x \neq -\frac{1}{8} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{8}\right\}$	1p 2p 2p
2. a)	$x * y = xy - 7x - 7y + 49 + 7$ $= (x-7)(y-7) + 7$	3p 2p
b)	$x * x = (x-7)^2 + 7$; din asociativitate: $x * x * x = (x-7)^3 + 7$ Din $x * x * x = x \Rightarrow (x-7)^3 + 7 = x; (x-7)(x-6)(x-8) = 0; x_1 = 6; x_2 = 7; x_3 = 8$	2p 3p
c)	$x * a = (x-7)(a-7) + 7 = (a-7)(x-7) + 7 = a * x; \forall x \in \mathbb{Z}$ $x * a = a \Rightarrow (a-7)(x-8) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 7 \Rightarrow x * 7 = 7 * x = 7$ Din asociativitate: $E = ((-10) * (-9) * \ldots * 6) * 7 * (8 * \ldots * 10) = 7$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+a}{x^2+4} = 0;$ $y=0$ este ecuaţia asimptotei orizontale la $+\infty$	3p 2p
b)	a=1; $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+4}$; $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)=\frac{1}{2}$ $f'(x)=\frac{-2x^2-2x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$	1p 2p 2p
c)	a=3; $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+4}$ $f'(x)=\frac{-2x^2-6x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$; $-2x^2-6x+8=0$; $x_1=-4$; $x_2=1$; $f(-4)=-\frac{1}{4}$; $f(1)=1$ Din tabel, $A_1\left(-4,-\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim; $A_2(1,1)$ este punct de maxim	1p 1p 1p 2p
2. a)	Funcţia f este continuă pentru $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ (1) În x=0; $\lim_{x\nearrow 0} f(x)=\lim_{x\nearrow 0}\left(x^2-3x+5\right)=5$ $\lim_{x\searrow 0} f(x)=\lim_{x\searrow 0}\left(e^x+x+4\right)=5$; $f(0)=5$ (2) Din (1)şi(2) functia f este continuă pe Ratunci, f admite primitive pe R	2p 2p 1p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-3x+5\right)dx+\int_{o}^{1}\left(e^x+x+4\right)dx$ $=e+\frac{31}{3}$	2p 3p
c)	$\int_0^1 2xf(x^2)dx=\int_0^1 2x\left(e^{x^2}+x^2+4\right)dx=$	2p 3p

	$=e+\frac{7}{2}$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 39

Prof: LEFTERIU IOANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{36}-\sqrt{9}+\sqrt{81}-3\sqrt[3]{64}$ $=0$	2p 3p
2.	$\|3x-2\|\le 4; -\frac{2}{3}\le x\le 2, x\in\mathbb{Z}$ A={0,1,2}	3p 2p
3.	$-2x+1=-2x^2+3x-1$; $2x^2-5x+2=0$ $x_1=\frac{1}{2}; x_2=2$	1p 2p 2p

4.	Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x>0 \\ x-2>0 \end{cases}$; $x\in(2,+\infty)$	1p
	Din proprietăţile logaritmilor: $\log_2^{x(x-2)}=3 \Rightarrow x^2-2x-8=0$; $x_1=-2; x_2=4$;	3p
	$-2\notin(2,\infty) \Rightarrow$ S={4}	1p
5.	$\vec{a}=3(2\vec{i}+3\vec{j})-2(3\vec{i}-2\vec{j})$	2p
	$\vec{a}=13\vec{j}$	3p
6.	$A_{\triangle ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC}}{2}$	2p
	$A_{\triangle ABC}=9$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A+3I_3=O_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	$\begin{pmatrix} a+3 & b & c \\ x & y+3 & z \\ u & v & w+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	$a=-3, b=o, c=0$; $x=0, y=-3, z=0$; $u=0, v=0, w=-3$.	1p
b)	$A^t=\begin{pmatrix} a & x & u \\ b & y & v \\ c & z & w \end{pmatrix}$	1p
	$B=A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-x & c-u \\ x-b & 0 & z-v \\ u-c & v-z & 0 \end{pmatrix}$	2p
		2p

	$\det B=\begin{vmatrix}0 & b-x & c-u\\ x-b & 0 & z-v\\ u-c & v-z & 0\end{vmatrix}=(x-b)(v-z)(c-u)-(x-b)(v-z)(c-u)=0$.	
c)	$a=y=w=0;\ b=c=x=z=u=v=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$a=3,b=-1\Rightarrow\ f=x^4+3x^3-x^2-5x+4$ $c=x^3+5x^2+9x+13$ $r=30$	1p 2p 2p
b)	$x_1=-1,x_2=1$ rădăcini $\Rightarrow\ f(-1)=0;\ f(1)=0$ $f(-1)=(-1)^4+a(-1)^3+b(-1)^2-5(-1)+4=-a+b+10$ $f(1)=(1)^4+a(1)^3+b(1)^2-5(1)+4=a+b$ $\Rightarrow\begin{cases}-a+b+10=0\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=5;\ b=-5$.	1p 2p 2p
c)	$a=3,b=-1\Rightarrow\ f=x^4+3x^4-x^2-5x+4$ Din x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcini, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\Rightarrow$ $P=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)=f(1)=2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow x_0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow x_0}f(x)$	1p 3p

	$\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow -1}\dfrac{x^2+x-6}{x+1}=\infty$ $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow -1}\dfrac{x^2+x-6}{x+1}=-\infty$ $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)\neq\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)\Rightarrow$ f nu are limită în $x=-1$	1p
b)	Ecuaţia asimptotei oblice: $y=mx+n$ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x(x+1)}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6}{x+1}=0$ $m=1;n=0$;ecuaţia asimptotei : $y=x$	1p 2p 1p 1p
c)	$f'(x)=\dfrac{x^2+2x+7}{(x+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{-12}{(x+1)^3}$ $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f=$ funcţie convexă $x\in(-1,\infty)\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f=$ funcţie concavă	1p 2p 1p 1p
2. a)	$\int\limits_0^1\dfrac{f(x)}{e^x}dx=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+25}=$ $=\dfrac{\sqrt{26}}{2}+\dfrac{25}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{26}}{5}$	1p 4p
b)	$g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}=\sqrt{x^2+25}$ $V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)dx=$	1p 2p 2p

	$=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\frac{76\pi}{3}$	
c)	$\int_0^1\sqrt{x^2+25}\,f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+25\right)e^x dx=$ $=\left(x^2+25\right)e^x\Big\vert_0^1-2x\,e^x\Big\vert_0^1+2\,e^x\Big\vert_0^1$ $=26e-27$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 40

Prof:LEFTERIU IOANA.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Din ecuaţia: $t^2-St+p=o$,unde $S=x+y=4$, $p=x\cdot y=-32$,avem $t^2-4t-32=0$; $x_1=-4$; $x_2=8$; $S=\{(-4,8);(8,-4)\}$.	1p 2p 2p
2.	Elementele mulţimii A sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice: $a_1=3, a_2=5, a_3=13, a_4=18,\ldots, a_n=98$,	1p

	$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 5$ $a_n = a_1 + (n-1)r ; 98 = 3 + (n-1)5 \Rightarrow n = 20$	2p 2p
3.	Din proprietăţile logaritmilor: $\log_5^{(2+\sqrt{3})} + \log_5^{(2-\sqrt{3})} = \log_5^{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$ $= \log_5^1 = 0$	2p 3p
4.	$A_n^3 = n(n-1)(n-2) \Rightarrow$ $n^3 - 3n^2 - 4n = 0 ; n_1 = 0; n_2 = -1; n_3 = 4$ $n \in N, n \geq 3 \Rightarrow n = 4$	1p 3p 1p
5.	$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ sunt vectori opuşi,la fel: $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OD} \Rightarrow$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} ; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \vec{0}$	3p 2p
6.	$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$ $S = \sin^2 60^\circ + \cos^2 120^\circ = \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$ (din formula fundamentală)	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A) = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ m-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m + 1$ $2m^2 + 3m + 1 = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}; m_2 = 0$	2p 3p
b)	(S) are soluţie unică dacă $\det(A) \neq 0$ $2m^2 + 3m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = -1 \Rightarrow$ $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; -1\right\}$	2p 2p 1p

c)	$m=1\Rightarrow(S)=\begin{cases}x+y-2z=1\\-x+y+2z=-5\\-y+3z=-1\end{cases}$; $\det(A)=6$	1p
	$d_x=\begin{vmatrix}1&1&-2\\-5&1&2\\-1&-1&3\end{vmatrix}=6$; $d_y=\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&-5&2\\0&-1&3\end{vmatrix}=-12$; $d_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&-5\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-6$	3p
	$x=\dfrac{d_x}{\det(A)}=1$; $y=\dfrac{d_y}{\det(A)}=-2$; $z=\dfrac{d_z}{\det(A)}=-1$; $S=\{1,-2,-1\}$	1p
2. a)	$f \vdots g \Leftrightarrow f(2)=0$	2p
	$f(2)=2m-22$; $m=11$.	3p
b)	$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3+m(\sqrt{3})^2-15(\sqrt{3})-2m=m-12\sqrt{3}$	3p
	$f(\sqrt{3})=0\Rightarrow m=12\sqrt{3}$	2p
c)	$m=1$; $f=x^3+x^2-15x-2$	1p
	Din relaţiile lui *Vie′t`e*: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-15\\x_1x_2x_3=2\end{cases}$	2p
	$S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=31$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f=$ continuă în $x_0=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=f(0)$	2p
	$\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(x^3-5x^2+7x+1+a)=1+a$	
	$\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(xe^x+2x-2e^x)=-2$; $f(0)=-2$	2p

	$1+a=-2 \Rightarrow a=-3$	1p
b)	$a=-3,\ f(x)=\begin{cases} x^3-5x^2+7x-2, x>0 \\ xe^x+2x-2e^x, x\le 0 \end{cases}$ Ecuaţia tangentei în $x=x_0$; $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ $f'(x)=3x^2-10x+7 \Rightarrow f'(2)=-1$ $x+y-2=0$ este ecuţia tangentei.	1p 1p 2p 1p
c)	$f'(x)=3x^2-10x+7$; $\forall x\in(0,\infty)$ $f'(x)=0$; $3x^2-10x+7=0$; $x_1=1$; $x_2=\frac{7}{3}$ Pentru $x\in(0,1]\cup\left[\frac{7}{3},\infty\right)$, $f'\ge 0 \Rightarrow$ f este crescătoare pentru $x\in\left[1,\frac{7}{3}\right]$ $f'\le 0 \Rightarrow$ f este descrescătoare.	2p 2p 1p
2. a)	$m=1 \Rightarrow f_1(x)=3x^2+4x+4$ $\int f_1(x)dx=\int(3x^2+4x+4)dx=x^3+2x^2+4x+C$	2p 2p 1p
b)	$m=0$; $f_0(x)=x^2+3x+4$ $\int_0^1 e^x f_0(x)dx=\int_0^1 e^x(x^2+3x+4)dx=$ $=e^x(x^2+x+3)\Big\vert_0^1=5e-3$	1p 1p 3p
c)	$\int_0^1 f_m(x)dx=\frac{8m^2-m+35}{6}$ $8m^2-m=0$; $m_1=0$; $m_2=\frac{1}{8}$; $m\in\mathbb{R}^* \Rightarrow m=\frac{1}{8}$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 41

*Prof:*LICA ROXANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=2+\sqrt{5}\simeq 4,2$ Pratea intreaga a numarului este 4.	3p 2p
2.	$a_5=a_1+4r$ $a_1+a_1+4r=8 \Rightarrow a_1+2r=4$ $a_3=a_1+2r=4$	1p 2p 2p
3.	$x_1=0$, $x_2=-2$ Solutiile in $\mathbb{R}$ sunt $x\in[-2,0]$ Solutiile intregi $\{-2,-1,0\}$	1p 2p 2p
4.	$x_1+x_2=2m+1$ $x_1x_2=3m$ $2m+1+3m=11$ $m=2$	1p 1p 2p 1p
5.	$\frac{n(n-1)}{2}-3n=-3$ $n^2-7n+6=0$, $n=6$	2p 3p

6.	$7^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2$, deci triunghiul este dreptunghic. Ipotenuza triunghiului are lungimea 7. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egala cu jumatate din ipotenuza, deci R=3,5.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	DetA= $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ $-2-6+1+3+4-1=$ -1	2p 2p 1p
b)	Det A= $-2-3m+1+3+2m-1$ Det A=0 $\Rightarrow -m+1=0 \Rightarrow m=1$	3p 2p
c)	Scazand ecuatiile 3 si 1 obtinem $x=1$ $\begin{cases} y+z=2 \\ y+2z=3 \end{cases}$ $z=1, y=1$	1p 2p 2p
2. a)	Fie $x, y \in \mathbb{R}$ $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3} = xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}-\frac{1}{3} = xy+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{9} = x \circ y$	1p 4p
b)	Fie $x \in \mathbb{R}$. $a \circ x = a \Rightarrow \left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3} = a \Rightarrow \left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-\left(a+\frac{1}{3}\right)=0$ $\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}-1\right)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$	3p 2p
c)	$\alpha \circ \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$	3p 2p

	$\left(-\frac{2012}{3}\right)\circ\left(-\frac{2011}{3}\right)\circ\left(-\frac{2010}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha\circ\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$f'(x)=1-\ln x-x\frac{1}{x}=-\ln x$

$f'(1)=-\ln 1=0$</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f'(e)=-\ln e=-1$

Ecuatia tangentei la grafic in punctul de abscisa α este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

Asadar ecuatia tangentei la graficul functiei este $y-0=-1(x-e)$

adica $x+y-e=0$</td><td>1p

1p

2p

1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$f'(x)=0\Rightarrow-\ln x=0\Rightarrow x=1$

<table>
<tr><td>x</td><td>0   1 ∞</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+   +   +   +   0   -   -   -   -   -</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$ 1 $\searrow$</td></tr>
</table>

Un singur punct de extrem, $A(1,1)$</td><td>2p

2p

1p</td></tr>
<tr><td>2.

a)</td><td>$I_0=\int_0^1\cos x dx=$

$=\sin x\Big|_0^1=\sin 1.$</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$I_1=\int_0^1 x\cos x dx=x\sin x\Big|_0^1-\int_0^1\sin x dx$

$=\sin 1+\cos x\Big|_0^1=\sin 1+\cos 1-1$</td><td>3p

2p</td></tr>
</table>

c)	$x\in[0,1]\Rightarrow\cos x\le 1\Rightarrow$	1p
	$x^{2012}\cos x\le x^{2012}\Rightarrow$	2p
	$\int_0^1 x^{2012}\cos x dx\le\int_0^1 x^{2012}dx=\frac{1}{2013}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 42

Prof: LICA ROXANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lg 100\sqrt{10}=2,5$	3p
	$\{2,5\}=0,5$	2p

2.	$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2012)=0+1+2+...+2011=$ $\frac{2012\cdot 2011}{2}$	3p 2p
3.	$x_1=-1, x_2=-6$ $E=(-1)^3+(-6)^3=-1-216=-217$	3p 2p
4.	C.E. $x^3+1>0\Rightarrow x>-1$ $x^3+1=3^2$ $x^3=8$ $x=2$	1p 2p 2p
5.	$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=$ $\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ=$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	2p 2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\sin\hat{A}}{2}=$ $\frac{18\cdot 18\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{324\cdot 2\sin 60^\circ\cos 60^\circ}{2}=$ $\frac{324\sqrt{3}}{4}=81\sqrt{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$(M(1,1))^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2$ $=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$	3p 2p

b)	$M(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ $Det(M(2,3))=8\Rightarrow (M(2,3))^{-1}=\frac{1}{Det(M(2,3))}(M(2,3))^{*}$ $M(2,3)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&-6&9\\0&4&-6\\0&0&4\end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ $Det(M(a,b))=a^3$ $Det(M(a,b))\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}^*$ $b\in\mathbb{R}$	1p 2p 2p
2. a)	$f(-1)=-1+1-1+1$ $=0$	4p 1p
b)	$f(-1)=0\Rightarrow (X+1)\mid f$ $f=(X+1)(X^2+1)=$ $(X+1)(X+i)(X-i)$	1p 2p 2p
c)	x_i radacina pentru $f\Rightarrow x_i^3+x_i^2+x_i+1=0, \forall i\in\{1,2,3\}$ $(x_i-1)(x_i^3+x_i^2+x_i+1)=0\Rightarrow x_i^4=1\ \forall i\in\{1,2,3\}$ $x_1^4+x_2^4+x_3^4=1+1+1=3$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Asimptota orizontala: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2012}=1\Rightarrow f$ admite asimptota orizontala la ∞ dreapta $y=1$	2p

	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2012}=1\Rightarrow f$ admite asimptota orizontala la $-\infty$ dreapta $y=1$ Functia nu admite asimptote oblice sau verticale.	2p 1p
b)	$f'(x)=\dfrac{2x^3+4024x-2x^3}{\left(x^2+2012\right)^2}=$ $\dfrac{4024x}{\left(x^2+2012\right)^2}$	3p 2p
c)	$f'(1)=\dfrac{4024}{2013^2}$ Ecuatia tangentei la grafic in punctul de abscisa α este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ Asadar ecuatia tangentei devine $y-\dfrac{1}{2013}=\dfrac{4024}{2013^2}(x-1)$	2p 1p 2p
2. a)	$f_2(x)=(x-1)^2\Rightarrow$ $\int_0^1 (x-1)^2 dx=\left.\dfrac{(x-1)^3}{3}\right\|_0^1=$ $\dfrac{1}{3}$	1p 3p 1p
b)	$f_{2012}(x)\geq 0,\forall x\in[0,1]$ $A=\int_0^1 (x-1)^{2012} dx=\left.\dfrac{(x-1)^{2013}}{2013}\right\|_0^1=$ $\dfrac{1}{2013}$	1p 3p 1p
c)	$\int_0^1 x(x-1)^n dx=\int_{-1}^0 (t+1)t^n dt=$ $\int_{-1}^0 t^{n+1}dt+\int_{-1}^0 t^n dt=\left.\dfrac{t^{n+2}}{n+2}\right\|_{-1}^0+\left.\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right\|_{-1}^0=$ $\dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 43

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^2-5x+6=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=2\in\mathbb{Z} \\ x_2=3\in\mathbb{Z}\end{matrix}$ Deci mulțimea de adevăr este: $\{2;3\}$	3p 2p
2.	$a_n=a_1+(n-1)r, n\geq 1$ $a_{10}=a_1+9r$ $a_{10}=131$ și $r=12 \Rightarrow a_1+9\cdot 12=131 \Leftrightarrow a_1=131-108 \Leftrightarrow a_1=32$	1p 2p 2p
3.	$\lg 288=\lg\left(2^5\cdot 3^2\right)=$ $=\lg 2^5+\lg 3^2=$ $=5\lg 2+2\lg 3=5A+2B$	1p 2p 2p
4.	$n-2\geq 0 \Rightarrow n\geq 2, n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{n!}{(n-2)!}=2 \Leftrightarrow \dfrac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!}=2 \Leftrightarrow n(n-1)=2$ $n^2-n-2=0 \Rightarrow n_1=2\in\mathbb{N},\ n_2=-1\notin\mathbb{N}$. Deci $n=2$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=(x_C-x_A)\vec{i}+(y_C-y_A)\vec{j}-2\left[(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}\right]=$	2p

	$=10\vec{i}+\vec{j}-2\left(3\vec{i}-3\vec{j}\right)=4\vec{i}+7\vec{j}$	3p
6.	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, (1)	2p
	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, (2)	2p
	Din relațiile (1) și (2) rezultă $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{cases}2X+3Y=A\\ X+2Y=B \,\vert\cdot(-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2X+3Y=A\\ -2X-4Y=-2B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=B-2Y\\ Y=2B-A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=2A-3B\\ Y=2B-A\end{cases}$	2p
	$X=2A-3B=2\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&-2\\4&-2&4\\-2&4&-2\end{pmatrix}+$ $+\begin{pmatrix}-3&-6&-3\\-6&-3&-6\\-3&-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&-5\\-2&-5&-2\\-5&-2&1\end{pmatrix}$	2p
	$Y=2B-A=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&2\\4&2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3&2&3\\2&3&2\\3&2&-1\end{pmatrix}$	1p
b)	$X+Y=\begin{pmatrix}-5&-2&-5\\-2&-5&-2\\-5&-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&3\\2&3&2\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$	3p
	$A-B=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-1&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}=$	2p

	$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Deci $X+Y=A-B$	
c)	$\det(X+Y)=\begin{vmatrix}-2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=$ $=8\in\mathbf{N}$	3p 2p
2. a)	$x*y=xy-5x-5y+30=(x-5)(y-5)+5,(\forall)x,y\in G$ Legea este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z),(\forall)x,y,z\in G$ $(x*y)*z=(x*y-5)(z-5)+5=[(x-5)(y-5)+5-5](z-5)+5=$ $=(x-5)(y-5)(z-5)+5,(\forall)x,y,z\in G$, (1) $x*(y*z)=(x-5)(y*z-5)+5=(x-5)[(y-5)(-5)+5-5]+5=$ $=(x-5)(y-5)(z-5)+5,(\forall)x,y,z\in G$, (2) Din relațiile (1) și (2), rezultă legea este asociativă.	1p 2p 2p
b)	Legea are element neutru dacă există $e\in G$ astfel încât $x*e=e*x=x,(\forall)x\in G$. $x*e=x,(\forall)x\in G\Leftrightarrow(x-5)(e-5)+5=x,(\forall)x\in G\Leftrightarrow(x-5)(e-6)=0,(\forall)x\in G\Rightarrow$ $\Rightarrow e=6\in(5,\infty),(\forall)x\in G$. Oricare ar fi $x\in G$ există $x'\in G$ astfel încât $x*x'=x'*x=6$. $x*x'=6,(\forall)x\in G\Leftrightarrow(x-5)(x'-5)+5=6,(\forall)x\in G\Leftrightarrow x'-5=\frac{1}{x-5},(\forall)x\in G\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x'=5+\frac{1}{x-5}>5,(\forall)x\in(5,\infty)$. Deci orice element din mulțimea G este inversabil.	3p 2p
c)	Din asociativitatea legii, dacă $x=y=z$, atunci $x*x*x=6\Leftrightarrow(x-5)^3+5=6\Leftrightarrow$	2p 3p

<table>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow (x-5)^3 = 1 \Rightarrow x-5=1 \Rightarrow x=6 \in (5,\infty)$</td><td></td></tr>
</table>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow$

$D = \mathbb{R} - \{1\}$</td><td>2p

3p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$f'(x) = \frac{1-x-1-x}{(1-x)^2} = -\frac{2x}{(1-x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = -2 \cdot \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{-2(1-x)(1-x+2)}{(1-x)^4} = \frac{2(x-3)}{(1-x)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow x = 3$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+ + + + + +</td><td>0</td><td>- - - - - - -</td><td>|</td><td colspan="3">- - - - - - - - - - - -</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td colspan="3">- - - - - - - - - - - - - - -</td><td>|</td><td>+ + + + + +</td><td>0</td><td>- - - - - - - - - -</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>1
(M)</td><td>↘</td><td>|</td><td>↘</td><td>-2
(i)</td><td>↘</td></tr>
</table>

$x = 0$ punct de maxim

$x = 3$ punct de inflexiune
</td><td>1p

1p

1p

2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $M(x_0, y_0)$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f(2) = -3$

$f'(2) = -\frac{4}{1} = -4$</td><td>1p

1p

1p</td></tr>
</table>

	$y+3=-4(x-2)\Leftrightarrow 4x+y-5=0$	2p
2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=$ $=\frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+1)\Big\vert_0^1=$ $=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}$	2p 2p 1p
b)	$\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2-x}{x^2+1}\le 0,(\forall)x\in[0,1]$, atunci $I_2-I_1=\int_0^1\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)dx\le 0\Leftrightarrow I_2\le I_1$	2p 3p
c)	$I_{n+2}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx=$ $=\int_0^1 x^n dx=$ $=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 44

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$\sqrt{\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}}+\sqrt{\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}}$ $=1+1=2$ Am folosit formula radicalilor dubli $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C^2=A^2-B$.	3p 2p
2	$\lvert 2x-1\rvert=x+2\Leftrightarrow 2x-1=\pm(x+2)$ Dacă $2x-1=x+2\Leftrightarrow x=3$. Dacă $2x-1=-x-2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$	1p 2p 2p
3	$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1}=2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}=2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^{-x}\cdot\frac{3}{5}=2$ Notăm $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=y$ și ecuația devine $y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0\Rightarrow \begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=\frac{1}{3}\end{matrix}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=3\Rightarrow x\log_3\frac{3}{5}=1\Rightarrow x_1=\frac{1}{1+\log_3 5}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow x\log_3\frac{3}{5}=-1\Rightarrow x_2=-\frac{1}{1+\log_3 5}$ $x_1+x_2=0$	1p 1p 2p 1p
4	$C_x^y=C_y^x\Rightarrow\begin{cases}x\ge y\\ y\ge x\end{cases}\Rightarrow x=y$; $(x+y)!<1000\Rightarrow(2x)!<1000$ $x=0\Rightarrow 0!=1<1000$ este soluție. $x=1\Rightarrow 2!=2<1000$ este soluție. $x=2\Rightarrow 4!=24<1000$ este soluție. $x=3\Rightarrow 6!=720<1000$ este soluție. $x=4\Rightarrow 8!=8\cdot7\cdot720>1000$ nu este soluție. Deci $M=\{(1,1),(2,2),(3,3),(0,0)\}\Rightarrow cardM=4$.	2p 3p
5	$P=AB+BC+CA$; $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$	2p

	$AB=\sqrt{37}$, $BC=\sqrt{61}$, $CA=4$. $P=\sqrt{37}+\sqrt{61}+4$	3p
6	$E=\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\dfrac{\cos^6 x\left(tg^6 x+1\right)}{\cos^4 x\left(tg^4 x+1\right)}=\cos^2 x\cdot\dfrac{1+tg^6 x}{1+tg^4 x}=\dfrac{1}{1+tg^2 x}\cdot\dfrac{1+tg^6 x}{1+tg^4 x}$ $E=\dfrac{1}{1+4}\cdot\dfrac{1+64}{1+16}=\dfrac{65}{5\cdot 17}=\dfrac{13}{17}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}2x^2 & 1-x^3 & -2x-a\\ -2x^2 & x^3 & 2x+a\\ 1 & -1 & x-2\end{vmatrix}\overset{l1+l2}{=}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -2x^2 & x^3 & 2x+a\\ 1 & -1 & x-2\end{vmatrix}=$ $=-\begin{vmatrix}-2x^2 & 2x+a\\ 1 & x-2\end{vmatrix}=-\left(-2x^3+4x^2-2x-a\right)=$ $=2x^3-4x^2+2x+a$	2p 2p 1p
b)	$a=0\Rightarrow 2x^3-4x^2+2x=0\Leftrightarrow 2x\left(x^2-2x+1\right)=0\Rightarrow x_1=0$ și $x_2=x_3=1$	3p 2p
c)	Fie $f(x)=2x^3-4x^2+2x+a$. $x=\alpha$ rădăcină dublă $\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)=0\\ f'(\alpha)=0\\ f''(\alpha)\neq 0\end{cases}$ $f'(x)=6x^2-8x+2$ $f'(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\left(3\alpha^2-4\alpha+1\right)=0\Rightarrow\alpha_1=1;\alpha_2=\dfrac{1}{3}$ $\alpha_1=1\Rightarrow a_1=0$ $\alpha_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a_2=-\dfrac{8}{27}$ $S=a_1+a_2=-\dfrac{8}{27}$	1p 1p 1p 1p 1p
2.	Se calculează elementele neutre ale celor două legi de compoziție.	

a)	$x*e=x,(\forall)x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+e+3=x,(\forall)x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow e=-3\in\mathbb{Z},\ (\forall)x\in\mathbb{Z}$. $x\circ y=xy+3x+3y+6=(x+3)(y+3)-3$ $x\circ e'=x,(\forall)x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x+3)(e'+3)-3=x,(\forall)x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x+3)(e'+2)=0,(\forall)x\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow e'=-2\in\mathbb{Z},\ (\forall)x\in\mathbb{Z}$. Din $x\circ y=(x+3)(y+3)-3=(y+3)(x+3)-3=y\circ x,(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$, rezultă inelul $(\mathbb{Z},*,\cdot)$ este inel comutativ. Fie $x\neq-3, y\neq-3$. Să arătăm că $x\circ y\neq-3$. Presupunem $x\circ y=-3\Rightarrow(x+3)(y+3)-3=-3\Rightarrow(x+3)(y+3)=0\Rightarrow x=-3$ sau $y=-3$, ceea ce contrazice ipoteza, deci $x\circ y\neq-3$, adică inelul $(\mathbb{Z},*,\cdot)$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero.	1p 1p 1p 2p
b)	Fie $x,x'\in\mathbb{Z}$. Să arătăm că x' este inversul lui x. $x\circ x'=-2\Leftrightarrow(x+3)(x'+3)-3=-2\Leftrightarrow(x+3)(x'+3)=1\Leftrightarrow x'+3=\dfrac{1}{x+3}\Leftrightarrow$ $x'=-3+\dfrac{1}{x+3}\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x+3\in\{-1,1\}$. Dacă $x+3=-1\Rightarrow x=-4$. Dacă $x+3=1\Rightarrow x=-2$. Deci, elementele inversabile sunt $x=-4$ și $x=-2$.	3p 2p
c)	$(\mathbb{Z},*,\cdot)$ este corp dacă orice element $x\in\mathbb{Z}$, $x\neq-3$ este inversabil în raport cu legea „$\circ$". În acest caz, conform punctului b), numai 2 elemente sunt inversabile. Deci $(\mathbb{Z},*,\cdot)$ nu este corp.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=2x-7$ $f'(x)=-5\Leftrightarrow 2x-7=-5\Leftrightarrow x=1$	3p 2p

b)	$y=-5x+3 \Rightarrow m=-5$ Coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției în $x=\alpha$ este $f'(\alpha)$. Tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y=-5x+3$ dacă $f'(\alpha)=-5 \Leftrightarrow \alpha=1$ $f(1)=2+3-7=-2 \Rightarrow T(1,-2)$ este punctul de tangență.	1p 1p 1p 2p
c)	$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ $y+2=-5(x-1) \Leftrightarrow 5x+y-3=0$	2p 3p
2. a)	$I_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big\|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ $I_1=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big\|_0^1=\sqrt{2}-1$	2p 3p
b)	$0 \le x^n \le 1$ $0 \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in [0,1]$ $0 \le I_n \le \frac{\pi}{4}$	1p 2p 2p
c)	$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 x^{n-1}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx=x^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^2}\Big\|_0^1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=$ $=\sqrt{2}-(n-1)\int_0^1 \frac{x^{n-2}\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx=$ $=\sqrt{2}-(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \Rightarrow nI_n=\sqrt{2}-(n-1)I_{n-2}$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 45

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$[x-2]=3 \Leftrightarrow 3\le x-2<4 \Leftrightarrow$	3p
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 3 \\ x-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x<6 \end{cases} \Rightarrow x\in[5,6)$	2p
2.	$a=1>0 \Rightarrow \operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a},\infty\right)$	2p
	$\Delta=b^2-4ac=1-8=-7 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-7}{4}=\frac{7}{4}$	2p
	$\operatorname{Im} f=\left[\frac{7}{4},\infty\right)$	1p
3.	Folosim formula $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$	1p
	$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{63} 64=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_2 64}{\log_2 63}=$	2p
	$=\log_2 64=6$	2p
4.	$k\cdot k!=[(k+1)-1]\cdot k!=(k+1)\cdot k!-k!=(k+1)!-k!$	1p

	Calculăm fiecare termen din sumă și obținem: $1\cdot 1!=2!-1!$ $2\cdot 2!=3!-2!$ $3\cdot 3!=4!-3!$ .... $10\cdot 10!=11!-10!$ $\Rightarrow 1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+9\cdot 9!+10\cdot 10!=11!-1$	3p 1p
5.	$\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}^{\,2}=$ $=2\cdot 4+3(-4)-2\cdot 9=8-12-18=-22$	2p 3p
6.	Folosim formula $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=$ $=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	2p 3p
b)	$A^{3p}=\left(A^3\right)^p=I_3^p=I_3$ $A^{3p+1}=A^{3p}\cdot A=I_3\cdot A=A$ $A^{3p+2}=A^{3p}\cdot A^2=I_3\cdot A^2=A^2$	2p 1p 1p

	Deci $A^n = \begin{cases} I_3, & n=3p \\ A, & n=3p+1 \\ A^2, & n=3p+2 \end{cases}$, $p \in \mathbb{N}^*$.	1p
c)	$2012 = 3 \cdot 670 + 2$	1p
	$A^{2012} = A^{3\cdot 670+2} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	Suma elementelor matricei A^{2012} este 1+1+1=3	2p
2. a)	$x * y = x^{\ln y} = e^{\ln x^{\ln y}} =$	1p
	$= e^{\ln y \ln x} = e^{\ln x \ln y} = e^{\ln y^{\ln x}} =$	3p
	$= y^{\ln x} = y * x, \forall x, y \in (0,\infty) \Rightarrow$ "*" este comutativă.	1p
b)	Legea "*" admite element neutru $\Leftrightarrow (\exists) E \in (0,\infty)$ astfel încât $x * E = E * x = x, (\forall) x \in (0,\infty)$. $x * E = x, (\forall) x \in (0,\infty) \Leftrightarrow x^{\ln E} = x, (\forall) x \in (0,\infty) \Leftrightarrow \ln E = 1, (\forall) x \in (0,\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow E = e \in (0,\infty), (\forall) x \in (0,\infty)$ Deci *e* (numărul „e") este elementul neutru al legii.	3p
	Să arătăm că $(\forall) x \in (0,\infty), (\exists) x' \in (0,\infty)$ *astfel incat* $x * x' = x' * x = e$ $x * x' = e, (\forall) x \in (0,\infty) \Leftrightarrow x^{\ln x'} = e, (\forall) x \in (0,\infty) \Leftrightarrow \ln x' \ln x = 1, (\forall) x \in (0,\infty) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x}, (x \neq 1) \Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in (0,\infty), (\forall) x \in (0,\infty)$ deci, orice element din G este simetrizabil în raport cu această lege.	2p
c)	Simetricul numărului e în raport cu legea „*" este $e' = e^{\frac{1}{\ln e}} = e^{\frac{1}{1}} = e$.	2p
	Simetricul numărului $\frac{1}{e}$ în raport cu legea „*" este $\left(\frac{1}{e}\right)' = e^{\frac{1}{\ln \frac{1}{e}}} = e^{\frac{1}{\ln e^{-1}}} = e^{\frac{1}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2-2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}}$	3p
	$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-2x=0\Rightarrow \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{3}{2}\end{matrix}$	2p
b)	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}{x}=1$	2p
	$n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)\overset{-\infty+\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}=$	1p
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=-\dfrac{1}{3}$	1p
	Deci $y=x-\dfrac{1}{3}$.	1p
c)	Pentru $m=1$ și $n=-\dfrac{1}{3}$	1p
	$\dfrac{m^2}{n^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=9$	1p
	$(m-n)^2=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$	1p
	$\dfrac{m^2}{n^2}+(m-n)^2=9+\dfrac{16}{9}=\dfrac{81+16}{9}=\dfrac{97}{9}$	2p
2. a)	Pentru $x\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right)$, $f(x)=g(x)\Leftrightarrow -\sqrt{x}=\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right)$	2p
	Pentru $x\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$, $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}=2x-1\Rightarrow 4x^2-5x+1=0\Rightarrow \begin{matrix} x=1\in\left[\frac{1}{4},1\right] \\ x=\frac{1}{4}\in\left[\frac{1}{4},1\right]\end{matrix}$	2p

	Soluția $S=\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$.	1p
b)	$\sqrt{x}\geq -\sqrt{x}$, $(\forall)x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$	1p
	Pentru $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 2x-1<0\Rightarrow \sqrt{x}\geq 2x-1,(\forall)x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$	1p
	Pentru $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\Rightarrow \sqrt{x}\geq 2x-1\Rightarrow x\geq 4x^2-4x+1\Rightarrow 4x^2-5x+1\leq 0\Rightarrow$ $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]\bigcap\left[\frac{1}{2},1\right]=\left[\frac{1}{2},1\right]$	1p
	Deci pentru $x\in[0,1]\Rightarrow f(x)\geq g(x)$, funcțiile f și g sunt funcții continue. $Aria\left(\Gamma_{f,g}\right)=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)dx+\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\sqrt{x}-2x+1\right)dx=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big\|_{\frac{1}{4}}^1-$ $-x^2\Big\|_{\frac{1}{4}}^1+x\Big\|_{\frac{1}{4}}^1=\frac{4}{3}x\sqrt{x}\Big\|_0^{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\|_{\frac{1}{4}}^1-1+\frac{1}{16}+1-\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=$ $=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}-\frac{3}{16}=\frac{8+32-4-9}{48}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$	2p
c)	$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x\right)dx=\int_0^{\pi}\left[\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sin x+\sqrt{x}\cdot(\sin x)'\right]dx=$	2p
	$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{x}\sin x\right)'dx=$	1p
	$=\sqrt{x}\sin x\Big\|_0^{\pi}=\sqrt{\pi}\sin\pi-0=0$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 46

Prof: Viorica Lungana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Scriem relațiile lui Viéte pentru ecuația $x^2+(m+2)x+4=0$ $x_1+x_2=-m-2$; $x_1x_2=4$. $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1x_2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=m^2+4m+4-4=$ $=m^2+4m$	3p
	Dar $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=0 \Leftrightarrow m^2+4m=0 \Rightarrow \begin{matrix} m=0 \\ m=-4 \end{matrix} \Rightarrow m\in\{-4,0\}$	2p
2.	Fie $x_1,x_2\in\left[\sqrt{5},\infty\right)$ cu $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$; $x_1\ge\sqrt{5}\Rightarrow x_1^2\ge 5$, analog $x_2^2\ge 5$.	1p
	$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2^2+5}{2x_2}-\frac{x_1^2+5}{2x_1}=\frac{x_1x_2^2+5x_1-x_1^2x_2-5x_2}{2x_1x_2}=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)-5(x_2-x_1)}{2x_1x_2}=$	2p
	$=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-5)}{2x_1x_2}\ge 0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left[\sqrt{5},\infty\right)$, deoarece din $x_1x_2\ge 5\Rightarrow x_1x_2-5\ge 0$.	2p
3.	$cardA=10=7+3$	1p
	$cardB=7=4+3$	2p
	$card(A\cup B)=7+3+4=14$ Sau $card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)=10+7-3=14$	2p
4.	$x^2-3x+5>0$, deoarece $\Delta=9-20=-11<0\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.	2p
	$\log_3(x^2-3x+5)=1\Leftrightarrow x^2-3x+5=3\Leftrightarrow$	3p

	$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1\in\mathbb{R} \\ x_2=2\in\mathbb{R} \end{matrix}.$	
5.	$\sin 6x=\sin 3x \Leftrightarrow \sin 6x-\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{9x}{2}=0 \Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2}=0$ sau $\cos\frac{9x}{2}=0$ $\sin\frac{3x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=k\pi \Leftrightarrow x_k=\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ Pentru $k=0 \Rightarrow x_0=0\in[0,\pi]$. Pentru $k=1 \Rightarrow x_1=\frac{2\pi}{3}\in[0,\pi]$. Pentru $k=2 \Rightarrow x_2=\frac{4\pi}{3}\notin[0,\pi]$. $\cos\frac{9x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{9x}{2}=\frac{(2k+1)\pi}{2} \Leftrightarrow x_k'=\frac{(2k+1)\pi}{9}, k\in\mathbb{Z}$. Pentru $k=0 \Rightarrow x_0'=\frac{\pi}{9}\in[0,\pi]$. Pentru $k=1 \Rightarrow x_1'=\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$. Pentru $k=2 \Rightarrow x_2'=\frac{5\pi}{9}\in[0,\pi]$. Pentru $k=3 \Rightarrow x_3'=\frac{7\pi}{9}\in[0,\pi]$. Pentru $k=4 \Rightarrow x_4'=\pi\in[0,\pi]$. Deci soluția ecuației este $S=\left\{0,\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{9},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{9},\pi\right\}$.	2p 3p
6.	$aria=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$ $=-1+2+2+1=4 \Rightarrow aria=\frac{1}{2}\cdot 4=2$	2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $3A = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $f(A) = A^2 - 3A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -12 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 4 & 7 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	2p 1p 2p
b)	$1 \le rangA \le 3$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+8+1-8 = 2 \ne 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow rangA = 3$	3p 2p
c)	$\det f(A) = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 9 \\ 4 & 7 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$ $= -84 - 16 + 63 + 96 = 59$	2p 3p
2. a)	$x\circ y = \frac{xy}{4} - 2x - 2y + 24 = \frac{1}{4}(xy - 8x - 8y + 96) = \frac{1}{4}(x-8)(y-8) + 8, (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$ $x\circ y = \frac{1}{4}(x-8)(y-8) + 8 = \frac{1}{4}(y-8)(x-8) + 8 = y\circ x, (\forall) x, y \in \mathbb{Q}$, Deci legea este comutativă.	1p 3p 1p
b)	$(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z), (\forall) x, y, z \in \mathbb{Q}$ $(x\circ y)\circ z = \frac{1}{4}(x\circ y - 8)(z-8) + 8 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(x-8)(y-8) + 8 - 8\right](z-8) + 8 =$ $= \frac{1}{16}(x-8)(y-8)(z-8) + 8, (\forall) x, y, z \in \mathbb{Q}$, (1)	1p 2p

<table>
<tr><td></td><td>$x \circ (y \circ z) = \frac{1}{4}(x-8)(y \circ z - 8) + 8 = \frac{1}{4}(x-8)\left[\frac{1}{4}(y-8)(z-8)+8-8\right]+8 =$

$= \frac{1}{16}(x-8)(y-8)(z-8)+8, (\forall)x, y, z \in \mathbb{Q}$, (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea este asociativă.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Din asociativitatea legii, pentru $x = y = z \Rightarrow x \circ x \circ x = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{16}(x-8)^3 + 8 = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-8)^3 = 64 \Rightarrow x - 8 = 4 \Rightarrow x = 12$</td><td>2p

3p</td></tr>
</table>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>Fie $x \in [-1,1]$. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$

Notăm $x^2 = y$ și obținem $f'(y) = 5y^2 - 3y + 1 = 5\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20} \Rightarrow$

$f'(x) = 5\left(x^2 - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[-1,1]$.</td><td>2p

2p

1p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td><table><tr><td>x</td><td>- 1   1</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+ + + + + + + + + +</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1 $\nearrow$ 3</td></tr></table>
Puncte de extrem ale funcției sunt: $x = -1$ și $x = 1$.</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$f(-1) = 1$

$f(1) = 3$

$f(1) - f(-1) = 3 - 1 = 2$</td><td>1p

1p

3p</td></tr>
</table>

2. a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx$	2p
	$x\Big\vert_0^1=1$	3p
b)	$\frac{x^2+1}{x+1}\le\frac{x+1}{x+1},\forall x\in[0,1];$	2p
	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}dx\le\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx,\forall x\in[0,1];$	2p
	$I_2\le I_1$	1p
c)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+1}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{x^n+1}{x+1}dx=$	2p
	$=\int_0^1 \frac{x^n(x+1)+2}{x+1}dx=$	1p
	$\int_0^1 x^n dx+\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx=$	1p
	$\frac{1}{n+1}+2\ln 2$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 47

Prof: Marcu Ştefan Florin

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\lvert 5x-1\rvert < 4 \Leftrightarrow -4 < 5x-1 < 4 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x < 1$ $x=0$ şi numărul de elemente este egal cu 1 .	3p 2p
2.	$a_n = a_1 + (n-1)r$ $a_{2012} = a_1 + 2011r$; r=3 $a_{2012} = -5 + 2011 \cdot 3 = 6028$	1p 2p 2p
3.	Punerea condiţiilor de existenţă a logaritmilor : $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 3x+3>0 \end{cases}$ $5x-1=3x+3$ $x=2$ este soluţia ecuaţiei .	1p 2p 2p
4.	$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ $C_{2012}^3 = C_{2011}^3 + C_{2011}^2 \Rightarrow C_{2012}^3 - C_{2011}^3 - C_{2011}^2 = 0$	2p 3p
5.	$A(3,5) \in d \Leftrightarrow x=3, y=5$	2p 3p

	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + a = 0 \Rightarrow a = 1$	
6.	$\sin(90^\circ - x) = \cos x$ $\sin 85^\circ = \cos 5^\circ$ $\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ = \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ = 1$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = A$	2p 2p 1p
b)	$A + xI_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+x & -1 \\ 2 & -1+x \end{pmatrix}$ $\det(A + xI_2) = x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$	3p 2p
c)	$A^n = A (\forall) n \in N^*$ $A + A^2 + ... + A^{2012} = A + A + ... + A = 2012 \cdot A$ $2012 \cdot A = \begin{pmatrix} 4024 & -2012 \\ 4024 & -2012 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$(x-4)(y-4) + 4 =$ $= xy - 4x - 4y + 16 + 4 =$ $= xy - 4x - 4y + 20 = x \circ y$	1p 3p 1p
b)	$\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2012-ori} = (x-4)^{2012} + 4$	3p 2p

	$(x-4)^{2012}+4=5 \Rightarrow (x-4)^{2012}=1 \Rightarrow x=3, x=5$	
c)	Se observă că : $x \circ 4 = 4, (\forall) x \in R$ Folosind asociativitatea avem : $E=[(-2012)\circ(-2011)\circ ...]\circ 4 \circ [... \circ 2011 \circ 2012]$ Deci E=4	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f^{'}(1)$ $f^{'}(x)=2012x^{2011}-2012$ $f^{'}(1)=0$	2p 2p 1p
b)	$f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow 2012x^{2011}-2012=0$ $2012(x^{2011}-1)=0$ $x^{2011}=1$ x=1 este unica soluţie	1p 1p 1p 2p
c)	f este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ şi strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ Deci : $f(x)\geq f(1), (\forall) x \in R$ Dar $f(1)=-2010$ Obţinem : $x^{2012}-2012x+2011 \geq 0, (\forall) x \in R$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$\int (x^2+1)\cdot f(x)dx = \int (x^2+5x+1)dx =$ $= \int x^2 dx + \int 5x dx + \int dx =$	2p 2p

	$=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x+C$	1p
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2+5x+1}{x^2+1}dx=$ $=\int_0^1 (1+\frac{5x}{x^2+1})dx=$ $=\int_0^1 dx+5\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx=$ $=1+\frac{5}{2}\ln 2$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^1 e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=e^{f(1)}-e^{f(0)}$ $e^{f(1)}=e^{\frac{7}{2}}$, $e^{f(0)}=e$ $\int_0^1 e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=\sqrt{e^7}-e=e^3\sqrt{e}-e$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 48

Prof:Marcu Ştefan Florin

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^2-16=0 \Rightarrow x_1=4, x_2=-4 \Rightarrow x\in[-4,4]\cap Z$ $x\in\{-4,-3,\dots,3,4\}$	3p 2p
2.	$f(1)+f(2)+\dots+f(2012)=(2\bullet1+1)+(2\bullet2+1)+\dots+(2\bullet2012+1)=$ $=2\bullet(1+2+\dots+2012)+2012=$ $=2012\bullet2014$	1p 2p 2p
3.	$2^{2x+4}=4^{3x-1} \Leftrightarrow 2^{2x+4}=2^{6x-2}$ $2x+4=6x-2$ $x=\frac{3}{2}$	1p 2p 2p
4.	Sunt 5 cazuri posibile , din care avem 2 cazuri favorabile Deci $P=\frac{2}{5}$	2p 3p
5.	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-2)^2+(a-3)^2}$ $\lvert a-3\rvert=1 \Rightarrow a=4$ sau $a=2$ $S=\hat{0}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}$	2p 3p
6.	$A[ABC]=\frac{AB\bullet AC\bullet\sin(\measuredangle BAC)}{2}$	2p

	$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1p
	$A[ABC] = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 4\sqrt{2}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Punctele sunt : $A_1(2,3)$ respectiv $A_2(4,5)$	2p
	Ecuaţia dreptei A_1A_2 este : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$	2p
	$x - y + 1 = 0$	1p
b)	Avem $A_3(6,7)$, iar condiţia de coliniaritate este : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$	3p
	Verificarea condiţiei	2p
c)	Avem $A_n(2n, 2n+1)$ respectiv $A_{n+1}(2n+2, 2n+3)$	1p
	$A[OA_nA_{n+1}] = \dfrac{1}{2} \cdot \lvert\Delta\rvert$	2p
	$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n & 2n+1 & 1 \\ 2n+2 & 2n+3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -2 \Rightarrow$ Aria=1	2p
2. a)	$S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} =$	1p
	$= (\hat{1} + \hat{6}) + (\hat{2} + \hat{5}) + (\hat{3} + \hat{4})$	3p

	$S=\hat{0}$	1p
b)	Elementele inversabile sunt : $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}$ Produsul lor este egal cu $\hat{6}$	3p 2p
c)	$\begin{cases} x+\hat{2}y=\hat{3} \\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{3}x+\hat{6}y=\hat{2} \\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{0} \end{cases}$ $\hat{2}y=\hat{2} \Rightarrow y=\hat{1}$ $x=\hat{1}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f^{'}(0)$ $f^{'}(x)=1+e^{x}$ $f^{'}(0)=2$	2p 2p 1p
b)	$f^{'}(x)=1+e^{x}$ $1+e^{x}>0$ $f^{'}(x)>0$ f este strict crescătoare pe R .	1p 1p 1p 2p

c)	Aplic Teorema lui Lagrange pe intervalul [2011,2012] $(\exists)c\in(2011,2012)$ cu $f(2012)-f(2011)=f^{'}(c)$ $f^{'}(c)=e^{2012}-e^{2011}+1$ Unicitatea lui c este demonstrată prin faptul că : $f^{''}(x)=e^{x}>0\Rightarrow f^{'}$ este strict crescătoare pe R	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_2=\int_0^1\frac{x^2-1}{x+1}dx$ $I_2=\int_0^1(x-1)dx$ $I_2=-\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
b)	Arătăm că : $I_n>I_{n+1},(\forall)n\in N$ $I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}-1}{x+1}dx$ $x\in(0,1)\Rightarrow x^n>x^{n+1}$ Dar , atunci : $\frac{x^n-1}{x+1}>\frac{x^{n+1}-1}{x+1}$, de unde prin integrare de la 0 la 1 , se obţine cerinţa	1p 1p 1p 2p
c)	$I_{n+2}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}-x^n}{x+1}dx=$ $=\int_0^1\frac{x^n\bullet(x^2-1)}{x+1}dx=$ $=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)dx=-\frac{1}{(n+1)(n+2)},(\forall)n\in N$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 49

Prof: Marcu Ştefan Florin

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1 = 2, a_n = 222, r = 10$ Aflăm n=23 , aplicând formula : $a_n = a_1 + (n-1)r$ Atunci $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{23} = 2576$	3p 2p
2.	$x^2 - 9 \geq 0$ $x^2 - 9 = 16$ $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 sau x = -5$	1p 2p 2p

3.	$A(m,5)\in G_f \Rightarrow f(m)=5$ $f(m)=2m^2-3m+5$ $\Rightarrow 2m^2-3m=0 \Rightarrow m=0$ sau $m=\frac{3}{2}$	1p 2p 2p
4.	Numărul numerelor este A_4^3 $A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=24$	2p 3p
5.	Dacă notăm cu n,n+1,n+2 lungimile laturilor , atunci din Teorema lui Pitagora , avem : $(n+2)^2=n^2+(n+1)^2$ $\Rightarrow n^2-2n-3=0 \Rightarrow n=3$. Deci lungimile laturilor sunt 3,4,5 .	2p 3p
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x, \cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin 155^\circ=\sin 25^\circ, \cos 155^\circ=-\cos 25^\circ$ $\sin 25^\circ+\cos 25^\circ-\sin 155^\circ+\cos 155^\circ=0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Înlocuim x=1 , y=2 , z=3 în ultima ecuaţie a sistemului $1-3\cdot 2+m\cdot 3=4$ m=3	2p 2p 1p
b)	Calculăm determinantul matricei sistemului : $d=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\1&-3&m\end{vmatrix}=-5m-10$ $d\neq 0 \Rightarrow m\neq -2$	3p 2p
c)	Pentru m=-2 , sistemul devine : $\begin{cases}x+2y+3z=14\\2x-y+z=3\\x-3y-2z=4\end{cases}$	1p

	Dacă scădem din ecuaţia (2) , ecuaţia (1) $\Rightarrow x-3y-2z=-11$ Se obţine o contradicţie cu ecuaţia (3)	2p 2p
2. a)	f este divizibil cu X-1 $\Rightarrow f(1)=0$ $f(1)=2+a$ $2+a=0 \Rightarrow a=-2$	1p 3p 1p
b)	Pentru a=-2 $\Rightarrow f=X^3-2X^2+1=(X-1)(X^2-X-1)$ Rădăcinile reale ale lui f sunt : $x_1=1, x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	3p 2p
c)	Din relaţiile lui Viete avem: $x_1+x_2+x_3=-a$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ este un număr natural pătrat perfect , $(\forall)a\in Z$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, deci dreapta x=0 este asimptotă verticală $\underbrace{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci nu există asimptote orizontale Aflăm dacă există asimptote oblice . Avem : $m=\underbrace{\lim}_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, dar $n=\underbrace{\lim}_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=+\infty$ deci nu există asimptote oblice .	2p 2p 1p
b)	$f^{'}(x)=1+\frac{1}{x}$	1p

	$x>0 \Rightarrow 1+\frac{1}{x}>0$ $\Rightarrow f'(x)>0$ Deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.	1p 1p 2p
c)	Aplic Teorema lui Lagrange pe intervalul [a,b] $\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, $c\in(a,b)$ $f'(c)=1+\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ $f'(c)=1+\frac{1}{c}$ $\Rightarrow c=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$. Dar a<c<b de unde rezultă inegalitatea .	1p 1p 1p 2p
2. a)	Verific dacă : $F'(x)=f(x),(\forall)x\in R$ $F'(x)=e^x+6x^2+1=f(x)$ Deci F este o primitivă a lui f .	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 x\bullet f(x)dx=\int_0^1 x(e^x+6x^2+1)dx=$ $=\int_0^1 xe^x dx+6\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$ $\int_0^1 xe^x dx=1$ Finalizare : $\int_0^1 x\bullet f(x)dx=1+\frac{6}{4}+\frac{1}{2}=3$.	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^1 f(x)\bullet F(x)dx=\int_0^1 F(x)\bullet F'(x)dx=$	2p

	$=\frac{F^2(1)}{2}-\frac{F^2(0)}{2}=$	1p
	$=\frac{(e+2015)^2-2013^2}{2}=\frac{(e+2)(e+4028)}{2}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 50

Prof: Marcu Ştefan Florin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\|5x-1\|<4 \Leftrightarrow -4<5x-1<4 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}<x<1$	3p
	$x=0$ şi numărul de elemente este egal cu 1 .	2p
2.	$a_n=a_1+(n-1)r$	1p
	$a_{2012}=a_1+2011r$; r=3	2p
	$a_{2012}=-5+2011\cdot 3=6028$	2p
3.	Punerea condiţiilor de existenţă a logaritmilor : $\begin{cases}5x-1>0\\3x+3>0\end{cases}$	1p
	$5x-1=3x+3$	2p

	$x=2$ este soluţia ecuaţiei .	2p
4.	$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ $C_{2012}^3=C_{2011}^3+C_{2011}^2 \Rightarrow C_{2012}^3-C_{2011}^3-C_{2011}^2=0$	2p 3p
5.	$A(3,5)\in d \Leftrightarrow x=3, y=5$ $3\bullet 3-2\bullet 5+a=0 \Rightarrow a=1$	2p 3p
6.	$\sin(90^\circ-x)=\cos x$ $\sin 85^\circ=\cos 5^\circ$ $\sin^2 5^\circ+\sin^2 85^\circ=\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ=1$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=A\bullet A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ $A^2=A$	2p 2p 1p
b)	$A+xI_2=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}+x\bullet\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+x&-1\\2&-1+x\end{pmatrix}$ $\det(A+xI_2)=x^2+x=0 \Rightarrow x=0, x=-1$	3p 2p
c)	$A^n=A(\forall)n\in N^*$ $A+A^2+...+A^{2012}=A+A+...+A=2012\bullet A$	1p 2p

	$2012\bullet A=\begin{pmatrix}4024 & -2012\\ 4024 & -2012\end{pmatrix}$	2p
2. a)	$(x-4)(y-4)+4=$ $=xy-4x-4y+16+4=$ $=xy-4x-4y+20=x\circ y$	1p 3p 1p
b)	$\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{2012-ori}=(x-4)^{2012}+4$ $(x-4)^{2012}+4=5\Rightarrow(x-4)^{2012}=1\Rightarrow x=3, x=5$	3p 2p
c)	Se observă că : $x\circ 4=4,(\forall)x\in R$ Folosind asociativitatea avem : $E=[(-2012)\circ(-2011)\circ\ldots]\circ 4\circ[\ldots\circ 2011\circ 2012]$ Deci E=4	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f^{'}(1)$ $f^{'}(x)=2012x^{2011}-2012$ $f^{'}(1)=0$	2p 2p 1p
b)	$f^{'}(x)=0\Leftrightarrow 2012x^{2011}-2012=0$ $2012(x^{2011}-1)=0$ $x^{2011}=1$ x=1 este unica soluţie	1p 1p 1p 2p
c)	f este strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$ şi strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	1p 1p

	Deci : $f(x) \geq f(1), (\forall) x \in R$ Dar $f(1) = -2010$ Obţinem : $x^{2012} - 2012x + 2011 \geq 0, (\forall) x \in R$	1p 2p
2. a)	$\int (x^2+1) \cdot f(x)dx = \int (x^2+5x+1)dx =$ $= \int x^2 dx + \int 5x dx + \int dx =$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x + C$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2+5x+1}{x^2+1} dx =$ $= \int_0^1 (1 + \frac{5x}{x^2+1}) dx =$ $= \int_0^1 dx + 5\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx =$ $= 1 + \frac{5}{2} \ln 2$	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^1 e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(1)} - e^{f(0)}$ $e^{f(1)} = e^{\frac{7}{2}}, e^{f(0)} = e$ $\int_0^1 e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \sqrt{e^7} - e = e^3\sqrt{e} - e$.	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 51

Prof:Marcu Ştefan Florin

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^2-16=0 \Rightarrow x_1=4, x_2=-4 \Rightarrow x\in[-4,4]\cap Z$	3p
	$x\in\{-4,-3,...,3,4\}$	2p
2.	$f(1)+f(2)+...+f(2012)=(2\bullet 1+1)+(2\bullet 2+1)+...+(2\bullet 2012+1)=$	1p
	$=2\bullet(1+2+...+2012)+2012=$	2p
	$=2012\bullet 2014$	2p
3.	$2^{2x+4}=4^{3x-1} \Leftrightarrow 2^{2x+4}=2^{6x-2}$	1p
	$2x+4=6x-2$	2p
	$x=\frac{3}{2}$	2p
4.	Sunt 5 cazuri posibile , din care avem 2 cazuri favorabile	2p
	Deci $P=\frac{2}{5}$	3p
5.	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-2)^2+(a-3)^2}$	2p

	$\lvert a-3\rvert=1 \Rightarrow a=4$ sau $a=2$ $S=\hat{0}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}$	3p
6.	$A[ABC]=\dfrac{AB\bullet AC\bullet \sin(\measuredangle BAC)}{2}$	2p
	$\sin 135^\circ=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1p
	$A[ABC]=\dfrac{4\bullet 4\bullet \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=4\sqrt{2}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Punctele sunt : $A_1(2,3)$ respectiv $A_2(4,5)$	2p
	Ecuaţia dreptei A_1A_2 este : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$	2p
	$x-y+1=0$	1p
b)	Avem $A_3(6,7)$, iar condiţia de coliniaritate este : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}=0$	3p
	Verificarea condiţiei	2p
c)	Avem $A_n(2n,2n+1)$ respectiv $A_{n+1}(2n+2,2n+3)$	1p
	$A[OA_nA_{n+1}]=\dfrac{1}{2}\bullet\lvert\Delta\rvert$	2p
	$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n & 2n+1 & 1 \\ 2n+2 & 2n+3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta=-2 \Rightarrow$ Aria=1	2p

2. a)	$S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}=$	1p
	$=(\hat{1}+\hat{6})+(\hat{2}+\hat{5})+(\hat{3}+\hat{4})$	3p
	$S=\hat{0}$	1p
b)	Elementele inversabile sunt : $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}$	3p
	Produsul lor este egal cu $\hat{6}$	2p
c)	$\begin{cases} x+\hat{2}y=\hat{3} \\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{3}x+\hat{6}y=\hat{2} \\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{0} \end{cases}$	2p
	$\hat{2}y=\hat{2} \Rightarrow y=\hat{1}$	2p
	$x=\hat{1}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	2p
	$f'(x)=1+e^x$	2p
	$f'(0)=2$	1p
b)	$f'(x)=1+e^x$	1p
	$1+e^x>0$	1p
	$f'(x)>0$	

	f este strict crescătoare pe R .	1p 2p
c)	Aplic Teorema lui Lagrange pe intervalul [2011,2012] $(\exists) c \in (2011, 2012)$ cu $f(2012) - f(2011) = f'(c)$ $f'(c) = e^{2012} - e^{2011} + 1$ Unicitatea lui c este demonstrată prin faptul că : $f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe R	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x+1} dx$ $I_2 = \int_0^1 (x-1) dx$ $I_2 = -\frac{1}{2}$	2p 2p 1p
b)	Arătăm că : $I_n > I_{n+1}, (\forall) n \in N$ $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{x+1} dx$ $x \in (0,1) \Rightarrow x^n > x^{n+1}$ Dar , atunci : $\frac{x^n-1}{x+1} > \frac{x^{n+1}-1}{x+1}$, de unde prin integrare de la 0 la 1 , se obţine cerinţa	1p 1p 1p 2p
c)	$I_{n+2} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}-x^n}{x+1} dx =$	2p

	$=\int_0^1 \frac{x^n \bullet (x^2-1)}{x+1}dx=$	1p
	$=\int_0^1 (x^{n+1}-x^n)dx=-\frac{1}{(n+1)(n+2)},(\forall)n\in N$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 52

Prof: Marcu Ştefan Florin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1=2, a_n=222, r=10$ Aflăm n=23 , aplicând formula : $a_n=a_1+(n-1)r$ Atunci $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\Rightarrow S_{23}=2576$	3p 2p
2.	$x^2-9\geq 0$ $x^2-9=16$ $x^2=25\Rightarrow x=5 sau x=-5$	1p 2p 2p

3.	$A(m,5)\in G_f \Rightarrow f(m)=5$ $f(m)=2m^2-3m+5$ $\Rightarrow 2m^2-3m=0 \Rightarrow m=0$ sau $m=\frac{3}{2}$	1p 2p 2p
4.	Numărul numerelor este A_4^3 $A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=24$	2p 3p
5.	Dacă notăm cu n,n+1,n+2 lungimile laturilor , atunci din Teorema lui Pitagora , avem : $(n+2)^2=n^2+(n+1)^2$ $\Rightarrow n^2-2n-3=0 \Rightarrow n=3$. Deci lungimile laturilor sunt 3,4,5 .	2p 3p
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x, \cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin 155^\circ=\sin 25^\circ, \cos 155^\circ=-\cos 25^\circ$ $\sin 25^\circ+\cos 25^\circ-\sin 155^\circ+\cos 155^\circ=0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Înlocuim x=1 , y=2 , z=3 în ultima ecuaţie a sistemului $1-3\cdot 2+m\cdot 3=4$ m=3	2p 2p 1p
b)	Calculăm determinantul matricei sistemului : $d=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -3 & m\end{vmatrix}=-5m-10$ $d\neq 0 \Rightarrow m\neq -2$	3p 2p
c)	Pentru m=-2 , sistemul devine : $\begin{cases}x+2y+3z=14\\ 2x-y+z=3\\ x-3y-2z=4\end{cases}$	1p

	Dacă scădem din ecuaţia (2) , ecuaţia (1) $\Rightarrow x-3y-2z=-11$ Se obţine o contradicţie cu ecuaţia (3)	2p 2p
2. a)	f este divizibil cu X-1 $\Rightarrow f(1)=0$ $f(1)=2+a$ $2+a=0 \Rightarrow a=-2$	1p 3p 1p
b)	Pentru a=-2 $\Rightarrow f = X^3-2X^2+1=(X-1)(X^2-X-1)$ Rădăcinile reale ale lui f sunt : $x_1=1, x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	3p 2p
c)	Din relaţiile lui Viete avem: $x_1+x_2+x_3=-a$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ este un număr natural pătrat perfect , $(\forall)a\in Z$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\underbrace{\lim}_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$, deci dreapta x=0 este asimptotă verticală $\underbrace{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci nu există asimptote orizontale Aflăm dacă există asimptote oblice . Avem : $m=\underbrace{\lim}_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, dar $n=\underbrace{\lim}_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=+\infty$ deci nu există asimptote oblice .	2p 2p 1p
b)	$f^{'}(x)=1+\frac{1}{x}$	1p

	$x>0 \Rightarrow 1+\frac{1}{x}>0$ $\Rightarrow f'(x)>0$ Deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.	1p 1p 2p
c)	Aplic Teorema lui Lagrange pe intervalul [a,b] $\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, $c\in(a,b)$ $f'(c)=1+\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ $f'(c)=1+\frac{1}{c}$ $\Rightarrow c=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$. Dar a<c<b de unde rezultă inegalitatea .	1p 1p 1p 2p
2. a)	Verific dacă : $F'(x)=f(x),(\forall)x\in R$ $F'(x)=e^x+6x^2+1=f(x)$ Deci F este o primitivă a lui f .	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 x\bullet f(x)dx=\int_0^1 x(e^x+6x^2+1)dx=$ $=\int_0^1 xe^x dx+6\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$ $\int_0^1 xe^x dx=1$ Finalizare : $\int_0^1 x\bullet f(x)dx=1+\frac{6}{4}+\frac{1}{2}=3$.	1p 1p 1p 2p
c)	$\int_0^1 f(x)\bullet F(x)dx=\int_0^1 F(x)\bullet F'(x)dx=$	2p

	$=\frac{F^2(1)}{2}-\frac{F^2(0)}{2}=$ $=\frac{(e+2015)^2-2013^2}{2}=\frac{(e+2)(e+4028)}{2}$	1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 53

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2^{\log_2 3}=3$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$ 3+5=8	2p 2p 1p
2.	$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}==\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}=\frac{S^3-3SP}{P}$ S=-1 P=3 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{8}{3}$	2p 1p 1p 1p
3.	Condiţia de existenţă a radicalului: $x^2-3x+2\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$ (1) Ridicând la pătrat obţinem $x^2-3x+2=12 \Rightarrow x^2-3x-10=0$	2p

	$x_1=5, x_2=-2$ ambele soluţii îndeplinind condiţia (1)	1p 2p
4.	$\lvert 3x+1\rvert \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le 3x+1 \le \frac{1}{2}$ $x \in \left[-\frac{3}{6}, -\frac{1}{6}\right]$ $A=\phi$	2p 2p 1p
5.	$\lvert\overrightarrow{AM}\rvert = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$	5p
6.	$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+6+9}{2}=10$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)}$ $S=10\sqrt{2}\text{ cm}^2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 6 & -1\end{pmatrix}$ $-4B=\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -8 & -4\end{pmatrix}$ $B^2-4B=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ -2 & -5\end{pmatrix}$	2p 2p 1p
b)	$\det A=\begin{vmatrix}2a & 1\\ -1 & 3b\end{vmatrix}=6ab+1$ $\det A=0 \Rightarrow ab=-\frac{1}{6}$ imposibil pentru a,b $\in Z$	2p 2p 1p

	Deci, $\det A \neq 0, \forall a,b \in Z$ şi A inversabilă	
c)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4I_2$ $A^{2012}=\left(A^4\right)^{503}=\left(-4I_2\right)^{503}=-4^{503}I_2=\begin{pmatrix}-4^{503} & 0\\ 0 & -4^{503}\end{pmatrix}$	2p 3p
2. a)	$f(1)\cdot f(-1)=2^5\cdot(-2)^5=(-4)^5=-1024$	5p
b)	$(x+1)^5+(x-1)^5=\left(x^2+4x+3\right)\cdot q+(ax+b)$ $x=-1\Rightarrow -32=-a+b$ $x=-3\Rightarrow -1056=-3a+b$ a=512, b=480	1p 1p 1p 2p
c)	$f(0)=0\Rightarrow f \vdots x$ $f=x\cdot h$,cu $h\in R[X]$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3\sqrt{x}-4}{2x}$	5p
b)	$f'(x)=0\Rightarrow 3\sqrt{x}-4=0\Rightarrow x=\dfrac{16}{9}$	2p

x	0		$\frac{16}{9}$		∞
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	
$f(x)$		↘ ↘ ↘ ↘		↗ ↗ ↗ ↗	

2p

	$f(x) \geq f\left(\frac{16}{9}\right) = 4 - 2\ln\frac{16}{9} = 4 - 4\ln\frac{4}{3}$	1p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} - 2\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3\sqrt{x} - 2\ln x}{\sqrt{x}} - 2\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right)^x$, cazul 1^∞ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{-\sqrt{x}}{2\ln x}\cdot\frac{-2\ln x}{\sqrt{x}}x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} -2\ln x\cdot\sqrt{x}} = e^{-\infty} = 0$	2p 3p
2. a)	Funcţia f este continuă pe $(-\infty,1),(1,\infty)$ $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x - 1\right) = 2 - 1 = 1$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2 + \ln x\right) = 1$, $f(1) = 1$ f continuă în punctul $x_0 = 1$ $\Rightarrow$f continuă pe R $\Rightarrow$f admite primitive pe R	1p 3p 1p
b)	$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3\left(x^2 + \ln x\right)dx = \int_2^3 x^2dx + \int_2^3 \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\ln x - x\right)\Big\|_2^3 = \frac{16}{3} + \ln\frac{27}{4}$	5p
c)	Fie $F: R \to R$ o primitivă a funcţiei f. Atunci $F''(x) = f'(x)$ Pe intervalul $(-\infty,1)$, $F''(x) = f'(x) = 2^x\ln 2 > 0$,deci F convexă	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 54

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_{10}=a_3+7r\Rightarrow r=3$ $a_3=a_1+2r\Rightarrow a_1=1$ $S_{10}=\frac{(1+28)10}{2}=145$	2p 2p 1p
2.	Notăm $x+y=S$, $xy=P$ Sistemul devine $\begin{cases}S=3\\S^2-2P=5\end{cases}$ cu soluţia S=3,P=2 x,y sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+2=0$ adică $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$	3p 2p
3.	Notăm $4^x=y>0$ .Ecuaţia devine $y^2-2y+1=0$ Soluţia ecuaţiei este y=1 Revenim la notaţie, $4^x=1\Rightarrow x=0$	2p 1p 2p
4.	$x_1=\frac{1}{x_2}\Rightarrow P=x_1x_2=1$ $P=\frac{5m+1}{m}=1\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$	2p 3p
5.	$\frac{\sin 70^o\cos 20^o+\sin 20^o\cos 70^o}{\cos 70^o\cos 25^o+\sin 70^o\sin 25^o}==\frac{\sin(70^o+20^o)}{\cos(70^o-25^o)}=\frac{\sin 90^o}{\cos 45^o}$	3p

	$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$	2p
6.	$d(A,h) = \dfrac{\lvert 3\cdot 1 + 4\cdot(-2) - 7\rvert}{\sqrt{3^2+4^2}}$ $d(A,h) = \dfrac{12}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 2 & m & -3 \\ m & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m + 28$ $\det A = 0 \Rightarrow \Delta = 260 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{65}$ deci $m \notin Q$ Deci $\forall m \in Q$ sistemul este compatibil determinat	2p 2p 1p
b)	$-2m^2 + 6m + 28 < 33 \Leftrightarrow -2m^2 + 6m - 5 < 0$ $\Delta_m = 36 - 40 = -4 < 0$ Atunci $-2m^2 + 6m - 5 < 0\ \forall m \in R$	2p 1p 2p
c)	$\det A = 32$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 32$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ x=0, y=1,z=0	1p 3p 1p
2. a)	Sunt inversabile clasele $\hat{a}$ astfel încât (a,9)=1	2p 3p

	Sunt inversabile $\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5},\hat{7},\hat{8}$ deci 6 elemente	
b)	$\hat{5}x+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow \hat{5}x=-\hat{3}=\hat{6}$ $x=\frac{\hat{6}}{\hat{5}}=\hat{6}\cdot\hat{5}^{-1}=\hat{6}\cdot\hat{2}=\hat{3}$	2p 3p
c)	$\begin{vmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{4}\end{vmatrix}=\hat{3}-\hat{1}=\hat{2}$ $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{7}\end{vmatrix}=\hat{7}+\hat{0}+\hat{4}-\hat{3}-\hat{2}-\hat{6}=\hat{0}$ $\begin{vmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{4}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{7}\end{vmatrix}=\hat{2}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(x+3)'\sqrt{x}-(x+3)\left(\sqrt{x}\right)'}{x}=\frac{\sqrt{x}-(x+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x-x-3}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$ Pentru $x\in[3,\infty)$,obţinem că $f'(x)\geq 0$,deci f este crescătoare.	3p 2p
b)	Deoarece f este crescătoare pe $[3,\infty)$,rezultă că f(2012)>f(2011) $\Rightarrow\frac{2015}{\sqrt{2012}}>\frac{2014}{\sqrt{2011}}\Rightarrow 2015\sqrt{2011}>2014\sqrt{2012}$	3p 2p
c)	Ecuaţia tangentei este $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $f'(4)=\frac{1}{16}$	2p 1p

	$y-\frac{7}{2}=\frac{1}{16}(x-4)\Rightarrow x-16y+52=0$	2p
2. a)	$\int f_1(x)dx=\int\frac{1+x}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+x+C$	5p
b)	$\int_1^2 f_n(x)dx-\int_1^2 f_{n-1}(x)dx=\int_1^2\left[\frac{(1+x)^n}{x}-\frac{(1+x)^{n-1}}{x}\right]dx=\int_1^2(1+x)^{n-1}dx$ $=\frac{(1+x)^n}{n}\Big\|_1^2=\frac{3^n-2^n}{n}$	3p 2p
c)	$V=\pi\int_1^2\frac{(1+x)^4}{x^2}dx=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+2+x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Big\|_1^2$ $V=\frac{29\pi}{6}$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 55

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_6=b_3\cdot q^3\Rightarrow\frac{3}{32}=\frac{3}{4}\cdot q^3\Rightarrow q=\frac{1}{2}$ $b_1=b_3:q^2=\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$	3p 2p

2.	Elementele raţionale sunt $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}$. Probabilitatea $P = \dfrac{nr.\,cazuri\ \ favorabile}{nr.\,cazuri\ \ posibile} = \dfrac{3}{50}$	2p 3p
3.	Condiţia de existenţă a logaritmului $x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ Ecuaţia devine $x^2 + 2x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ cu soluţiile $x_1 = 1, x_2 = -3$ Ambele soluţii aparţin mulţimii $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$,deci $S = \{1, -3\}$	2p 2p 1p
4.	$C_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Ecuaţia devine $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = n(n-1) \Rightarrow n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8 \in N$	2p 3p
5.	$G\left(\dfrac{-2+5+0}{3}, \dfrac{3+1-4}{3}\right) \Rightarrow G(1,0)$ $AG : \dfrac{x+2}{1+2} = \dfrac{y-3}{0-3} \Rightarrow AG : x + y - 1 = 0$	2p 3p
6.	$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{\dfrac{7}{16}} = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$	2p 2p

a)	$3I_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ $A^2+3I_2=\begin{pmatrix}7&0\\0&52\end{pmatrix}$	1p
b)	$\det\left(A^n\right)=\left(\det A\right)^n=14^n$ $14/14^n=\det\left(A^n\right)$	3p 2p
c)	Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(R)$ AX=XA$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a&2b\\7c&7d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&7b\\2c&7d\end{pmatrix}$deci $b=c=0$ $a,d\in R\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$ deci ecuaţia are o infinitate de soluţii în $M_2(R)$	1p 2p 2p
2. a)	Legea de compoziţie fiind comutativă, rezolvăm ecuaţia $x*e=x$ $xe-8x-8e+72=x\Rightarrow e(x-8)=9(x-8)\Rightarrow e=9$	1p 4p
b)	Fie $x,y\in\left[8,\infty\right)\Rightarrow x-8\geq 0, y-8\geq 0$ $(x-8)(y-8)\geq 0\Rightarrow xy-8(x+y)+64\geq 0$ $xy-8(x+y)+72\geq 8\Rightarrow x*y\in\left[8,\infty\right)$	2p 2p 1p
c)	$2^x*2^x=72\Rightarrow 2^{2x}-16\cdot 2^x+72=72$ $2^x\left(2^x-16\right)=0$ şi deoarece $2^x>0\Rightarrow 2^x-16=0\Rightarrow x=4$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$l_s=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\left(2^{x-1}+1\right)=2$	1p

a)	$l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{3x-1}{x} = 2$ f(1)=2 Deoarece $l_s = l_d = f(1)$,rezultă că f este continuă în punctul $x_0 = 1$	1p 1p 2p
b)	Calculăm derivata funcţiei pe $[1,\infty)$. $f'(x) = \frac{(3x-1)' x - (3x-1)x'}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0\ \forall x \in [1,\infty)$ Deoarece $f'(x) > 0\ \forall x \in [1,\infty)$ rezultă că f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$	1p 3p 1p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2^{x-1}+1\right) = 1$ Graficul funcţiei f admite asimptotă orizontală spre $-\infty$, dreapta de ecuaţie y=1	3p 2p
2. a)	$\int f(x)\cdot(x+1)dx = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$	5p
b)	$\frac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$ $\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{7}{12} + \ln 2$	2p 3p
c)	$f'(x) = \frac{(x^4)'(x+1) - x^4(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in [1,2]$ deci f este crescătoare pe $[1,2]$ Atunci $f(1) \le f(x) \le f(2) \Rightarrow \frac{1}{2} \le \int_1^2 f(x)dx \le \frac{16}{3}$	2p 3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 56

Prof:Oláh Csaba.

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1$	2p
	$b=\frac{\frac{1}{2^{11}}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{2^{11}-1}{\frac{2^{11}-1}{2^{10}}}=2^{10}=1024$.	3p
2.	$y=2x+4\Rightarrow x=\frac{y-4}{2},\ f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}$	1p
	$f^{-1}(2)=\frac{2-4}{2}=-1,\ f(3)=2\cdot3+4=10\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow f^{-1}(2)\cdot f(3)=-10$.	2p
3.	$x>0,\log_3 x=t\Rightarrow$	
	$t^2-3t+2=0,t_1=1,t_2=2$	2p
	$\log_3 x=1\Rightarrow x=3,\ \log_3 x=2\Rightarrow x=9$	2p
	$x\in\{3,9\}$.	1p
4.	Numărul submulţimilor cu 3 elemente $C_5^3=\frac{5!}{2!3!}=\frac{4\cdot5}{2}=10$.	5p
5.	$\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a+5}\Rightarrow(a+1)(a+5)=a-1\Rightarrow a^2+5a+6=0$	2p
	$a_1=-2,a_2=-3\Rightarrow a\in\{-3,-2\}$.	3p

6.	$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} =$ $-\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$	4p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă $x=0$, $A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$.	5p
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}a^x&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a^y&0&0\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^x\cdot a^y&0&0\\0&1&x+y\\0&0&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}a^{x+y}&0&0\\0&1&x+y\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$.	3p 2p
c)	$\left(A(x)\right)^{2012}=\underbrace{A(x)\cdot A(x)\cdot\ldots\cdot A(x)}_{2012-ori}\overset{b)}{=}A\Big(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{2012-ori}\Big)=A(2012x)=$ $=\begin{pmatrix}a^{2012x}&0&0\\0&1&2012x\\0&0&1\end{pmatrix}$.	3p 2p
2. a)	$(x-4)(y-4)+4=xy-4x-4y+20$.	5p
b)	$a*x=a\Rightarrow(a-4)(x-4)+4=a\Rightarrow(a-4)(x-4)=a-4\Rightarrow$ $\Rightarrow(a-4)(x-4)-(a-4)=0\Rightarrow(a-4)(x-5)=0$ $a=4$.	2p 2p 1p
c)	Din b) se ştie că $4*x=x*4=4$	2p

	$\sqrt{1}*\sqrt{2}*...*\sqrt{100}=\sqrt{1}*\sqrt{2}*...*\underbrace{\sqrt{15}*\underbrace{\underbrace{\sqrt{16}}_{=4}*\sqrt{17}}_{=4}}_{=4}*...*\sqrt{100}=4$.	3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{x^2+2x+1}=\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=$ $=x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$.	3p 2p
b)	$y=x+1$ ecuaţia asimptotei oblice spre $\pm\infty$ Asimptota orizontală nu este Asimptotă verticală $x=-1$.	2p 1p 2p
c)	$f'(x)=\left[x+1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]'=1+\frac{2}{(x+1)^3}>0,\ x\in R_+ \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ e crescătoare pe R_+.	3p 2p
2. a)	$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big\|_{-\pi}^{\pi}=0$.	5p
b)	$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(x+2)\cos xdx=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos xdx+2\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx$, $g(x)=x\cos x$ e funcţie impară, integrând pe un interval simetric, $[-\pi,\pi]$, devine zero, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos xdx=0$ din a). $\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx=0+0=0$.	2p 3p
c)	$\pi\int_0^{\pi} g^2(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\left[(x+2)\cos x-x\cos x\right]^2dx=4\pi\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=$	2p

	$= 2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx = 2\pi\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big\|_0^{\pi} = 2\pi\left(\pi+\frac{\sin 2\pi}{2}-0-\frac{\sin 0}{2}\right) = 2\pi^2$.	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 57

Prof:Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 3 = a$, $\log_6 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2\cdot 3} = \frac{2\log_2 3}{1+\log_2 3} = \frac{2a}{1+a}$, în mod similar	1p
	$1+\log_4 27 = 1+\frac{\log_2 27}{\log_2 4} = 1+\frac{3\log_2 3}{2} = \frac{2+3\log_2 3}{2} = \frac{2+3a}{2}$	2p
	$\frac{\log_6 9}{1+\log_4 27} = \frac{\frac{2a}{1+a}}{\frac{2+3a}{2}} = \frac{4a}{(a+1)(3a+2)}$.	2p
2.	Numerele raţionale din mulţime: $\pm\sqrt[3]{8}, \pm\sqrt[3]{1}, 0$, adică 5 la număr	2p
	Numărul de elemente al mulţimii: 21	1p
	Probabilitatea ca să alegem la întâmplare un număr raţional $p = \frac{5}{21}$.	2p
3.	Ecuaţia poate fi scrisă aşa $2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x-1)^2 = 0$,	3p
	$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.	2p
4.	$x_1, x_2 \in (1,\infty)$, $f(x_1) = 2^{x_1-1}+1$, $f(x_2) = 2^{x_2-1}+1$	1p

	$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow 2^{x_1-1}+\cancel{1}=2^{x_2-1}+\cancel{1}\Rightarrow x_1-1=x_1-1\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=x_2$, deci f e injectivă.	2p 2p
5.	$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{81+100-36}{2\cdot 9\cdot 10}=$ $=\dfrac{145}{180}=\dfrac{29}{36}$.	3p 2p
6.	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}$.	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & a & -2\\ a & -1 & 1\end{vmatrix}\underset{c_2+c_3}{\overset{c_1+2c_3}{=}}\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -3 & a-2 & -2\\ a+2 & 0 & 1\end{vmatrix}=$ $=-\begin{vmatrix}-3 & a-2\\ a+2 & 0\end{vmatrix}=\left(a-2\right)\left(a+2\right)$.	3p 2p
b)	$\det A=\left(a-2\right)\left(a+2\right)$, $\exists A^{-1}\left(a\right)\Leftrightarrow a\in R\setminus\left\{-2,2\right\}$.	5p
c)	$a=4$ $\begin{cases}2x+y-z=3\\ x+4y-2z=6\\ 4x-y+z=9\end{cases}$, se adună prima ecuaţie cu a treia, şi se obţine $6x=12\Rightarrow x=2$ Se înlocuieşte $x=2$ in prima şi a doua ecuaţie şi se obţine $\begin{cases}y-z=-1\\ 2y-z=2\end{cases}\Big\vert\left(-\right)\Rightarrow y=3\Rightarrow z=4$, deci $\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=4\end{cases}$.	2p 1p 2p
2. a)	$X^2-2X-15=\left(X+3\right)\left(X-5\right)$ $f\,\vdots\left(X^2-2X-15\right)\Leftrightarrow f$ e divizibil cu $\left(X-5\right)\left(X+3\right)$, adică	1p

	are două rădăcini reale $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, se verifică prin schema lui *Horner*.	4p
b)	Folosind schema lui *Horner*, f se poate scrie $f = (X-5)(X+3)(X^2-3X+2) =$ $= (X-5)(X+3)(X-1)(X-2)$, rezultă că celelalte două rădăcini sunt $x_3 = 1$ și $x_4 = 2$ Adică toate rădăcinile sunt reale.	2p 3p
c)	Fie $u(a)$ ultima cifră a numărului a, un număr se îmăparte la 10 dacă se termină în 0 Fie $a = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$, $n \in N^*$ $n=1 \Rightarrow u(a) = u(5-3+1+2) = 5$ $n=2 \Rightarrow u(a) = u(25+9+1+4) = 9$ $n=3 \Rightarrow u(a) = u(125-27+1+8) = 7$ $n=4 \Rightarrow u(a) = u(625+81+1+16) = 3$, cum ultimele cifre ale puterilor se repetă din 4 în 4 (in cazul numerelor 3 si 2) sau nu se schimba deloc (5 și1), se poate deduce ca acest număr a nu se va termina în 0, deci $(x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n) \not\vdots 10$, $n \in N^*$.	1p 3p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f^{'}(1)$ $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})x - e^x + e^{-x}}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{\cancel{e} + e^{-1} - \cancel{e} + e^{-1}}{1} = \dfrac{2}{e}$.	2p 3p
b)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} - \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{xe^x} =$ $= \infty - 0 = \infty$, nu există asimptotă orizontală în $+\infty$.	2p 3p

c)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\ln x}-\dfrac{1}{e^{\ln x}}}{\ln x}=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x\ln x}=\infty-0=\infty$.	3p
2. a)	$x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$ se verifică prin desfacerea parantezelor si efectuarea operaţiilor de pe partea dreapta.	5p
b)	$\int f(x)\,dx=\int\dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+1)}dx=\int\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}dx=$	2p
	$=\int\dfrac{x^2+1}{x^2+1}dx+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx=x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.	3p
c)	$\int_0^1(x-1)f(x)\,dx=\int_0^1\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^3-1}{x^2+1}dx=$	2p
	$=\int_0^1\dfrac{\overbrace{x^3+x}^{=x(x^2+1)}}{x^2+1}dx-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{2x}{x^2+1}dx-\int_0^1\dfrac{1}{x^2+1}dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctgx\right)\Big\|_0^1=$	2p
	$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2-arctg1-0+\dfrac{1}{2}\ln 1+arctg0=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e}{2}-\dfrac{\pi}{4}$.	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 58

Prof: Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se cunoaşte formula $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow C_{16}^7 = C_{16}^9$ şi $C_{16}^{12} = C_{16}^4 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow a - b = C_{16}^7 - C_{16}^9 + C_{16}^{12} - C_{16}^4 = 0$.	2p
2.	$\Delta = (2m+3)^2 - 12m = 4m^2 + 9$	1p
	$\min_{x\in R} f(x) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4m^2+9}{4m}$, $\min_{x\in R} f(x) = -3 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow \frac{4m^2+9}{4m} = 3 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 0 \Rightarrow (2m-3)^2 = 0 \Rightarrow$	
	$\Rightarrow m = \frac{3}{2}$.	2p
3.	$x > 1$, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, trecem în baza $\sqrt{2}+1$	1p
	$\log_{\sqrt{2}+1}(x+1) + \frac{\log_{\sqrt{2}+1}(x-1)}{\underbrace{\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)}_{=-1}} = 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}+1}(x+1) - \log_{\sqrt{2}+1}(x-1) = 1$	
	$\log_{\sqrt{2}+1}\frac{x+1}{x-1} = \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)$, deci $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{2}+1$	2p
	$\cancel{x} + 1 = \sqrt{2}x + \cancel{x} - \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1 > 1$.	2p

4.	$b_3 = b_1 q^2$, $b_7 = b_1 q^6 \Rightarrow \frac{54}{6} = \frac{b_7}{b_3} = q^4 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$	3p
	$b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{6}{3} = 2$.	2p
5.	$d: 2x - y + 4 = 0$, $y = 2x + 4 \Rightarrow m_d = 2$	1p
	$d_1: y - 2 = m_{d_1}(x-1)$, $m_d \cdot m_{d_1} = -1 \Rightarrow m_{d_1} = \frac{-1}{m_d} = -\frac{1}{2}$	1p
	$d_1: y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$.	3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ (teorema sinusurilor) $\Rightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} =$	2p
	$= \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$.	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & 1 & 5 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 10a - 5$, $a^2 + 10a - 5 = 0 \Rightarrow x \in \{-5-\sqrt{30}, -5+\sqrt{30}\}$	3p
	A este inversabilă $\Rightarrow a \in R \setminus \{-5-\sqrt{30}, -5+\sqrt{30}\}$.	2p
b)	$a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculând A^*, se obţine	1p
	$A^* = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	4p
c)	$A \cdot X = B \Rightarrow$	1p

	$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & 11\\ 5 & 1 & -5\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-10 & -1 & 22\\ 10 & 1 & -10\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.	4p
2. a)	Utilizând relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$, atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=(-1)^2-2\cdot 1=$ $=-1<0$ rezultă că f nu are toate rădăcinile reale.	1p 2p 2p
b)	Se opoate observa uşor că $f(1)=0 \Rightarrow x=1$ este o rădăcină reală a polinomului.	5p
c)	Rădăcinile polinomului satisfac ecuaţia $f(x)=0$. $x_1^3+x_1^2+x_1-3=0$ $x_2^3+x_2^2+x_2-3=0$ $x_3^3+x_3^2+x_3-3=0$, adunând cele trei relaţii, obţinem $x_1^3+x_2^3+x_3^3+\underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{=-1}+\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{=-1}-9=0$, de unde $x_1^3+x_2^3+x_3^3=11$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$.	5p
b)	$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)<0,\ \text{dacă } x<0\\ f'(x)>0\ \text{dacă } x>0\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ e descrescătoare, dacă $x<0$ şi e crescătoare dacă $x>0$.	3p 2p
c)	$f(k)=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$	1p

	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{\cancel{n}\cdot n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.	2p 2p
2. a)	$F'(x)=f(x)=2^x+x^2>0\Rightarrow$ $\Rightarrow F$ este o funcţie crescătoare.	3p 2p
b)	$\int\limits_1^2 f(x)\,dx=\int\limits_1^2\left(2^x+x^2\right)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_1^2=\frac{4}{\ln 2}+\frac{8}{3}-\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{3}=$ $=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}$.	3p 2p
c)	$\int\limits_1^2\left(f(x)+f(2x)\right)dx=\int\limits_1^2 f(x)\,dx+\int\limits_1^2 f(2x)\,dx$ $\int\limits_1^2 f(2x)\,dx=\int\limits_1^2\left(4^x+4x^2\right)dx=\left(\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{4x^3}{3}\right)\Big\vert_1^2=$ $=\frac{16}{\ln 4}+\frac{4\cdot 8}{3}-\frac{4}{\ln 4}-\frac{4\cdot 1}{3}=\frac{12}{\ln 4}+\frac{28}{3}$, Din b) $\int\limits_1^2 f(x)\,dx=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}$, atunci $\int\limits_1^2\left(f(x)+f(2x)\right)dx=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}+\frac{12}{\ln 4}+\frac{28}{3}=\frac{2}{\ln 2}+\frac{12}{\ln 4}+\frac{35}{3}$.	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 59

Prof: Opriţă Elena

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Aplică formula $a_n = a_1 + (n-1)r$ pentru $n = 4 : a_4 = a_1 + 3r$	3p
	Obţine $a_4 = 11$	2p
2.	Pune condiţia $\Delta = 0$	1p
	Calculează $\Delta = 16 - 4m$	2p
	Obţine $m = 4$	2p
3.	Scrie forma echivalentă $3^{6x-12} = 3^6$	1p
	Foloseşte injectivitatea funcţiei exponenţiale şi ajunge la ecuaţia $6x - 12 = 6$	2p
	Finalizare $x = 3$	2p
4.	Cantitatea de magneziu este $2^0/_{00} \cdot 2,5$	2p
	Obţine $5g$ de magneziu	3p
5.	Lungimea segmentului $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$	2p
	$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2}$	2p
	$AB = \sqrt{5}$	1p
6.	Aria triunghiului ABC este $A_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle ABC)}{2}$	2p
		1p

	$A_{\triangle ABC}=\dfrac{3\cdot 5\cdot \sin 30^0}{2}$ Finalizare $A_{\triangle ABC}=\dfrac{15}{4}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $x=1$ şi $y=0$ se obţine $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ Pentru $x=y=0$ se obţine $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in G$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	Fie $A=\begin{pmatrix}x & y\\ 5x & y\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}t & z\\ 2z & t\end{pmatrix}, x,y,t,z\in R$ $A+B=\begin{pmatrix}x+t & y+z\\ 2(y+z) & x+t\end{pmatrix}\in G$ $AB=\begin{pmatrix}xt+5yz & xz+yt\\ 5(xt+yt) & xt+5yz\end{pmatrix}\in G$	1p 2p 2p
c)	A inversabilă dacă $\det(A)\neq 0$. $\det(A)=x^2-5y^2\neq 0$ deci $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$ Calculează $A^*=\begin{pmatrix}x & -y\\ -5y & x\end{pmatrix}$ Scrie $A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{x^2-5y^2} & -\dfrac{y}{x^2-5y^2}\\ -\dfrac{5y}{x^2-5y^2} & \dfrac{x}{x^2-5y^2}\end{pmatrix}$	1p 1p 1p 2p
2. a)	Scrie $x\circ y=4xy+4x+4y+4-1$	1p 3p

	$x\circ y=4(xy+x+y+1)-1=$ $=4\left[x(y+1)+(y+1)\right]-1=$ $=4(x+1)(y+1)-1$ Finalizare	1p
b)	Legea "$\circ$" asociativă dacă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)\quad \forall x,y,z\in R$. Calculează $(x\circ y)\circ z=(4xy+4x+4y+3)\circ z=...=16xyz+16xy+16xz+16yz+16x+16y+16z+15$ Calculează $x\circ(y\circ z)=x\circ(4yz+4y+4z+3)=...=16xyz+16xy+16xz+16yz+16x+16y+16z+15$.	3p 2p
c)	Scrie ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\ 2012\ ori}=-1$ sub forma $4^{2011}(x+1)^{2012}-1=-1$ care este echivalentă cu $4^{2011}(x+1)^{2012}=0$ Obţine soluţia $x=-1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Calculează $f(1)=1+a$ Scrie ecuaţia $f(1)=2$ sub forma $1+a=2$ Obţine $a=1$	2p 2p 1p
b)	Observă că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ Calculează $f'(x)=\frac{(x^2+1)'x-(x^2+1)x'}{x^2}$ Obţine $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$ Calculează $f'(1)=0$ şi deduce că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	1p 1p 1p 2p
c)	f este strict crescătoare pe $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ dacă $f'(x)>0\ \forall\ x\in\left[\sqrt{a},+\infty\right)$.	1p

	Calculează $f'(x)=\frac{x^2-a}{x^2}$	1p
	Observă că pentru $x>\sqrt{a}\Rightarrow x^2>a\Rightarrow x^2-a>0,\ x^2>0$	1p
	Rezultă că $f'(x)>0\ \forall\ x\in\left[\sqrt{a},+\infty\right)$ ceea ce implică f este strict crescătoare pe $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$	2p
2. a)	Pentru a calcula $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx$ aplicăm metoda de integrare prin părţi.	2p
	$\int_0^1 x(e^x)'dx = xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x(x)'dx = e-\int_0^1 e^x dx$	2p
	Obţine $\int_0^1 xe^x dx=1$	1p
b)	Calculează $f(x)g'(x)=2x^2e^x$	1p
	$\int_0^1 2x^2e^x dx=2\int_0^1 x^2\left(e^x\right)'dx=$	1p
	$=2x^2e^x\Big\vert_0^1-2\int_0^1 (x^2)'e^x dx=$	1p
	$=2e-4\int_0^1 xe^x dx=2e-4$	2p
c)	Calculează $h(x)=f(x)+g(x)=xe^x+x^2+2$	2p
	$\mathrm{A}=\int_0^1 h(x)dx$	1p
	Scrie formula pentru arie $\mathrm{A}=\int_0^1\left(xe^x+x^2+2\right)dx=\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 x^2 dx+\int_0^1 2dx$ $\mathrm{A}=\frac{10}{3}$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 60

Prof:Opriţă Elena

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Ecuaţia are rădăcini reale dacă $\Delta \geq 0\ \forall x \in R$. Calculează $\Delta = 5m^2 - 10m + 5$ Scrie expresia pentru $\Delta = 5(m-1)^2$ şi observă că $\Delta \geq 0\ \forall m \in R$	1p 2p 2p
2.	Numărul submulţimilor cu 8 elemente ale unei mulţimi cu 10 elemente este C_{10}^8 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Calculează $C_{10}^8 = 45$	2p 1p 2p
3.	Scrie $\frac{2}{7} = 0,(285714)$ Observă că $2012 = 6 \cdot 335 + 2$ $a_{2012} = 8$	2p 1p 2p
4.	C.E $\begin{cases} x^2 - 7x + 17 > 0 \\ 3x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{8}{3}, +\infty\right)$ Foloseşte faptul că funcţia logaritmică este injectivă şi obţine $x^2 - 7x + 17 = 3x + 8$. Găseşte $x_1 = 1 \in C.E$ şi $x_2 = 9 \in C.E$	2p 3p
5.	Foloseşte formula $\cos(180^0 - x) = -\cos x$ şi obţine $\cos 130^0 = -\cos 50^0$ Obţine $\cos 50^0 + \cos 130^0 = 0$	2p 3p
6.	Fie d' dreapta căutată. Din condiţia $d // d'$ se obţine $m_d = m_{d'}$. Deci panta dreptei d' este	2p

	$m_{d'}=-\frac{5}{12}$	1p
	Ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu d' este: $y-y_A=m_{d'}\left(x-x_A\right)$	2p
	Înlocuieşte şi obţine ecuaţia pentru $d':5x+12y-17=0$	

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Scrie $A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$	1p
	Calculează $A^2=\begin{pmatrix}6^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
	Calculează $A^3=\begin{pmatrix}6^3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	2p
b)	Calculează $\det(A^n)=6^n$	3p
	Rezolvă ecuaţia $6^n=1296$ şi obţine $n=4$	2p
c)	Scrie $B_{2012}=A+A^2+...+A^{2012}$	1p
	$B_{2012}=\begin{pmatrix}6+6^2+...+6^{2012} & 0\\ 0 & 2012\end{pmatrix}$	2p
	$B_{2012}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\left(6^{2012}-1\right) & 0\\ 0 & 2012\end{pmatrix}$	2p
2. a)	Scrie relaţiile lui Viete pentru ecuatia data. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1\\ x_1x_2x_3=-1\end{cases}$	3p
	Obţine că $x_1+x_2+x_3=3$	2p
b)	Scrie $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)$	3p
		2p

	Obţine $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot 1=7$	
c)	$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \frac{1}{x_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}-\frac{x_1}{x_2x_3}-\frac{x_2}{x_1x_3}-\frac{x_3}{x_1x_2}=$ $\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}{x_1x_2x_3}=$ $=\frac{1-7}{-1}=6$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Aplică formula $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ Calculează $f'(x)=2012x^{2011}$	2p 3p
b)	Observă că $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^{2012}-\pi^{2012}}{x-\pi}=f'(\pi)$ Calculează $f'(\pi)=2012\pi^{2011}$ Finalizează $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^{2012}-\pi^{2012}}{x-\pi}=2012\pi^{2011}$	2p 2p 1p
c)	Intervalele de concavitate si convexitate le stabilim cu ajutorul semnului funcţiei f'' Calculează $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ $f''(x)=2012\cdot 2011x^{2010}$ Observă că $x^{2012}\geq 0, \forall x\in R$ deci $f''(x)\geq 0, \forall x\in R$ ceea ce implică faptul că f este convexă pe R	1p 1p 1p 2p
2. a)	Scrie $I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx$ şi aplică metoda de integrare prin părţi.	2p

	$I_1 = -\int_0^1 x(e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big\|_0^1 - e^{-x}\Big\|_0^1$	2p
	Finalizează $I_1 = -\frac{2}{e}+1$	1p
b)	$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx = -\int_0^1 x^n\left(e^{-x}\right)'dx$	1p
	$I_n = -x^n e^{-x}\Big\|_0^1 + \int_0^1 \left(x^n\right)' e^{-x}dx$	1p
	$I_n = -\frac{1}{e} + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$	1p
	$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1},\ \forall n \in N, n \ge 2$	2p
c)	Integrând inegalitatea dată de la zero la unu se obţine $\int_0^1 x^n \cdot \frac{1}{e}dx \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx$	2p
	$\frac{1}{e}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 \le I_n \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1$	1p
	Din relaţia de mai sus ajunge la $\frac{1}{(n+1)e} \le I_n \le \frac{1}{n+1},\ \forall n \in N^*$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 61

Prof:Opriţă Elena

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 128 - \log_3 27 + \log_4 \frac{1}{4} = 7 - 3 + (-1)$	3p
	Finalizează $\log_2 128 - \log_3 27 + \log_4 \frac{1}{4} = 3$	2p
2.	Suma elementelor mulţimii A este $1+4+7+...+37$	1p
	Observă că termenii sumei formează o progresie aritmetică cu primul termen 1 şi raţia 3. Termenul general al unei progresii aritmetice este $a_n = a_1 + (n-1)r$. Numărul de termeni îl află din relaţia $1+(n-1)\cdot 3 = 37 \Rightarrow n = 13$	2p
	Calculează suma $S_{13} = \frac{(1+37)}{2} \cdot 13 \Rightarrow S_{13} = 249$	2p
3.	Scrie ecuaţia sub forma $2^{x^2+3x} = 2^4$	1p
	Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale obţinem $x^2+3x = 4 \Rightarrow x^2+3x-4=0$	2p
	Rezolvă ecuaţia şi obţine soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = -4$	2p
4.	Înălţimea copacului după o lună $10 + 4\% \cdot 10 = ... = 10,4m$	2p
	Înălţimea copacului după două luni $10,4 + 4\% \cdot 10,4 = ... = 10,816m$	3p
5.	A' este simetricul punctului A în raport cu $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $A'A$	2p
	$B\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right)$ deci $x_{A'} = 2x_B - x_A = -14$ şi $y_{A'} = 2y_B - y_A = -6$. Obţinem $A'(-14,-6)$.	3p
6.	Foloseşte formula $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos(\sphericalangle BAC)$	2p
	$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \frac{1}{2}$	1p
	Obţine $BC = 7$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Scrie $A^2 = A\cdot A$	2p 2p

	Calculează şi obţine $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Finalizează $A^2 = O_2$	1p
b)	Calculează $(I_3 - A)(I_3 + A) = I_3^2 + I_3A - AI_3 - A^2$. Folosind proprietăţile matricei unitate si punctul a) obţinem $I_3 = (I_3 - A)(I_3 + A)$	3p 2p
c)	Folosim punctul b) şi definiţia funcţiei inversabile obţinem $(I_3 - A)^{-1} = I_3 + A$ Scrie $(I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	Restul împărţirii polinomului f la $X + 2$ se obţine folosind teorema restului Restul este $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1$ Finalizează $f(-2) = 3$	1p 3p 1p
b)	Scrie relaţiile lui Viete $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$ şi calculează $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -1$ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \ldots = 2$	3p 2p
c)	$g(x) - f(x) = 1 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ Scrie ecuaţia sub forma $(x+1)(x^2 + x + 1) = 0$ Obţine $x = -1$ soluţie.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = x' + 3' + (3^x)'$	2p

	$f'(x)=1+0+3^x\ln 3$ $f'(x)=1+3^x\ln 3$	2p 1p
b)	f este crescătoare pe R dacă $f'(x)>0, \forall x\in R$ $f'(x)=1+3^x\ln 3$ $3^x>0, \forall x\in R$ şi $\ln 3>0$ implică $f'(x)>0, \forall x\in R$ Concluzia: f este strict crescătoare pe R.	1p 1p 2p 1p
c)	$f'(1)+f'(2)+...+f'(2012)=1+3\ln 3+1+3^2\ln 3+...+1+3^{2012}\ln 3$ $=2012+\left(3+3^2+3^3+...+3^{2012}\right)\ln 3$ Calculează suma $\left(3+3^2+3^3+...+3^{2012}\right)=3\frac{3^{2012}-1}{2}$ Finalizează $f'(1)+f'(2)+f'(3)+...+f'(2012)=2012+\frac{3}{2}\left(3^{2012}-1\right)\ln 3$	1p 1p 1p 2p
2. a)	Funcţia F este o primitivă pentru funcţia f dacă F este derivabilă şi $F'(x)=f(x)$. F este derivabilă deoarece este sumă de funcţii elementare şi $F'(x)=\left(e^x\right)'+\left(x^4\right)'+\left(x^3\right)'+\left(2x\right)'-2'=e^x+4x^3+3x^2+2$ Deci $F'(x)=f(x)$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\left.\frac{F^2(x)}{2}\right\|_0^1=$ $=\left.\frac{\left(e^x+x^4+x^3+2x-2\right)^2}{2}\right\|_0^1=$ $=\frac{(e+1+1+2-2)^2}{2}-\frac{(e-2)^2}{2}=$	1p 1p 1p 2p

	$=\frac{(e+2)^2-(e-2)^2}{2}=4e$	
c)	Calculează $xf(x)+F(x)=...=xe^x+5x^4+4x^3+4x-2$ $\int_0^1\left(xe^x+5x^4+4x^3+4x-2\right)dx=$ $=\int_0^1 xe^xdx+\int_0^1 5x^4dx+\int_0^1 4x^3dx+\int_0^1 4xdx-\int_0^1 2dx=...=3$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 62

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\|2x-3\|\le 3\Leftrightarrow -3\le 2x-3\le 3\Leftrightarrow 0\le x\le 3$ $A=\{0,1,2,3\}$	3p 2p
2.	$S=f(1)+f(2)+...+f(10)=2\cdot 1+3+2\cdot 2+3+...+2\cdot 10+3$ $S=2\cdot(1+2+...+10)+3\cdot 10$ $S=140$	1p 2p 2p
3.	$3^{2x+4}=3^{x+2}$	1p

	$2x+4=x+2$ $x=-2$	2p 2p
4.	$C_3^1=3$ $A_3^2=6$ $3C_3^1-2A_3^2=-3$	2p 2p 1p
5.	$AB=4\sqrt{2}, BC=2\sqrt{10}, AC=2\sqrt{10}$ $P_{\triangle ABC}=4\sqrt{2}+4\sqrt{10}$	3p 2p
6.	$A_{\triangle MNP}=\dfrac{MN\cdot NP\cdot\sin(\sphericalangle MNP)}{2}$ $\sin(\sphericalangle MNP)=\dfrac{1}{2}$ $A_{\triangle MNP}=12$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(2,1), A_2(4,4)$ $A_1A_2:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$ $A_1A_2: 3x-2y-4=0$	2p 2p 1p
b)	$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{vmatrix}$ $\Delta=4$	2p 1p

	$A_{\triangle OA_1A_2} = \frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert = 2$	2p
c)	Justificarea faptului că $\begin{vmatrix} 2n & 3n-2 & 1 \\ 2p & 3p-2 & 1 \\ 2q & 3q-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare	3p 2p
2. a)	$m=-3 \Rightarrow f = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ $C = x^2 - 3x - 4$ $R = 0$	1p 3p 1p
b)	$f \vdots (x+1) \Leftrightarrow f(-1) = 0$ $f(1) = -1 + m - 2 - 2 + 2m + 14 = 3m + 9$ $3m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -3$	2p 1p 2p
c)	Cu notația $2^x = t > 0 \Rightarrow t^3 - 5t^2 + 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1)(t-4) = 0$ $t = -1 < 0$ $t = 2 \Leftrightarrow x = 1$ $t = 4 \Leftrightarrow x = 2$	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -5, \lim_{x \searrow 0} f(x) = -5, f(0) = -5$ f este continuă în punctul $x_0 = 0$	3p 2p

b)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)}{25-x^2}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{(5-x)(5+x)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{-1}{5+x}$ $\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)}{25-x^2}=-\frac{1}{10}$	3p 2p
c)	Ecuația tangentei este $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$ Pentru $x<0$, $f(x)=\frac{-5}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x<0$ Ecuația tangentei este $y=-\frac{4}{5}x-\frac{13}{5}$	2p 2p 1p
2. a)	F e elementară $\Rightarrow$F e derivabilă $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ e primitivă pentru f	2p 2p 1p
b)	$\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx=\int_2^{4+\ln 2} ydy$ $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx=\left.\frac{y^2}{2}\right\|_2^{4+\ln 2}$ $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx=\frac{\ln^2 2+8\ln 2+12}{2}$	2p 2p 1p
c)	$A=\int_1^e F(x)dx=2\int_1^e xdx+\int_1^e \ln xdx$ $\int_1^e xdx=\frac{e^2-1}{2},\int_1^e \ln xdx=1$ $A=e^2$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 63

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1}$ $S_5 = 31$	3p 2p
2.	$S = f(-3)+f(-2)+\ldots+f(2)+f(3) = (-3)^2+(-2)^2+\ldots+2^2+3^2$ $S = 0$	2p 3p
3.	$x^3-x^2+1 = x^3+3x^2+3x+1$ $4x^2+3x=0$ $x \in \left\{0, -\frac{3}{4}\right\}$	2p 2p 1p
4.	Fie x prețul inițial $\Rightarrow \frac{1}{10}\cdot x$ reprezintă reducerea $\frac{9}{10}\cdot x$ reprezintă prețul după reducere $\frac{9}{10}\cdot x = 180 \Leftrightarrow x = 200$	2p 1p 2p
5.	$\frac{2}{a+2} = \frac{a+3}{3}$ $(a+2)(a+3) = 2\cdot 3 \Leftrightarrow a^2+5a=0$ $a=0$ sau $a=-5$	1p 2p 1p 1p

	$a<0 \Rightarrow a=-5$	
6.	Fie AD $\perp$ BC, cu D∈BC BD=6 AD=8 $A_{\triangle ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}=48$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=4A$ $A^2-4A=O_2$	3p 2p
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot I_2+(I_2+aA)\cdot bA$ $X(a)\cdot X(b)=I_2+aA+bA+abA^2=I_2+aA+bA+4abA$ $X(a)\cdot X(b)=I_2+(a+b+4ab)A$ $\Rightarrow X(a)\cdot X(b)=X(a+b+4ab)$	1p 2p 1p 1p
c)	$X(a)=\begin{pmatrix}1+a & -3a\\ -a & 1+3a\end{pmatrix}$ $\det X(a)=1+4a$ $\det X(a)=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \det X(a)\neq 0,\ \forall a\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow X(a)$ e inversabilă pentru $\forall a\in\mathbb{Z}$	1p 1p 1p 1p 1p
2. a)	$2(x+3)(y+3)-3=2xy+6x+6y+15$ $\Rightarrow x*y=2(x+3)(y+3)-3, \forall x,y\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$(x*y)*z=4(x+3)(y+3)(z+3)-3$	2p

	$x*(y*z)=4(x+3)(y+3)(z+3)-3$ Rezultă că „$*$" este asociativă	2p 1p
c)	$x*(-3)=-3,(-3)*x=-3$ $(-2012)*(-2011)*...*(2011)*(2012)=-3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f^{'}(x)=2012x^{2012-1}+2012^x\ln 2012$ $f^{'}(x)=2012x^{2011}+2012^x\ln 2012$	3p 2p
b)	$f^{''}(x)=2012\cdot 2011x^{2010}+2012^x\ln^2 2012$ $f^{''}(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$	2p 3p
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{x}=f^{''}(0)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{x}=\ln^2 2012$	3p 2p
2. a)	$V_g=\pi\int_0^5\left(\sqrt{x^4+4}\right)^2$ $V_g=\pi\cdot\left.\left(\dfrac{x^5}{5}+4x\right)\right\|_0^5$ $V_g=645\pi$	2p 2p 1p
b)	Justificarea faptului că $F^{'}(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow F^{'}(x)=\sqrt{x^4+4}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 2p 1p

c)	$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$ Justificarea faptului că $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} f(x)dx$ $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{4} f(x)dx$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 64

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x+2=\dfrac{x-2+3x+4}{2}$ $x=1$	3p 2p
2.	$f(6)=0 \Rightarrow$ $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots f(9)=0$	3p 2p

3.	$5-x \succ 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5)$ $\log_2(5-x) = \log_2 3^2$ $5-x=9 \Leftrightarrow x=-4$	1p 2p 2p
4.	$P = \dfrac{nr.caz.\,favorabile}{nr.caz.\,posibile}$ $P = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$	2p 3p
5.	M mijlocul lui $[AB] \Leftrightarrow x_M = 3, y_M = 2$ $m_{AB} = -1$ $m_d = 1$ $d: y-2 = 1\cdot(x-3) \Leftrightarrow x-y-1=0$	1p 1p 1p 2p
6.	$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $R=8$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}, A(-1) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ $A(1)\cdot A(-1) = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$	2p 3p
b)	$(A(x))^2 = \begin{pmatrix} 1+8x-8x^2 & -6x+6x^2 \\ 16x-16x^2 & 1-12x+12x^2 \end{pmatrix}$	2p 2p

	$\Rightarrow A(x)=\begin{pmatrix}1+4(-2x^2+2x) & -3(-2x^2+2x)\\ 8(-2x^2+2x) & 1-6(-2x^2+2x)\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A(x)=A(-2x^2+2x)$	1p
c)	$\det A(1)=-1\neq 0\Rightarrow A$ este inversabilă $A^*=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -8 & 5\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 8 & -5\end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$x_1+x_2+x_3+x_4=a$ $\Leftrightarrow a=-5$	3p 2p
b)	$a=1\Rightarrow x^4-x^3+2x-2=0\Leftrightarrow (x-1)(x^3+2)=0$ $x\in\{1,-\sqrt[3]{2}\}$	3p 2p
c)	Rădăcinile întregi ale ecuației se găsesc printre divizorii lui -2,care sunt $\pm1,\pm2$ $x=1\Rightarrow a=1\in\mathbb{Z}, x=-1\Rightarrow a=-1\in\mathbb{Z}, x=2\Rightarrow a=\frac{7}{2}\notin\mathbb{Z}, x=-2\Rightarrow a=-\frac{7}{2}\notin\mathbb{Z}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=3x^2-2x+1+2012^x\ln 2012$ $\Rightarrow f'(0)=1+\ln 2012$	3p 2p
b)	$f'(x)=2x^2+(x-1)^2+2012^x\ln 2012\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	3p 2p

c)	$a \le b,\ f$ crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f(a) \le f(b)$ $\Rightarrow a^3 - a^2 + a - b^3 + b^2 - b \le 2012^b - 2012^a$	3p 2p
2. a)	$f_0(x) = 4$ $\Rightarrow \int f_0(x)\,dx = 4x + C$	3p 2p
b)	$f_1(x) = 4x^2 + 4x + 4 \succ 0, \forall x \in [0,1]$ $\Rightarrow A = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x\right)\Big\|_0^1$ $\Rightarrow A = \frac{22}{3}$	1p 2p 2p
c)	$f_2(x) = 16x^2 + 8x + 4$ $I = \int_1^2 \left(\frac{f_2(x) - 4}{x}\right) \cdot e^x dx = \int_1^2 (16x + 8) \cdot e^x dx = 8\int_1^2 (2x+1) \cdot e^x dx$ $\int_1^2 (2x+1) \cdot e^x dx = (2x+1) \cdot e^x \Big\|_1^2 - 2e^x \Big\|_1^2 = 3e^2 - e$ $\Rightarrow I = 8 \cdot (3e^2 - e)$	1p 1p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 65

Prof: PODUMNEACĂ DANIELA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_1 = 1, r = 2, n = 10$ în progresie aritmetică $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 100$, $a_{10} = x$ $\frac{(1+x)10}{2} = 100$, $x = 19$	3p 2p
2.	$(x-7)^2 - (7-x) \le 0$, $(x-7)(x-6) \le 0$, $x \in \{6, 7\}$	1p 2p 2p
3.	$x + 8 > 0 \Rightarrow x \in (-8, \infty)$ $\log_2 \frac{x^2+8}{x+8} = 0$, $\frac{x^2+8}{x+8} = 1$ $(x-1)x = 0 \Rightarrow x \in \{0;1\}$	1p 2p 2p
4.	A_5^3 60 numere	2p 3p
5.	$\frac{a-3}{5} = \frac{8}{10a}$, $a(a-3) = 4$ $a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 4\}$	2p 3p
6.	$d \parallel MN \Rightarrow m_d = m_{MN}$ $m_{MN} = -\frac{1}{2}$ d: $x + 2y + 1 = 0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 3 \cdot (-2)$ $\det A = 6$	3p 2p

b)	$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$	2p
	Calcul $A^*=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$	2p
	$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$	1p
c)	$A^2=\begin{pmatrix}19 & -10\\ 15 & -6\end{pmatrix}, A\cdot A^{-1}=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 3A=\begin{pmatrix}15 & -6\\ 9 & 0\end{pmatrix}$	3p
	$A^2+A\cdot A^{-1}+3A=\begin{pmatrix}35 & -16\\ 24 & -5\end{pmatrix}$.	2p
2.	$x*y=3xy+6x+6y+12+2$	1p
a)	$x*y=3x(y-2)-6(y-2)+2$	3p
	$x*y=3(x-2)(y-2)+2, \forall x,y\in\mathbb{R}$	1p
b)	$3(2^x-2)(\lg x-2)+2=2 \Rightarrow (2^x-2)(\lg x-2)=0$	3p
	$2^x=2\Rightarrow x=1\notin(2,\infty)$ şi $\lg x=2\Rightarrow x=100\in(2,\infty)$, $S=\{100\}$	2p
c)	$\left.\begin{array}{l}x\in(2,\infty)\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x-2>0\\ y\in(2,\infty)\Leftrightarrow y>2\Leftrightarrow y-2>0\end{array}\right\}\Rightarrow(x-2)(y-2)>0$	2p
	$(x-2)(y-2)+2>2 \Leftrightarrow$	2p
	$x*y\in(2,\infty)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{3x^2}{3}-1+\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$	2p
		2p

	$f'(x)=x^2-1+\frac{2x}{x^2+1}$, $f'(x)=\frac{x^4+2x-1}{x^2+1}$	1p
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ $f'(1)=1$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$	2p 2p 1p
c)	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f'(0)=-1$ Ecuaţia tangentei este x + y = 0.	2p 1p 2p
2. a)	$\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=f(0)=6\Rightarrow f$ continuă în punctul 0, f funcţie elementară$\Rightarrow$f continuă pe $\mathbb{R}^*$ funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$.	2p 2p 1p
b)	Pentru $x>0$, $\int_1^1 f(x)dx=\int_1^2(x^2-2x+6)dx$ $\int_1^2 f(x)=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+6x\right)\right\|_1^2$ $\int_1^2 f(x)=-\frac{2}{3}$	2p 2p 1p
c)	$A=\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0 x(e^x+5)dx=$ $=\int_{-1}^0 xe^x dx+\int_{-1}^0 5xdx=$ $=\left.xe^x\right\|_{-1}^0-\left.e^x\right\|_{-1}^0+5\left.\frac{x^2}{2}\right\|_{-1}^0=$	1p 1p 2p

	$=\dfrac{4-7e}{2e}$	1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 66

Prof: PODUMNEACĂ DANIELA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_3 \dfrac{15\cdot 6}{18}=$ $=\log_5 5=1$	3p 2p
2.	Soluţii reale distincte dacă $\Delta>0$ $\Delta=(-2m-1)^2-4m=4m^2+1$ $4m^2+1>0$ pentru $\forall m\in\mathbb{R}$	1p 2p 2p
3.	Conform injectivităţii $1+\sqrt{2x+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=x-1 \Leftrightarrow$ Condiţii pentru rezolvarea ecuaţiei iraţionale $\left.\begin{matrix}2x+1\geq 0\\ x-1\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\geq 1\Leftrightarrow x\in[1,\infty)$ $\Leftrightarrow x^2-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\notin[1,\infty)\\ x=4\in[1,\infty)\end{cases}$ Mulţimea soluţiilor $S=\{4\}$	1p 1p 2p 1p
4.	Numărul tuturor submulţimilor este $2^4=16$ Numărul submulţimilor cu 2 elemente $C_4^2=6$	1p 2p 2p

	Probabilitatea $P=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$	
5.	Din $y=7x-3 \Rightarrow m_d=7$ si $m_{PQ}=\frac{3m-2}{-3-m}$	2p
	Din $d \parallel PQ \Rightarrow m_d=m_{PQ} \Leftrightarrow 7=\frac{3m-2}{-3-m} \Rightarrow$	2p
	$m=-\frac{19}{10}$	1p
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B \Rightarrow$	1p
	Prin calcul $\Rightarrow AC=\sqrt{37}$,	2p
	Perimetrul este $P=AB+BC+AC=11+\sqrt{37}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dacă matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\2&-1&a\end{pmatrix}$ atunci,,	2p
	$\det A=2a+2$	3p
b)	Prin calcul direct $M(1,1,0)$ verifică toate ecuaţiile,	3p
	Din ecuaţia trei $\Rightarrow$soluţia nu depinde de a	2p
c)	$d_x=\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&1\\1&-1&a\end{vmatrix}=2a+2$, $d_y=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\2&1&a\end{vmatrix}=2a+2$, $d_z=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\2&-1&1\end{vmatrix}=0$	3p
	$x=\frac{d_x}{\det A}=1$, $y=\frac{d_y}{\det A}=1$, $z=\frac{d_z}{\det A}=0$, soluţia sistemului este $S=\{(1,1,0)\}$.	2p
2. a)	Restul este $r=f(-3)=$	2p
	$=7$.	3p
b)	Suma rădăcinilor este $S_1=\frac{-2}{1}=$	3p

	= -2.	2p
c)	$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1-S_1+S_2-S_3=$ = -1.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Asimptota este $y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6^x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6^x(1-\frac{1}{6^x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e}{6}\right)^x\frac{1}{(1-\frac{1}{6^x})}=0$ $y=0$ asimptotă orizontală la $+\infty$.	1p 3p 1p
b)	Funcţia $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}=\frac{1}{6^x-1}$, $g'(x)=\frac{-6^x\ln 6}{(6^x-1)^2}$	2p 3p
c)	Cum $6^x\ln 6>0, \forall x\in\mathbb{R}$ $(6^x-1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ Rezultă că $g'(x)=\frac{-6^x\ln 6}{(6^x-1)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}^*, \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x)$ descrescătoare pe $\mathbb{R}^*$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$F(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$ $F(0)=\frac{1}{2}\ln 1+c=5\Rightarrow c=5$	2p 2p

	O primitivă a funcţiei este $F(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+5$.	1p
b)	$\int_0^1 \frac{1}{x} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx =$ $= arctgx\Big\|_0^1 =$ $=\frac{\pi}{4}$	2p 2p 1p
c)	$\int_0^1 xf'(x)dx = x\cdot f(x)\Big\|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx =$ $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big\|_0^1 =$ $=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$.	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 67

Prof: PODUMNEACĂ DANIELA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt[3]{2\cdot 32}-1=\sqrt[3]{64}-1=$ $=4-1=3$	3p 2p
2.	$f(3^0)=2+3^0$; $f(3^1)=2+3^1$; $f(3^2)=2+3^2$;...: $f(3^{10})=2+3^{10}$	1p

	Suma lor este $11\cdot 2+3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{10}=11\cdot 2+1\cdot\frac{3^{11}-1}{3-1}=\ldots$ $=\frac{3^{11}+43}{2}$	2p 2p
3.	$x+3\geq 0, 5-x\geq 0\Rightarrow x\in[-3;5]$ Ecuaţia echivalentă $x+3=(5-x)^2 \Leftrightarrow x^2+11x+22=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=\frac{11-\sqrt{33}}{2}\in[-3;5]$ şi $\Rightarrow x_1=\frac{11+\sqrt{33}}{2}\notin[-3;5]$,soluţia $S=\{\frac{11-\sqrt{33}}{2}\}$.	1p 2p 2p
4.	$P_5=5!=$ $=720$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}=\vec{0}$ Cum $\overrightarrow{NP}=-\overrightarrow{PN}$ şi $\overrightarrow{QM}=-\overrightarrow{MQ}$,atunci $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$	2p 2p 1p
6.	$\sin 45^0\cdot\cos 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$ $=\frac{\sqrt{6}}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\Delta(1,-1)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=$ $=3-2+9=10$	2p 3p
b)	$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=x-9y+3$. Atunci $\begin{cases}x+y=-6\\ x-9y+3=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-1\end{cases}$	2p 3p
c)	$\Delta(x,y)=x-9y+3\Rightarrow\Delta(x,x)=-8x+3$	1p

	$\Delta(x,x)=0 \Rightarrow -8x+3=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\frac{3}{8}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow \Delta(x,x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{Z}$	2p 2p
2. a)	$f \vdots (x-2) \Leftrightarrow f(2)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -a+2=0 \Rightarrow a=2\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	Relaţia este $3S_3-2S_1=3 \Leftrightarrow$ $S_1=a; S_3=-(a-6)$, atunci Relaţia devine $-5a+18=3 \Rightarrow a=3$	1p 2p 2p
c)	Dacă a = 6 atunci polinomul este de forma $f=X^3+6X^2+6X=$ $=X(X^2+6X+6)=$ $=X(X-3+\sqrt{3})(X+3-\sqrt{3})$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcţia admite asimptote verticale în punctele x = 0 şi x = 2. $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$ $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=+\infty \Rightarrow x=2$	1p 2p 2p
b)	$f'(x)=\frac{-2(x^2+x-1)}{(x^2-2x)}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=$ $=-2$	2p 2p 1p
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\neq 0;\neq 2$	2p 1p 2p

2. a)	$A=\int_1^2 f(x)dx=$ $=(x-\frac{x^4}{4})\Big\|_1^2=$ $=\frac{-13}{4}$	2p 2p 1p
b)	$\int_{-1}^1 x^5\cdot f(x)dx=\int_{-1}^1(x^5-x^8)dx=$ $=(\frac{x^6}{6}-\frac{x^9}{9})\Big\|_{-1}^1=$ $=-\frac{2}{9}$	2p 2p 1p
c)	$\int_0^1 x\cdot f''(x)dx=\int_0^1 x\cdot(-6x)dx=$ $=-6\int_0^1 x^2dx=$ $=-2$	2p 2p 1p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 68

Prof: PODUMNEACĂ DANIELA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \Leftrightarrow -1 = a_1 + r \\ a_6 = a_1 + 5r \Leftrightarrow -17 = a_1 + 5r \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 = 3, r = -4$ $a_{10} = a_1 + 9r = -33$	1p 1p 2p 1p
2.	$\left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ x-6>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (6,\infty)$ $\log_4 \frac{x+2}{x-6} = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-6} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow -3x = -26 \Rightarrow x = \frac{26}{3} \in (6,\infty)$	1p 2p 2p
3.	$\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{3}{4} \\ y_v = \frac{17}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow V(\frac{3}{4}, \frac{17}{9})$	2p 2p 1p
4.	$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = 2\frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n-2 = 12 \Rightarrow n = 14 \in \mathbb{N}$	2p 3p
5.	$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-m)^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{9+(3+m)^2} = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3+m = 0 \Rightarrow m = -3$	2p 2p 1p
6.	$tg\,45^0 - 2\cos 180^0 = 1 - 2\cdot(-1) =$ $= 3$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_0(1,0) : A_2(4,4)$	1p 2p 2p

	$A_0A_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4x + 3y + 4 = 0$	
b)	$A_1(2,1)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow A_0, A_1, A_2$ nu sunt coliniare	1p 3p 1p
c)	$A_n(2^n, n^2); A_{n+1}(2^{n+1}, (n+1)^2); A_n(2^{n+2}, (n+2)^2)$ $\begin{vmatrix} 2^n & n^2 & 1 \\ 2^{n+1} & (n+1)^2 & 1 \\ 2^{n+2} & (n+2)^2 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot (-2n+1)$ $2^n \cdot (-2n+1) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ punctele nu sunt coliniare.	1p 2p 2p
2. a)	$x \circ y = xy - 5x - 5y + 25 + 5 =$ $= x(y-5) - 5(y-5) + 5 =$ $= (x-5)(y-5) + 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$	1p 2p 2p
b)	$\exists e \in \mathbb{R}, a.i. x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} x \circ e = x \Rightarrow e = 6, x \neq 5 \\ e \circ x = x \Rightarrow e = 6, x \neq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow e = 6 \in \mathbb{R}$	1p 2p 2p
c)	Se observă că $x \circ 5 = 5, \forall x \in \mathbb{R}$ $\underbrace{(-2012) \circ (-2011) \circ \ldots \circ 4}_{a} \circ 5 \circ \underbrace{6 \circ \ldots \circ 2012}_{b} = a \circ 5 \circ b =$ $= 5 \circ b = 5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, cum $f(1) = 3$	1p
	$f'(x) = \frac{1}{x} + 3^x \ln 3$	1p
	şi panta dreptei $f'(1) = \ln 27e$	1p
	ecuaţia tangentei este $(\ln 27e)x - y + 3 - \ln 27e = 0$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x + 3^x}{x+3} =$	2p
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + 3^x \ln 3}{1} = \infty$	3p
c)	Funcţia f este crescătoare pe $(0,\infty)$ dacă $f'(x) > 0$	1p
	$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0,\infty) \\ 3^x > 0, \forall x \in (0,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$	1p
		1p
	$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow$f crescătoare pe $(0,\infty)$	1p
2. a)	$\int_1^e (f(x) - \frac{1}{x+3})dx = \int_1^e \frac{1}{x+5}dx =$	2p
	$= \ln(x+5)\Big\|_1^e =$	2p
	$= \ln\frac{e+5}{e+1}$	1p
b)	$\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big\|_1^2 =$	2p
	$= -\frac{31}{420}$	3p
c)	$g(x) = f(x) - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+3}$	1p
		1p
		2p
		1p

	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=$ $=\pi\int_1^2 (\frac{1}{x+3})^2 dx=\int_1^2 (x+3)^{-2}dx=$ $=-\pi(\frac{1}{x+3})\Big\vert_1^2=\frac{\pi}{4}$	

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 69

Prof: PODUMNEACĂ DANIELA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_n 32=a\in\mathbb{N}\Rightarrow 32=n^a\Rightarrow$ $\Rightarrow n=2, n=32$	3p 2p
2.	$f_{\max}=\frac{-\Delta}{4a}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{1}{8}=\frac{9+8a}{8}\Rightarrow$ $\Rightarrow a=-1$	1p 2p 2p
3.	$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2(3-x)}\Rightarrow$ $\Rightarrow x-2=2(3-x)\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\frac{8}{3}$	1p 2p 2p
4.	$x+12\%x=3920\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\cdot\frac{28}{25}=3920\Rightarrow x=3500$	2p 3p

5.	$\frac{l^2}{A_\triangle}=\frac{l^2}{l^2\frac{\sqrt{3}}{4}}=$ $=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$	3p 2p
6.	Din teorema cosinusului $\Rightarrow \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=$ $=\frac{16+8-27}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{32}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A=\begin{vmatrix}2x-\sqrt{3} & 2x\\ 2x & 2x+\sqrt{3}\end{vmatrix}=$ $\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)-4x^2=$ $=4x^2-3-4x^2=-3$	1p 2p 2p
b)	$A(x)\cdot A(X)=\begin{pmatrix}8x^2-4\sqrt{3}x+3 & 8x^2\\ 8x^2 & 8x^2+4\sqrt{3}x+3\end{pmatrix}$, (1) $4x\cdot A(x)+3I_2=\begin{pmatrix}8x^2-4\sqrt{3}x & 8x^2\\ 8x^2 & 8x^2+4\sqrt{3}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, (2) Din calcul direct (1) = (2)	2p 2p 1p
c)	$A^2(x)\overset{(b)}{=}4x\cdot A(x)+3I_2$ $A^2(2)-8\cdot A(2)=8\cdot A(2)+3I_2-8\cdot A(2)=$ $=3I_2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(x\circ y)\circ z=(x+y-4)\circ z=x+y+z-8=x\circ(y+z-4)=x\circ(y\circ z)$ Legea "$\circ$" este asociativă $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.	1p 3p 1p

b)	$(2 \perp 3) \circ (4 \perp 5) = (12) \circ (30) - 4 =$ $= 12 + 30 - 4 = 38$	3p 2p
c)	Ecuaţie echivalentă cu $\left(x^2 + 2x + 1\right) \circ (3 - 2x) = 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x^2 - 4x + 5a =$ pătrat perfect dacă $a = \frac{4}{5}$ Atunci $f(x) = \frac{x-5}{(x-2)^2} \Rightarrow f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ f are o singură asimptotă.	3p 2p
b)	Funcţia devine $f(x) = \frac{x-5}{(x-2)^2}$, $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{-(x-8)}{(x-2)^3}$	2p 3p
c)	Conform (b) $f'(x) < 0, \forall x \in (8, \infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow$f descrescătoare pe intervalul $(8, \infty)$	3p 2p
2. a)	Funcţia f este o primitivă a funcţiei g dacă $f'(x) = g(x)$ $f'(x) = \left(\sqrt{2x-7}\right)' = \frac{(2x-7)'}{2\sqrt{2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{2x-7}} = g(x)$	2p 3p
b)	$\int_4^5 g(x)dx \underset{(a)}{=} f(x)\Big\|_4^5 =$ $= f(5) - f(4) = \sqrt{3} - 1$	3p 2p

c)	$V=\pi\int_4^6 h^2(x)dx=\pi\int_4^6\left(\sqrt{2x-7}\right)^2 dx=$ $=\pi\int_4^6(2x-7)dx=$ $=\pi\left(\frac{2x^2}{2}-7x\right)\Big\|_4^6=6\pi$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 70

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases}a_1=2\\a_5=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=2\\a_1+4r=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=2\\r=3\end{cases}$ $\Rightarrow a_{100}=a_1+99r=299$ $\Rightarrow S_{100}=\frac{(a_1+a_{100})\cdot 100}{2}=15050$	3p 1p 1p
2.	$\begin{cases}x_1+x_2=m-1\\x_1x_2=m-1\end{cases}$ Rel.devine: $\sqrt{m-1}+\sqrt{9-(m-1)}=3\Leftrightarrow\sqrt{m-1}+\sqrt{10-m}=3(*)$ Cond.: $\begin{cases}m-1\geq 0\\10-m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 1\\m\leq 10\end{cases}\Rightarrow m\in[1;10]$	1p 1p

	Ridicand la pătrat în ambii membri,ecuatia (*)devine: $m-1+2\sqrt{m-1}\cdot\sqrt{10-m}+10-m=9 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}\cdot\sqrt{10-m}=0$ $\sqrt{m-1}=0 \Rightarrow m=1\in[1;10]$ sau $\sqrt{10-m}=0 \Rightarrow m=10\in[1;10]$	1p 2p
3.	Cond.ca logaritmii sa fie corect definiti: $\begin{cases}2x-5>0\\ x^2-8>0\\ \log_2(x^2-8)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(\frac{5}{2};+\infty)\\ x\in(-\infty;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};+\infty) \Rightarrow D=(2\sqrt{2};+\infty)-\{10\}\\ x\neq\pm 10\end{cases}$ Ec.devine $2\log_2(2x-5)=\log_2(x^2-8) \Leftrightarrow \log_2(2x-5)^2=\log_2(x^2-8) \Leftrightarrow (2x-5)^2=x^2-8$ $\Rightarrow 3x^2-20x+33=0 \Rightarrow x_1=3\in D$ si $x_2=\frac{11}{3}\in D$	1p 2p 2p
4.	$f(1)=m^2-m+m+1=m^2+m$ $m^2+m\geq -\frac{1}{4}$ $4m^2+4m+1\geq 0$ $(2m+1)^2\geq 0\,(A)\ \forall m\in\mathbb{R}$	1p 2p 1p 1p
5.	$C_{12}^3=C_{12}^9\left(combinari\ complementare\right)$ Finalizare: $C_{12}^3-C_{12}^9=0$	3p 2p
6.	Notăm cu *h* înălţimea dusă din A pe latura BC $\Rightarrow m_h\cdot m_{BC}=-1$	1p

	$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{3+2}{-4-6}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_h\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Rightarrow m_h=2$ $y-y_0=m\left(x-x_0\right)\Rightarrow$y-6=2(x-2)	2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$Fie\ A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\cdot\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\in M,\hat{a},\hat{b}\in Z_5$; luam $\hat{a}=\hat{1}$ si $\hat{b}=\hat{0}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}=I_2$ Daca luam $\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}=O_2$ $\Rightarrow I_2\ ,O_2\ \in$ M.	2p 2p 1p
b)	$Fie\ A=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\cdot\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\in M,\hat{a},\hat{b}\in Z_5$ si $B=\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{d}\\ \hat{2}\cdot\hat{d} & \hat{c}\end{pmatrix}\in M;\hat{c},\hat{d}\in Z_5$ $A+B=\begin{pmatrix}\hat{a}+\hat{c} & \hat{b}+\hat{d}\\ \hat{2}\cdot\hat{b}+\hat{2}\,\hat{d} & \hat{a}+\hat{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}+\hat{c} & \hat{b}+\hat{d}\\ \hat{2}\cdot\left(\hat{b}+\hat{d}\right) & \hat{a}+\hat{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{m} & \hat{n}\\ \hat{2}\cdot\hat{n} & \hat{m}\end{pmatrix}\in M$, unde $\hat{m}=\hat{a}+\hat{c}\in\mathbb{Z}_5$ si $\hat{n}=\hat{b}+\hat{d}\in\mathbb{Z}_5$ $A\cdot B=\begin{pmatrix}\hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\\ \hat{2}\hat{b}\hat{c}+\hat{2}\hat{a}\hat{d} & \hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d} & \hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\\ \hat{2}\cdot\left(\hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\right) & \hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{p} & \hat{q}\\ \hat{2}\cdot\hat{q} & \hat{p}\end{pmatrix}\in M$, unde $\hat{p}=\hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d}\in\mathbb{Z}_5$ si $\hat{q}=\hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\in\mathbb{Z}_5$	2p

		3p
c)	A $\in$ M este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq \hat{0}$ $\hat{a}^2 - \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}^2 \neq \hat{2}\hat{b}^2$ Pentru $\hat{a} = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{0} \Rightarrow \hat{b} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\Rightarrow$se construiesc 4 matrice inversabile Pentru $\hat{a} = \hat{1} \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{1} \Rightarrow \hat{b} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\Rightarrow$se construiesc 5 matrice inversabile Pentru $\hat{a} = \hat{2} \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{2}^2 \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{4} \Rightarrow \hat{b} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\Rightarrow$se construiesc 5 matrice inversabile Pentru $\hat{a} = \hat{3} \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{3}^2 \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{4} \Rightarrow \hat{b} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\Rightarrow$se construiesc 5 matrice inversabile Pentru $\hat{a} = \hat{4} \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{4}^2 \Rightarrow \hat{2}\hat{b}^2 \neq \hat{1} \Rightarrow \hat{b} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ $\Rightarrow$se construiesc 5 matrice inversabile Deci mulţimea U(M) = {A $\in$ M | există $A^{-1} \in$ M }are 24 elemente	1p 2p 2p
2. a)	$\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = X^4 - X^2 + \frac{1}{4} + X^2 + X + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$ $= X^4 + X + 1 = f$	4p 1p
b)	x_1 rădăcină a polin.$f \Rightarrow f(x_1)=0 \Rightarrow x_1^4 + x_1 + 1 = 0\ (1)$ x_2 rădăcină a polin.$f \Rightarrow f(x_2)=0 \Rightarrow x_2^4 + x_2 + 1 = 0\ (2)$ x_3 rădăcină a polin.$f \Rightarrow f(x_3)=0 \Rightarrow x_3^4 + x_3 + 1 = 0\ (3)$	3p

	x_4 rădăcină a polin.$f \Rightarrow f(x_4)=0 \Rightarrow x_4^4+x_4+1=0\,(4)$ Însumând cele 4 relaţii$\Rightarrow \left(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\right)+\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)+4=0$,dar cf.rel.Viete ştim că $x_1+x_2+x_3+x_4=0 \Rightarrow x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=-4$	1p 1p
c)	Conform pct.*a)* $f=\underbrace{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\frac{1}{2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ Polinomul *f* nu admite rădăcini reale.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;f este continuă pe R,derivabilă pe R şi $f'(x)=e^x-1$	2p
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>------- -------------0 +++++++++++++++++++++</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>$+\infty$ ↘↘↘↘↘ 0 ↗↗↗↗↗ $+\infty$</td></tr></table>	2p
	finalizare	1p
b)	Din tabelul de la punctul a) se observă că f are un minim global egal cu 0 atins pentru x=0 $\Rightarrow f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$	3p 2p
c)	Din b) $\Rightarrow f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e^x\geq x+1,\forall x\in\mathbb{R}\,(1)$; Cf.rel.(1) $\Rightarrow e^{x^2}\geq x^2+1,\forall x\in[0;1] \Rightarrow \frac{1}{x^2+1}\geq\frac{1}{e^{x^2}}=e^{-x^2}$ (2) Deoarece $x\in[0;1]\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1\Rightarrow x-1\leq 0/\cdot(x+1)>0\Rightarrow$ $x^2-1\leq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1/\cdot(-1)\Rightarrow -x^2\geq -1$ $\Rightarrow e^{-1}\leq e^{-x^2}\,(3)$;	2p

	Din (2)si (3) $\Rightarrow e^{-1} \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2+1}$ (prin integrare) $\Rightarrow \int_0^1 e^{-1}dx \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow$ $\frac{1}{e}\cdot x\Big\|_0^1 \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le arctgx\Big\|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le \frac{\pi}{4}$	2p 1p
2. a)	Funcţia *f* are minim(a=1>0) şi $V_f\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{4}\right)$ Funcţia *g* are maxim (a= -1<0) şi $V_g\left(\frac{3a}{2};\frac{9a^2}{4}\right)$	2p 3p
b)	Studiem semnul diferenţei $f(x)-g(x)=2x^2-4ax$ $\Rightarrow$ $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4ax=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow f(0)=g(0)=0 \Rightarrow O(0,0) \\ x_2=2a \Rightarrow f(2a)=g(2a)=2a^2 \Rightarrow P(2a,2a^2) \end{cases}$ x: 0 … 2a f(x) - g(x): +++++++++++++++++0 - - - - - - - - - - -0+++++++++++++++ $\Rightarrow f(x)-g(x)\le 0, \forall x\in[0,2a] \Rightarrow g(x)\ge f(x), \forall x\in[0,2a]$ Calculăm $S=\int_0^{2a}(g(x)-f(x))dx=\int_0^{2a}(-2x^2+4ax)dx=\left(-2\frac{x^3}{3}+4a\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^{2a}=\frac{8a^3}{3}$	2p 2p

		1p
c)	Ecuatia dreptei OP: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a & 2a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - ax = 0 \Rightarrow y = ax \overset{not.}{=} h(x)$ Notăm cu S_1 suprafaţa cuprinsă între curba lui g şi dreapta OP Notăm cu S_2 suprafaţa cuprinsă între curba lui f şi dreapta OP $\Rightarrow S_1 = \int_0^{2a} (g(x) - h(x))dx = \int_0^{2a} (2ax - x^2)dx = \left(2a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^{2a} = \frac{4a^3}{3} (1)$ $S_2 = \int_0^{2a} (h(x) - f(x))dx = \int_0^{2a} (2ax - x^2)dx = \frac{4a^3}{3} (2)$	1p 2p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 71

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$100^{\lg 2} \overset{notam}{=} a \Rightarrow \left(folosim\ operatia\ de\ \log aritmare \right) \Rightarrow \lg 2 \cdot \lg 100 = \lg a \Rightarrow$ $2\lg 2 = \lg a \Rightarrow \lg\left(2^2\right) = \lg a \Rightarrow a = 2^2 = 4$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ Finalizare:A=4-3=1$\in \mathbb{N}$	3p 1p 1p
2.	Ecuatia devine $\sqrt{1-x^2} = 1-x(*)$ Cond.ca radicalul sa fie corect definit: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ x \in (-\infty;1] \end{cases} \Rightarrow x \in [-1;1]$ Ridicând la pătrat în ambii membri ai ec. $(*)$ obţinem $1-x^2 = 1-2x+x^2$ $\Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow S = \{0;1\}$	1p 2p 2p
3.	Graficul ei taie axa Oy în punctul 1 $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{4}{2a} \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$ Finalizare: f (x) = $3x^2 + 4x + 1$	2p 2p 1p
4.	Avem coordonatele punctelor A(2;0);B(1;-1);C(1;1)$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j}$; $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - \vec{j}$ Produsul scalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\vec{i} + \vec{j}\right) \cdot \left(-\vec{i} - \vec{j}\right) = (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$	2p 2p

	Calculăm laturile: $BA=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$; $BA=\sqrt{(2-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$	1p
5.	$\frac{4}{m-1}=\frac{m+1}{2}\Rightarrow$ $m^2-1=8\Rightarrow m^2-9=0\Rightarrow m_{1,2}=\pm 3$	2p 3p
6.	$y-y_0=m(x-x_0)$ $m=tg30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $y-6=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 5 & 15\end{pmatrix}$ $5A=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 5 & 15\end{pmatrix}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	Verificare: $A^2=5A$ (conform pct.a); $A^3=A^2\cdot A=5A\cdot A=5A^2=5\cdot 5A=5^2\cdot A$ $P(k)\Rightarrow P(k+1)$: $A^{k+1}=A^k\cdot A=5^{k-1}A\cdot A=5^{k-1}A^2=5^{k-1}\cdot 5A=5^k\cdot A$ $\Rightarrow P(n)$ adevarata $\forall n\in\mathbb{N}^*$	2p 3p
c)	$A-A^2+A^3-.........+(-1)^{99}A^{100}\overset{folos.pct.b)}{=}A-5A+5^2A-5^3A+.........+(-1)^{99}5^{99}A=$ $=A\left(1-5+5^2-5^3+.........+(-1)^{99}5^{99}\right)\underset{q=-5}{=}A\cdot\frac{(-5)^{100}-1}{-5-1}=A\frac{5^{100}-1}{-6}=-\frac{5^{100}-1}{6}\cdot A$ Finalizare: toate elementele matricei devin strict negative prin inmultirea elementelor din A cu o fractie negativa	2p 2p

		1p
2. a)	Calculăm $2(x-3)(y-3)+3=2(xy-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+18+3=2xy-6x-6y+21=$ $=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	$(x\circ y)\circ z=\Big(\underbrace{2xy-6x-6y+21}_{not.a}\Big)\circ z=a\circ z=2az-6a-6z+21=$ $=2(2xy-6x-6y+21)z-6(2xy-6x-6y+21)-6z+21=$ (1) $=4xyz-12xy-12xz-12yz+36x+36y+36z-105, \forall x,y\in\mathbb{R}$ $x\circ(y\circ z)=x\circ\Big(\underbrace{2yz-6y-6z+21}_{not.b}\Big)=x\circ b=2xb-6x-6b+21=$ $=2x(2yz-6y-6z+21)-6x-6(2yz-6y-6z+21)+21=$ (2) $=4xyz-12xy-12xz-12yz+36x+36y+36z-105, \forall x,y\in\mathbb{R}$ Din (1) şi (2) $\Rightarrow$asociativitatea	2p 2p 1p
c)	$x\circ x\underset{cf.a)}{=}2(x-3)(x-3)+3=2(x-3)^2+3$ $x\circ x\circ x\underset{cf.b)}{=}(x\circ x)\circ x=\left(2(x-3)^2+3\right)\circ x=2\left(2(x-3)^2+3-3\right)(x-3)+3=$ $=2\cdot 2(x-3)^2(x-3)+3=2^2(x-3)^3+3$ $\Rightarrow \underbrace{x\circ x\circ ....\circ x}_{de\, n\, ori}=2^{n-1}(x-3)^n+3$ (dem.prin inducţie matematică)(propozitia P(n)) P(k) $\Rightarrow$ P(k+1) P(k+1): $\underbrace{x\circ x\circ ....\circ x}_{de\, k+1\, ori}=\Bigg(\underbrace{x\circ x\circ ....\circ x}_{de\, k\, ori}\Bigg)\circ x=\left(2^{k-1}(x-3)^k+3\right)\circ x=a\circ x=2(a-3)(x-3)+3=$ $=2\left(2^{k-1}(x-3)^k+3-3\right)(x-3)+3=2\cdot 2^{k-1}(x-3)^k(x-3)+3=2^k(x-3)^{k+1}+3$ $\Rightarrow$ propozitia P(n) este adevărată	1p 1p 2p

	Ecuaţia devine: $\underbrace{x \circ x \circ .... \circ x}_{de\,2012\,ori} = 3 \Leftrightarrow 2^{2012-1}(x-3)^{2012} + 3 = 3 \Leftrightarrow 2^{2011}(x-3)^{2012} = 0 \Leftrightarrow$ $(x-3)^{2012} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = 3 \Rightarrow$ Valoarea de adevar:fals	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<table>
<tr><td>1.
a)</td><td>$f'(x) = e^x(4-e^x) + e^x(-e^x) =$
$= e^x(4-e^x-e^x) = e^x(4-2e^x) = 2e^x(2-e^x)$</td><td>3p

2p</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Not.cu d tangenta la curba $\mathcal{C}$ a funcţiei f în punctul P ;cum $d \parallel Ox \Rightarrow m_d = m_{Ox} = 0$

Dar $m_d = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot e^x(2-e^x) = 0$

$\Rightarrow e^x = 0$ (ecuatia nu are solutii reale)

Sau $2 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow$x=ln2

Calculăm $f(\ln 2) = e^{\ln 2}(4 - e^{\ln 2}) = 2(4-2) = 4 \Rightarrow$P(ln2;4)</td><td>2p

2p

1p</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Studiem monotonia funcţiei f :

$f'(x) = 2e^x(2-e^x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0(4-0) = 0$ şi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty(4-\infty) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

<table><tr><td>x</td><td>-∞ ln2 +∞</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>++++++++++++++++++++0- -</td></tr></table></td><td>

2p</td></tr>
</table>

	$f(x)$ 0 ↗↗↗↗↗↗↗↗↗↗ 4 ↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘↘ $-\infty$	2p
	maxim $\Rightarrow$monotonia lui $f \Rightarrow f(x) \le 4, \forall x \in \mathbb{R}$	1p
2. a)	$f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{\ln x(1-\ln x)}{x^2} \overset{not.F}{=} F(x)$;studiem semnul lui F pe domeniul $(0;+\infty)$ f(x)=0$\Rightarrow$x=1;x=e	2p
	(tabelul de semn de mai jos)	2p
	$\Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = F(x) \ge 0, \forall x \in [1;e]$	1p
b)	Din a) $\Rightarrow f_1(x) \ge f_2(x), \forall x \in [1;e] \Rightarrow$ $A_{\Gamma_{f_1;f_2}} = \int_1^e (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx - \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx \overset{not.}{=} I_1 - I_2 \ (*)$	2p
	Folosim metoda integrarii prin parti$\Rightarrow I_1 = -\frac{2}{e}+1; I_2 = -\frac{5}{e}+2;$	2p
	Finalizare: $A_{\Gamma_{f_1;f_2}} = I_1 - I_2 = \frac{3}{e} - 1$	1p
c)	$V_{C_g} = \pi\int_1^e g^2(x)dx = \pi\int_1^e \frac{(\ln x - \ln^2 x)^2}{x}dx = \pi\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln^3 x}{x} + \frac{\ln^4 x}{x}\right)dx = \pi(I_3 - 2I_4 +$	2p
	Folosim metoda integrarii prin parti$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{3}; I_4 = \frac{1}{4}; I_5 = \frac{1}{5} \Rightarrow$	

x	0	1	e	$+\infty$
lnx		- - - - - - - - 0 ++++++++++++++++++++++++++++++++++		
1-lnx		++++++++++++++++++++++0 - - - - - - - - - - - - - - - - - -		
x^2		++		
F(x)		- - - - - - - - -0+++++++++++++0- - - - - - - - - - - - - - - - - - -		

	$V_{C_g}=\pi\left(I_3-2I_4+I_5\right)=\dfrac{\pi}{30}$	3p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 72

Prof: RICU ILEANA

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z_1=\bar{z}_2 \Rightarrow (x+1)+yi=(y-1)-(x-4)i \Leftrightarrow$	2p
	$\begin{cases}x+1=y-1\\ y=-x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=-2\\ x+y=4\end{cases}$	2p
	$\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$	1p
2.	Stim ca functia de grad I este bijectiva $\Rightarrow$ f este inversabila	
	f surjectiva $\Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}\, astfel\ încât\ f(x)=y \Leftrightarrow 3x+6=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y-6}{3}$	2p
	$\Rightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y-6}{3}$ sau $f^{-1}(x)=\dfrac{x-6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-2$	2p
	$\Rightarrow 2m-1=\dfrac{1}{3} \Rightarrow m=\dfrac{2}{3}$	1p
3.	Cond.ca logaritmii sa fie corect definiti:	1p

	$\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;\infty)$ $\log_2(x+1)+\log_2(x+2)=1 \Leftrightarrow \log_2\frac{x+1}{x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2}=2$ x+1=2(x+2) $\Leftrightarrow$ x= - 3 $\notin (-1;\infty)$	2p 2p
4.	$T_5=C_n^4\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4=C_n^4x^{\frac{n-4}{3}}\cdot x^{-4}=C_n^4x^{\frac{n-16}{3}}$; $\Rightarrow \frac{n-16}{3}=0\Rightarrow n=16$ Finalizare: $A_{16}^2=16\cdot 15=240$	2p 2p 1p
5.	Notăm $\vec{b}=x\vec{i}+y\vec{j};x,y\in\mathbb{R}$ $\lvert\vec{b}\rvert=30\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=30\Leftrightarrow x^2+y^2=900\,(1)$ $\vec{b}$ coliniar cu $\vec{a}\Leftrightarrow\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{y}{-1}\Rightarrow x=-2\sqrt{2}y\,(2)$ Înlocuim (2) în (1) $\Rightarrow y=\pm10\Rightarrow x=\mp20\sqrt{2}$ Finalizare: $\vec{b_1}=-20\sqrt{2}\,\vec{i}+10\vec{j}$ si $\vec{b_2}=20\sqrt{2}\,\vec{i}-10\vec{j}$	2p 2p 1p
6.	$f(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)=2\cos^2(x+\pi)-1=2\cos^2x-1=\cos 2x=f(x)$ $\Rightarrow$ f(x) – f(x + π)= f(x) – f(x)=0.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Not.cu $A\in G, A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ şi $AJ=JA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} -b=c \\ a=d \\ -d=-a \\ c=-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-b \\ d=a\end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$	3p 2p
b)	Fie $A\in G \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$ (conform pct.a) Calculăm $a\cdot I_2+b\cdot J=a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}=A$	2p 3p
c)	Cum $X\in G \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}(cf.pct.a) \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}$ Ecuaţia $X^2+J=O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab+1 \\ -2ab-1 & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a-b)=0 \\ 2ab+1=0\end{cases}$ $\Rightarrow$a=b sau a= -b Pentru a=b $\Rightarrow 2b^2+1=0$ (ec.nu are solutii reale) Pentru a= -b $\Rightarrow$- $2b^2+1=0 \Rightarrow \begin{cases} b_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b_2=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Avem $X_1=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$; $X_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$	1p 2p 2p

2. a)	$x*2=2x-2x-4+6=2$ $3\circ x=3x-3(3+x)+12=3$ $(x*2)-(3\circ x)=2-3=-1$	2p 2p 1p
b)	$e_1*x=x*e_1=x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e_1(x-2)=3(x-2),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e_1=3$ $e_2\circ x=x\circ e_2=x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e_2(x-3)=4(x-3),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e_2=4$ $e_1*e_2+e_1\circ e_2$. $e_1*e_2+e_1\circ e_2=(3\cdot4-2\cdot3-2\cdot4+6)+(12-3(3+4)+12)=4+3=7$	2p 2p 1p
c)	$f(x*y)=a(x*y)+1=a(xy-2x-2y+6)+1=axy-2ax-2ay+6a+1(1)$ $f(x)\circ f(y)=f(x)\cdot f(x)-3(f(x)+f(y))+12=(ax+1)(ay+1)-3(ax+1+ay+1)+$ $=a^2xy-2ax-2ay+7(2)$ Din (1)şi (2) $\Rightarrow\begin{cases}a^2=a\\6a+1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0;a_2=1\\a=1\end{cases}\Rightarrow$a=1	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1\.
a) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ — 2p

x	$-\infty$ 0	e $+\infty$
$1-\ln x$		+++++++++0- -
x^2		+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
$f'(x)$		+++++++++0- -
$f(x)$		$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\frac{1}{e}\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$

2p

	$\Rightarrow$monotonia lui *f*	1p
b)	Asimptota orizontală: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \underset{l'Hospital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\Rightarrow$ecuatia asimptotei orizontale spre $+\infty$ este y=0 Asimptota verticala: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ $\Rightarrow$ ecuatia asimptotei verticale este x=0	2p 3p
c)	Conform punctului *a)* $\Rightarrow$ $f(x) \le \frac{1}{e}, \forall x \in (0,+\infty)$ Conform punctului *b)* unde y=0 este ecuatia asimptotei orizontale spre $\infty \Rightarrow$ $f(x) > 0, \forall x \in (e,+\infty)$ $\Rightarrow 0 < f(x) \le \frac{1}{e}, \forall x \in (e,+\infty)$	2p 2p 1p
2. a)	$F'(x) = (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x =$ $= e^x(1+x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Observăm că F(*x*)≥0 , $\forall x \in [0;1]$ $\Rightarrow S = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x \cdot e^x dx \underset{prin\ parti}{=}$ $= x \cdot e^x \Big\vert_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e - 0 - e^x \Big\vert_0^1 = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$	1p 2p 2p

c)	$\int_0^1 \frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{x\cdot e^x-(x+1)e^x}{e^x+1}dx=-\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=$ $=-\ln\left\|e^x+1\right\|\Big\|_0^1=-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\frac{2}{e+1}$	3p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 73

Prof: Soare Constantin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2x^2+8=24$ $x=\pm 2\sqrt{2}$	3p 2p
2.	$1-5x\geq x \Leftrightarrow 1\geq 6x$ $x\leq\frac{1}{6}$ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{6}\right]$	1p 2p 2p
3.	$3^x(1+3+9+27)=40$ $3^x=1$ $x=0$	1p 2p 2p

4.	C.E $x > 0$. Notăm $lgx=y \Rightarrow y^2 - 10y + 21 = 0 \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 7$ $lgx = 3 \Leftrightarrow x = 10^3$ $lgx = 7 \Leftrightarrow x = 10^7$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ $\overrightarrow{AB}(1,2)$	2p 3p
6.	$cosA = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cosA$ $BC = \sqrt{61 + 30\sqrt{2}}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ a & 2b & c \\ a & b & 2c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ $=abc(8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2) =$ =4abc	2p 2p 1p
b)	Pentru $x = y = z = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 4 \\ a + 2b + c = 4 \\ a + b + 2c = 4 \end{cases}$ Obţinem $a = 1, b = 1, c = 1$	3p 2p
c)	Pentru $abc \neq 0$ sistemul are soluţie unică şi se rezolvă cu regula lui Cramer. $\Delta_x = 4bc; \Delta_y = 4ac; \Delta_z = 4ab.$ $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$	1p 2p 2p

2. a)	$x * y = xy - 10x - 10y + 100 + 10$	1p
	$x * y = x(y-10) - 10(y-10) + 10$	3p
	$x * y = (x-10)(y-10) + 10$	1p
b)	$x * x * x = (x-10)^3 + 10$	3p
	$(x-10)^3 + 10 = 1010 \Leftrightarrow x = 20$	2p
c)	Dem prin inducţie matematică. Verificare	2p
	$P(k) \Rightarrow P(k+1)$	2p
	Concluzie .	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x+1)}{(x+2)^2} =$	2p
	$= \frac{2x^2+4x+x+2-x^2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$	2p
		1p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = 0$	1p
	$x_1 = -2 - \sqrt{3}$	1p
	$x_2 = -2 + \sqrt{3}$	1p
	f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}, \infty)$	2p
	f este strict descrescătoare pe $(-2-\sqrt{3}, -2) \cup (-2, -2+\sqrt{3})$	
c)	Studiem semnul derivatei a doua .	1p
	$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$	1p
	$f''(x) \neq 0, \forall x \in IR - \{-2\}$	1p
	f este concavă pe intervalul (-∞,-2) şi f este convexă pe intervalul (-2,∞)	2p

2. a)	$f(x)=\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x+1)}-\dfrac{x}{x(x+1)}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$	2p 2p 1p
b)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$ $=\int_1^2\frac{1}{x}dx-\int_1^2\frac{1}{x+1}dx=$ $=lnx\|_1^2-\ln(x+1)\|_1^2=$ $=ln2-ln1-ln3+ln2=ln\frac{4}{3}$	1p 1p 1p 2p
c)	$aria\,(\Gamma_f)=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$ $=\int_2^3\frac{1}{x}dx-\int_2^3\frac{1}{x+1}dx=$ $=lnx\|_2^3-\ln(x+1)\|_2^3=$ $=ln3-ln2-ln4+ln3=ln\frac{9}{8}$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 74

Prof: Soare Constantin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_7 = 17 \\ a_{17} = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 6r = 17 \\ a_1 + 16r = 37 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 2 \end{cases}$	3p 2p
2.	f(2)=0 $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2012) = 0$	3p 2p
3.	Notăm $5^x = y > 0$. se obţine ecuaţia $y^2 - 6y + 5 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt y_1=1, $y_2 = 5$. $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$	1p 2p 2p
4.	$A_n^2 \leq 20 \Leftrightarrow n(n-1) \leq 20$ Se obţine $n \in \{2,3,4,5\}$.	2p 3p
5.	Fie M mijlocul segmentului [AB]. Atunci $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}; y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$ Obţinem M(1,4)	2p 3p
6.	$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot sinA}{2}$ $S_{\Delta ABC} = \frac{7 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$ $S_{\Delta ABC} = 14\sqrt{3}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_1(1,3)$ $A_2(2,9)$ $A_1A_2: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{9-3} \Leftrightarrow A_1A_2: x-1 = \frac{y-3}{6}$ $A_1A_2: 6x - y - 3 = 0.$	2p 2p 1p
b)	$A_3(3,27)$ $S = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 27 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 54 + 9 - 27 - 27 - 6 = 12$ de unde S=6	1p 2p 2p
c)	$A_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$,$A_{n+2}(n+2, 3^{n+2})$ Calculăm $\Delta = \begin{vmatrix} n & 3^n & 1 \\ n+1 & 3^{n+1} & 1 \\ n+2 & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}$ $\Delta = 4 \cdot 3^n > 0$, deci pentru nicio valoare a lui $n \in IN$, punctele $A_n(n, 3^n)$, $A_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$,$A_{n+2}(n+2, 3^{n+2})$ nu sunt coliniare.	2p 1p 2p
2. a)	$x * y = xy - 9x - 9y + 81 + 9$ $x * y = x(y-9) - 9(y-9)+9$ $x * y = (x-9)(y-9) + 9$	1p 3p 1p
b)	G parte stabilă Asociativitate Comutativitate Element neutru e=10 Element simetrizabil $x' = 9 + \frac{1}{x-9}$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	Dem prin inducţie matematică. Verificare $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ Concluzie .	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *y=x* asimptotă oblică spre $\pm\infty$ *x=-1* asimptotă verticală	2p 2p 1p
b)	$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0,$ de unde deducem f strict crescătoare pe $(-\infty,-2) \cup (0,\infty)$ f strict descrescătoare pe (-2,-1)$\cup$ $(-1,0)$	2p 1p 2p
c)	Avem $\frac{x^2+x+1}{x+1} \leq -3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1} + 3 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+4}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x+1} \leq 0$ adevărat , pentru că $(x+2)^2 \geq 0$ şi x+1< 0	1p 1p 1p 2p
2. a)	$\int_1^2 \frac{f_2(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^2e^x}{x^2}dx = \int_1^2 e^x$dx= $=e^x\|_1^2=$ $=e(e-1)$	2p 2p 1p
b)	$\int_0^x te^t dt = te^t\|_0^x - \int_0^x e^t dt = te^t\|_0^x - e^t\|_0^x = xe^x - e^x + 1 = xe^x - (e^x - 1)$ $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - (e^x-1)}{x} = 1 - 1 = 0$	3p 2p
c)	$aria\,(\Gamma_f) = \int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\, dx=$	2p

	$=x^2e^x\|_0^1 - 2xe^x\|_0^1 + 2e^x\|_0^1 =$ $=e-2e+2e-2=e-2$	1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 75

Prof: Soare Constantin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} b_1q^3 = 16 \\ b_1q^9 = 1024 \end{cases} \Rightarrow q^6 = 64$ de unde deducem : $q = 2, b_1 = 2$ sau $q = -2, b_1 = -2$	3p 2p
2.	$\Delta = 1$ $x_1 = 3, x_2 = 4$ $x \in [3,4]$	1p 2p 2p
3.	Numărul de submulţimi ordonate este $A_{10}^3 =$ $=\frac{10!}{7!} =$ $= 720$	1p 2p 2p
4.	C. E. x>0 . Notăm $log_2x = y$ şi obţinem ecuaţia : $y(y^2 - 8y + 15) = 0$ cu soluţiile $y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 5$ de unde se obţin soluţiile $x_1 = 1$, $x_2 = 8, x_3 = 32$.	2p 3p
5.	OA=3, OB=4, AB=5 Fie OC$\perp AB \Rightarrow OC = \frac{12}{5}$	2p 3p
6.	$AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{8}, BC = 1$ $cosA = \frac{5+8-1}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 9 & m^2 \end{pmatrix}$	2p
	detA=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 9 & m^2 \end{vmatrix} = 3m^2 + 18 + 4m - 12 - 9m - 2m^2$	2p
	detA=$m^2 - 5m + 6$	1p
b)	detA=0⇔$m^2 - 5m + 6 = 0$	1p
	$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$	2p
	$m_1 = 2, m_2 = 3.$	2p
c)	Pentru m=5 se obţine sistemul : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ 4x + 9y + 25z = 38 \end{cases}$	1p
	detA=6,$\Delta_x = 6, \Delta_y = 6, \Delta_z = 6,$	2p
	$x = 1, y = 1, z = 1$	2p
2.	Scriem relaţiile lui Viete.	
a)	$x_1 + x_2 + x_3 = m + 1$	1p
	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 2m + 1$	1p
	$x_1x_2x_3 = 6$	1p
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)=$	1p
	$=m^2 - 2m - 1$	1p
b)	Pentru $x_1 = 1 \Rightarrow 1 - m - 1 + 2m + 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow$	3p
	⇔m-5=0⇔m=5.	2p
c)	Pentru m=5 , relaţiile lui Viete devin: $1 + x_2 + x_3 = 6$	2p

	$x_2 + x_2x_3 + x_2 = 11$ $x_2x_3 = 6$ Deci $x_2 = 2, x_3 = 3$ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$	2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(2x+1) = \sqrt{4x^2 + 4x + 2}$ $f(x+1) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(2x+1)}{f(x+1)} = 2$	1p 1p 3p
b)	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ f nu admite asimptotă orizontală spre ∞ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ $n = 0$ $y = x$ este asimptotă oblică spre ∞	1p 1p 1p 1p 1p
c)	Fie F : $IR \to IR$ o primitivă a funcţiei f. Atunci F este derivabilă pe IR $F'(x) = f(x), \forall x \in$IR $f(x) = \sqrt{x^2+1} > 0, \forall x \in IR \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0, \forall x \in$IR$\Rightarrow$F este strict crescătoare pe IR.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$f'(x) = \dfrac{(lnx)' \cdot x - x' \cdot lnx}{x^2} =$ $= \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot lnx}{x^2} =$	2p 2p

	$= \frac{1 - lnx}{x^2}$	1p
b)	$aria\,(\Gamma_f) = \int_e^{e^2} \frac{lnx}{x} dx = \left.\frac{ln^2 x}{2}\right\vert_e^{e^2} =$ $= \frac{ln^2 e^2}{2} - \frac{ln^2 e}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	Avem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Din monotonia funcţiei f deducem $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$. Avem $\int_1^{2012} f(x)dx \leq \int_1^{2012} \frac{1}{e}$dx= $=\frac{1}{e}(2012 - 1) = \frac{2011}{e} \Rightarrow \int_1^{2012} f(x)dx \leq \frac{2011}{e}$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 76

Prof: Szöcs Ana

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$-2011 \le 2x-1 \le 2-11 \Rightarrow -1005 \le x \le 1006$ $x \in \{-1005,...1006\}, cardA = 2012$	3p 2p
2.	$f(1-m)=1$ $1-m^2+2m-1=1$ m=1	1p 2p 2p
3.	$\sqrt{4x+1}=\dfrac{x+4+x-2}{2}$ $4x+1=x^2+2x+1$ $x \in \{0,2\}$	1p 2p 2p
4.	$m_g=\sqrt{12\sqrt[3]{3}\cdot 144\sqrt[3]{9}}$ $m_g=72$	2p 3p
5.	O –mijlocul segmentului AC $\Rightarrow O(-1,2)$ O-mijlocul segmentului BD $\Rightarrow D(-3,5)$	2p 3p
6.	$\sin B=\dfrac{b}{a}, \cos B=\dfrac{c}{a}$ $ac\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=b^2\cdot\dfrac{c}{a}$ $\dfrac{b^2c}{a}=\dfrac{b^2c}{a}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = A \cdot A = A$ $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A$ $A^3 = A$	2p 2p 1p
b)	$\left(X(m)\right)^2 = \left(mA + I_2\right)^2 = m^2A + 2mA + I_2 = \left(m^2 + 2m\right)A + I_2$ Finalizare	3p 2p
c)	$X(1) + X(2) + \ldots + X(2012) = (A + I_2) + (2A + I_2) + \ldots + (2012A + I_2)$ $X(1) + X(2) + \ldots + X(2012) = (1 + 2 + \ldots + 2012)A + 2012I_2$ $X(1) + X(2) + \ldots + X(2012) = 1006 \cdot 2013A + 2012I_2$	1p 2p 2p
2. a)	$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ $xyz - 2xy - 2xz - 2yx + 4x + 4y + (a-2)z + a = xyz - 2xy - 2xz - 2yx + (a-2)x + 4y + 4z + a$ a=6	1p 3p 1p
b)	$x \perp y = (x+2)(y-2) + 2 \Rightarrow e_1 = 3, x * y = (x-3)(y-3) + 3 \Rightarrow e_2 = 4$ $(e_1 \perp e_2) + (e_2 * e_1) = 7$	3p 2p
c)	Notăm $\left(-\sqrt{2012}\right) \perp \left(-\sqrt{2011}\right) \perp \ldots \perp 1$ cu x $\Rightarrow x \perp 2 = 2$ Norăm $\sqrt{10} * \sqrt{11} * \ldots * \sqrt{2012}$ cu y $\Rightarrow 3 * y = 3$ Finalizare	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x \to e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e)$ $f'(e) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$ $f'(e)=0$	2p 2p 1p
b)	$\frac{x}{e} - \ln x \geq 0$ Se observă că $\frac{x}{e} - \ln x = f(x)$ $f(e)=0$ Punctul (e,0) este punct de minim $\Rightarrow f(x) \geq 0, x \in (0,\infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	$f''(x) = \left(\frac{x-e}{ex}\right)'$ $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^2} \geq 0, x \in (0,\infty)$ f'' pozitivă $\Rightarrow f$ convexă	1p 1p 1p 2p
2. a)	$f_1 = 2\sqrt{x}$ $\int_1^3 2\sqrt{x} = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big\|_1^3$ $\int_1^3 f_1(x) = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}$	2p 2p 1p

b)	$f_2(x)=\sqrt{x^2+3x}$ $f_2^2(x)=x^2+3x$ I= $\int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+3x}$, schimbare de variabilă t= x^2+3x $\mathrm{I}=\ln\frac{9}{2}$	1p 1p 1p 2p
c)	$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}\right)^2=\pi\int_1^3\frac{1}{x^2+3x}$ $\int_1^3\frac{1}{x^2+3x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$ $V=\frac{\pi}{3}\ln 2$	2p 1p 2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 77

Prof: Szöcs Ana

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$E=9^{\log_9 \frac{1}{9}}$ E= $\frac{1}{9}$	3p 2p
2.	$f(x)=1$ $(x+1)(x+2)=0$ $(-1,2);(-2,1)$	1p 2p 2p
3.	Notând preţul iniţial cu x $\Rightarrow$ preţul după reducere 70%x $\frac{70}{100}x=2800$ $x=4000$	1p 2p 2p
4.	$2a_1+19r=20$ $S_{20}=\frac{(2a_1+19r)\cdot 20}{2}=200$	2p 3p
5.	BC: x+3y-15 =0 $A\in BC \Rightarrow$ m=12	2p 3p
6.	$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45}=\frac{c}{\sin 60}$ $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $c=3\sqrt{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$Y^t=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$	2p 2p

	$2A=\begin{pmatrix}4&2\\8&4\end{pmatrix}$	1p
b)	$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=2\cdot2-4\cdot1$ Finalizare	3p 2p
c)	B (a) este inversabilă dacă det(B(a)) $\neq 0$ $\det\left(B(a)\right)=(2a+1)^2-4a^2$ $a\neq-\frac{1}{4}$	1p 2p 2p
2. a)	$x_1+x_2+x_3=0$ $D=\begin{vmatrix}x_1+x_2+x_3&x_2&x_3\\x_3+x_1+x_2&x_1&x_2\\x_2+x_3+x_1&x_3&x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&x_2&x_3\\0&x_1&x_2\\0&x_3&x_1\end{vmatrix}$ D=0	1p 3p 1p
b)	$x_1^3-2x_1+3=0$ $x_2^3-2x_2+3=0$ $\underline{x_3^3-2x_3+3=0}$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1-2x_2-2x_3+9=0$ $E=-9$	3p 2p
c)	$A=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2+x_3^2&x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3&x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\\x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3&x_1^2+x_2^2+x_3^2&x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2\\x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3&x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2&x_2^2+x_3^2+x_1^2\end{pmatrix}$ $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=4$ $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$_s(0)=\frac{1}{4}$ $l_d(0)=\frac{1}{4}$ $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=\frac{1}{4}$	2p 2p 1p
b)	$y-f(1)=f^{'}(1)(x-1)$ $f^{'}(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+4\right)^2}$ $f^{'}(1)=\frac{-2}{25},\ f(1)=\frac{1}{5}$ $y=\frac{-2}{25}x+\frac{7}{25}$	1p 1p 1p 2p
c)	-2x < 0 pentru $x\in(0,\infty)$ $x^2+4>0$ $\left(x^2+4\right)^2>0$ $f^{'}(x)<0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$	1p 1p 1p 2p
2. a)	Funcţia g este primitivă a funcţiei f dacă $g^{'}=f$ $g^{'}=e^x+4x^3+2\cdot 3x+3\cdot 1$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	$\int_a^b f(x)g^{'}(x)=f(x)\cdot g(x)\Big\|_a^b-\int_a^b f^{'}(x)g(x)$ $\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 g^{'}(x)g(x)dx$ $I=g^2(x)\Big\|_0^1-\int_0^1 g^{'}(x)g(x)dx$ $I=\frac{1}{2}(e+5)(e+9)$	1p 1p 1p 2p

c)	$\int_0^1 \left(xf(x)+g(x)\right)dx=\int_0^1 \left(xg'(x)+x'g(x)\right)dx$	2p
	$I=\int_0^1 \left(xg(x)\right)' dx$	1p
	$I=e+7$	2p

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 78

Prof: Szöcs Ana

♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

♦ **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se face schimbare în aceeaşi bază	
	$\frac{\lg 3}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 9}=\frac{1}{2}$	3p
	$\lg 3\cdot\frac{1}{\lg 3^2}=\frac{1}{2}$	2p
2.	$3+2m=0$	1p
	$2m=-3$	2p
	$m=-\frac{3}{2}$	2p

3.	$x_1+x_2=\frac{m-1}{m};x_1\cdot x_2=-2$ $-2m=3m-3$ $m=\frac{3}{5}$	1p 2p 2p
4.	C_9^6 Numărul posibilităţilor =84	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ $\overrightarrow{BC}=7\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow(7,-5)$	2p 3p
6.	Fie AM mediana corespunzătoare ipotenuzei $AM=\frac{BC}{2}$ $m(\sphericalangle B)=30^0$ $BC=8\Rightarrow AM=4$	 2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ det A = 2-2-2-1-2-4 det A= -9	2p 2p 1p
b)	$D_x=-9;D_y=0;D_z=0$ $x=1,y=0,z=0$	3p 2p

c)	$x = y + z$	1p
	$\begin{cases} 2(y+z) = 1 \\ 3y = 2 \\ 3z = a \end{cases}$	2p
	$a = -\frac{1}{2}$	2p
2. a)	$f\left(\hat{4}\right) = \hat{0}$	1p
	$\hat{4} + m + \hat{4} + \hat{1} = 0$	3p
	$m = \hat{1}$	1p
b)	$f = x^3 + x^2 + x + \hat{1} \Rightarrow f = \left(x^2 + \hat{1}\right)\left(x + \hat{1}\right)$	3p
	$f = \left(x + \hat{1}\right)\left(x + \hat{2}\right)\left(x + \hat{3}\right)$	2p
c)	$g = x\left(x + \hat{3}\right)$	2p
	$d = x + \hat{3}$	2p
	$x = \hat{2}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$x^2 + 7x + 10 \neq 0$	2p
	$(x+2)(x+5) \neq 0$	2p
	$x \in \mathbb{R} - \{-2, -5\}$	1p

b)	$f(x)=\dfrac{(ax+b)(x^2+7x+10)+cx+d}{x^2+7x+10}$ $f(x)=\dfrac{ax^3+7ax^2+10ax+bx^2+7bx+10b+cx+d}{x^2+7x+10}$ $f(x)=\dfrac{ax^3+(7a+b)x^2+(10a+7b+c)x+10b+d}{x^2+7x+10}$ $\begin{cases} a=1 \\ 7a+b=8 \\ 10a+7b+c=12 \\ 10b+d=5 \end{cases} \Rightarrow a=b=1, c=d=-5$	1p 1p 1p 2p
c)	$y=mx+n$ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x^2+12x+5-x^3-7x^2-10x}{x^2+7x+10}$ $n=1\Rightarrow y=x+1$	1p 1p 1p 2p
2. a)	f este continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$ fiind formată din funcţii elementare $l_s(0)=l_d(0)=f(0)=\dfrac{1}{2}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{1-}^{0}\dfrac{x+1}{2}dx+\int_{0}^{1}\left(\dfrac{1}{x+2}-\sqrt{x}\right)dx$ $\int_{1-}^{0}\dfrac{x+1}{2}dx=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\|_{-1}^{0}$ $\int_{0}^{1}\left(\dfrac{1}{x+2}-\sqrt{x}\right)dx=\left(\ln(x+2)-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big\|_{0}^{1}$ $I=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{12}$	1p 1p 1p 2p

c)	$g(x)=x^2-\frac{x}{x^2+2}$	2p
	$A=\int_1^2\left(x^2-\frac{x}{x^2+2}\right)$	1p
	$A=\frac{1}{6}(14-3\ln 2)$	2p