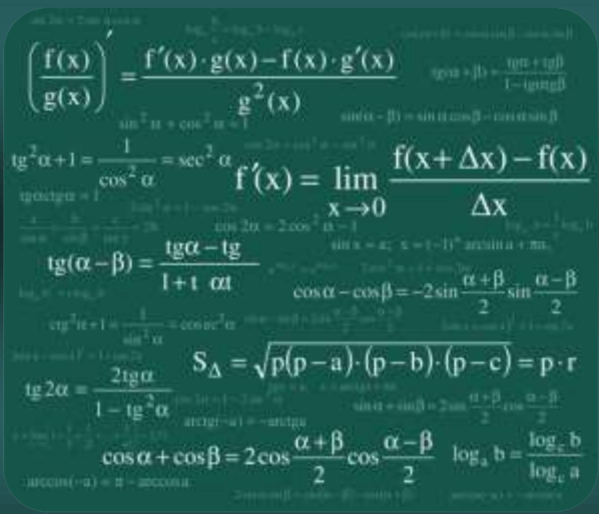
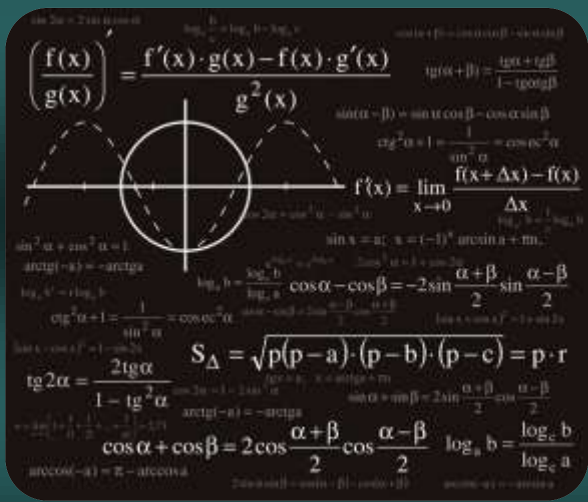
CULEGERE ONLINE CU VARIANTE ŞI BAREME PENTRU PREGĂTIREA BACALAUREATULUI LA MATEMATICĂ 2014

PROFIL REAL

SPECIALIZAREA MATEMATICĂ INFORMATICĂ

WWW.MATEINFO.RO   WWW.BACMATEMATICA.RO





DOBRE ANDREI OCTAVIAN

Alexandru Elena Marcela
Badea Dana
Badea Ion
Brabeceanu Silvia
Ciocănaru Viorica Cornelia
Băşcău Cornelia
Cristea Maria
Dogaru Ion
Ionescu Maria
Isofache Cătălina Anca
Lămătic Iulia
Liliana Tomiţa
Loghin Gaga
Marcu Ştefan Florin
Marian Teler
Nicolaescu Nicolae
Oancea Crăiţa
Oláh Csaba
Opriţa Elena
Păcuraru Cornel Cosmin
Pascotescu Anişoara Camelia
Raţ Cristina
Rîcu Ileana Constanţa
Stan Adrian
Stoica Alina Codruţa
Szep Gyuszi
Şerban Geoge Florin
Soare Valentina
Lungana Viorica
Voiculescu Ştefania Augustina

PLOIEŞTI, 2013

CULEGERE ONLINE CU VARIANTE ŞI BAREME PENTRU PREGĂTIREA BACALAUREATULUI LA MATEMATICĂ 2014 (EDIŢIE ONLINE, 2013)

ISBN 978-973-0-15965-3

Soluţiile şi baremele le găsiţi pe www.mateinfo.ro sau www.bacmatematica.ro

Fiecare autor raspunde de corectitudinea subiectelor.

Culegerea este verificată, dar dacă veţi găsi anumite erori vă rugăm sa ni le semnalaţi pe bacm1@mateinfo.ro, fiindcă ne dorim cu toţii o culegere de cea mai bună calitate pentru pregătirea bac-ului la matematică.

La sfârşitul culegerii va apărea şi o ERATA (dacă va fi nevoie)

Varianta 1

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătați că $(1-i)^{16}$ este număr real.

(5p) **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x+1$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=3$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

(5p) **5.** Determinați coordonatele centrului de greutate al ΔABC știind că $A(-2,-1)$, $B(2,0)$ și $C(0,7)$.

(5p) **6.** Determinați măsura unghiului A a triunghiului ABC ascuțitunghic care are $BC=4\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 4.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(M)=\left\{A=\begin{pmatrix}x & 3y\\ y & x\end{pmatrix},\ x,y\in C\right\}$

(5p) **a)** Arătați că $\forall\ A\in C(M)$, $AM=MA$;

(5p) **b)** Arătați că dacă $B\in C(M)$ și $B^2=O_2$ atunci $B=O_2$;

(5p) **c)** Arătați că dacă $C\in C(M)$, $C\neq O_2$ și C are toate elementele raționale, atunci $\det C\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $f(x)=x^3-x+a$ cu $a\in\mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați rădăcinile polinomului știind că $f(-2)=-12$;

(5p) **b)** Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(5p) **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are rădăcini întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(e-e^{\frac{1}{x}})$.

(5p) **a)** Determinați domeniul de definiție D al funcției f;

(5p) **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f;

(5p) **c)** Studiați monotonia funcției f pe D.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$.

(5p) **a)** Calculați I_2;

(5p) **b)** Arătați că $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n;

(5p) **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 2

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculați modulul numărului complex $z = \dfrac{9-2i}{7+6i}$.

(5p) **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 2x + 6$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2(5-2x) = 1$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr $\overline{xy}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $x \cdot y = 12$.

(5p) **5.** Determinați ecuația medianei duse din vârful B al triunghiului ABC, unde A(-2,-1), B(1,2) și C(0,5).

(5p) **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că AB=16 și cos C=$\dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Arătați că $\det A \neq 0$.

(5p) **b)** Calculați E(A), dacă $E(X) = X^2 - X + I_3$.

(5p) **c)** Calculați inversa matricei A.

2. Se consideră polinomul $f(x) = x^3 - 2mx + m + 1,\ m \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați m astfel încât polinomul $f(x)$ să se dividă cu x-1.

(5p) **b)** Pentru m=2 calculați $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$, unde $x_1, x_2, x_3 \in C$ sunt rădăcinile sale.

(5p) **c)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului la x+1 să fie egal cu 1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

(5p) **a)** Determinați soluțiile reale ale ecuației $f^4(x)-2f^2(x)-15=0$.

(5p) **b)** Calculați $f'(x)$.

(5p) **c)** Arătați că *f* este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

(5p) **a)** Calculați I_1.

(5p) **b)** Arătați că $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2},\ (\forall)n\in N$.

(5p) **c)** Calculați $I_{2n+1},\ n\in N$.

Varianta 3

Prof. Alexandru Elena-Marcela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Determinați numerele reale a și b știind că a+ib este conjugatul numărului complex $z=\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}$.

(5p) **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2-6x+5$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^{\frac{x+1}{2}}=36$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o pereche (x,y) din produsul cartezian $M\times M$ să avem x+y=5.

(5p) **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele A(1,a), B(4,1) și C(-1,-4) sunt coliniare.

(5p) **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că AC=6 și cos B=$\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ x & y\end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Calculați AX, XA și A+X.

(5p) **b)** Determinați x și y astfel încât AX=XA.

(5p) **c)** Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\forall) n \in N$.

2. Se consideră polinomul $f(x) = (m+1)x^2 + 2mx + m + 1, \quad m \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f(x)$ este un pătrat perfect.

(5p) **b)** Determinați valorile lui m pentru care polinomul $f(x)$ are extremul în punctul x=2.

(5p) **c)** Arătați că pentru m=2 polinomul $f(x)$ îl divide pe $g(x) = 3x^3 + x^2 - x - 3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(5p) **a)** Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)^x$.

(5p) **b)** Calculați $f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(5p) **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2. Se consideră $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n e^{1-x}$, unde n este număr natural nenul.

(5p) **a)** Arătați că, $0 \le f_n(x) \le 1, \quad (\forall)\ x \in [0,1]$.

(5p) **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

(5p) **c)** Dacă $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$, arătați că $I_n = nI_{n-1} - 1, \quad (\forall)\ n \ge 2$.

Varianta 4

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Să se arate că $\log_2\left(5-\sqrt{3}\right) + \log_2\left(5+\sqrt{3}\right) - \log_2 11 = 1$.

(5p) **2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați suma

$S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2012)$.

(5p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2+x+0,5} - 4\sqrt{2} = 0$.

(5p) **4.** Determinați valorile naturale ale lui *x* astfel încât $C_{10}^{x} \le C_{10}^{x-2}$.

(5p) **5.** Dacă $A'(1,-1), B'(3,1)$ și $O(0,0)$ sunt mijloacele laturilor BC, AC și respectiv AB ale ΔABC, determinați coordonatele punctelor A, B, C.

(5p) **6.** Calculaţi $\cos\alpha$ ştiind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}$.

(5p) **a)** Determinaţi *x* astfel încât $A(x)$ inversabilă;

(5p) **b)** Aflaţi $A^{-1}(1)$;

(5p) **c)** Rezolvaţi ecuaţia $A(1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Fie inelul claselor de resturi modulo 6, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

(5p) **a)** Calculaţi suma elementelor neinversabile din $\mathbb{Z}_6$;

(5p) **b)** Determinaţi valorile lui $x \in \mathbb{Z}_6$ astfel încât determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} x & \hat{1} \\ 2 & \hat{3} \end{pmatrix}$ să fie element inversabil în $\mathbb{Z}_6$;

(5p) **c)** Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$x $\mathbb{Z}_6$ sistemul $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \hat{3}x + 2y = \hat{1} \end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$.

(5p) a) Scrieţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$;

(5p) b) Aflaţi punctele de extrem ale funcţiei;

(5p) c) Demonstraţi că $7 \le f(x) \le 3e$, $(\forall) x \in [0, 2]$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin x; & x < 0 \\ \frac{x}{x+2}; & x \ge 0 \end{cases}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$;

(5p) **b)** Aflaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei absciselor, a graficului funcţiei $g : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$;

(5p) **c)** Calculaţi $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$.

Varianta 5

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $2+5+8+....+x=155$.

(5p) **2.** Dacă x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x+m=0, m \in \mathbb{R}$ aflaţi m ştiind că $|x_1-x_2|=1$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-1}=5-2x$.

(5p) **4.** Arătaţi că numărul $\mathrm{N}=A_{10}^2+C_{10}^2+3P_3$ este divizibil cu 17.

(5p) **5.** Determinaţi valorile reale ale lui x dacă aria $\Delta\mathrm{ABO}$ este 3 ştiind că $\mathrm{A}(x,1), \mathrm{B}(2x,-1), \mathrm{O}(0,0)$.

(5p) **6.** Fie $\Delta\mathrm{ABC}$ şi punctele M, N astfel încât $2\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\overrightarrow{\mathrm{MA}},\ \overrightarrow{\mathrm{BN}}=2\overrightarrow{\mathrm{NC}}$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

(5p) **a)** Arătaţi că $A(a,b)\cdot A(x,y)=A(ax,ay+bx),(\forall)A(a,b),A(x,y)\in M$;

(5p) **b)** Calculaţi $A^n(a,b),\ n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) **c)** Determinaţi matricele $A(a,b)\in M$ astfel încât $A^{2012}(a,b)=A(1,2012)$.

2. Fie polinomul $f=X^3+aX^2+bX-1 \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

(5p) **a)** Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f \vdots (X-1)$ şi restul împărţirii lui f la $X+1$ este -4.

(5p) **b)** Pentru $b=1$ aflaţi valorile lui a astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}= x_1^2+x_2^2+x_3^2$;

(5p) **c)** Dacă $a=-1, b=1$ aflaţi valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-x-2|$.

(5p) **a)** Studiaţi derivabilitatea funcţiei f;

(5p) **b)** Stabiliţi monotonia funcţiei f;

(5p) **c)** Aflaţi ecuaţia asimptotei spre ∞ la graficul funcţiei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{f(x)}$.

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln x;\ x\in(0,e)\\ x-e+1;\ x\in[e,\infty)\end{cases}$.

(5p) **a)** Arătaţi că f admite primitive pe $(0,\infty)$;

(5p) **b)** Aflaţi aria domeniului plan cuprins între graficul funcţiei $h:[e^{-1},1]\to\mathbb{R},\ h(x)=x\cdot f(x)$, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x=e^{-1}, x=1$;

(5p) **c)** Demonstraţi că $\int_1^2 f^{2012}(x)dx\le\frac{1}{2013}$.

Varianta 6

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Aflaţi cardinalul mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |2x-1|\le 3\}$.

(5p) **2.** Determinaţi funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+b$ ştiind că punctul $A(0,3)\in G_f$ şi axa de simetrie este dreapta $d:x-1=0$.

(5p) **3.** Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-2x)=1$.

(5p) **4.** În câte moduri, din 10 elevi poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

(5p) **5.** Aflaţi valorile reale ale lui *m* pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) **6.** Calculaţi $S=\cos 0^0+\cos 10^0+\cos 20^0+...+\cos 170^0+\cos 180^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\ I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $\mathrm{M}(A)=\{x\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid XA=AX\}$.

(5p) a) Să se arate că $A^{2012}=2^{1006}\cdot I_2$;

(5p) b) Să se arate că, dacă $X\in\mathrm{M}(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}$;

(5p) c) Demonstraţi că $A+A^3+A^5+....+A^{2011}=(2^{1006}-1)A$ şi

$A^2+A^4+A^6+....+A^{2012}=2(2^{1006}-1)I_2$.

2. Fie „$*$”$:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x*y=xy-4x-4y+20,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Determinaţi elementul neutru al legii „$*$”;
(5p) b) Aflaţi simetricul lui 3 în raport cu legea „$*$”;
(5p) c) Ştiind că legea este asociativă calculaţi $S=1*2*3*....*2012$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

(5p) **a)** Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul de abscisă $x_0=1$;

(5p) **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$;

(5p) **c)** Demonstraţi că $f(x)\ge 1, (\forall) x>-1$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+1$.

(5p) **a)** Arătaţi că orice primitivă a lui *f* este strict crescătoare.

(5p) **b)** Aflaţi o primitivă a funcţiei *f* al cărei grafic conţine punctul $A(1,3)$;

(5p) **c)** Calculaţi aria suprafeţei cuprinse între axa absciselor, graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$g(x)=\left(f(x)-3x^2+x\right)\cdot e^x$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$;

Varianta 7

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_2=-12$, $a_3=-9$. Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât suma primilor *n* termeni să fie zero.

(5p) **2.** Determinaţi elementele mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{N} \mid \frac{x^2-7}{x-1}\le 1\right\}$.

(5p) **3.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}=\frac{13}{9}$.

(5p) **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4?

(5p) **5.** Fie punctele A(3,0), B(-2,-2), C(2,2). Scrieţi ecuaţia dreptei determinată de mijloacele laturilor (CA) şi (CB).

(5p) **6.** Aflaţi raza cercului înscris în triunghiul ABC, de laturi 5, 6 şi 7.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ distincte între ele şi sistemul $(S)\begin{cases} a^2x+ay-z=a^3 \\ b^2x+by-z=b^3 \\ c^2x+cy-z=c^3 \end{cases}$

(5p) **a)** Calculaţi determinantul matricei *A* ataşată sistemului (S):

(5p) **b)** Rezolvaţi sistemul (S);

(5p) **c)** Dacă (x,y,z) este soluţia sistemului aflaţi soluţiile ecuaţiei $t^3-xt^2-yt+z=0$.

2. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=(2X+5)^{2012}+4X+10$ şi $g=X^2+5X+6$.

(5p) **a)** Arătaţi că suma coeficienţilor polinomului *f* este un număr întreg divizibil cu 7;

(5p) **b)** Determinaţi restul împărţirii lui *f* la *g*;

(5p) **c)** Calculaţi suma $S=\frac{1}{g(0)}+\frac{1}{g(1)}+\frac{1}{g(2)}+....+\frac{1}{g(2013)}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}+x^2-2$.

(5p) **a)** Să se studieze monotonia funcţiei *f* ;

(5p) **b)** Să se demonstreze că funcţia *f* are o singură rădăcină în intervalul (0, 1);

(5p) **c)** Să se demonstreze prin inducţie matematică $f^{(n)}(x)=2^ne^{2x},\ (\forall)n\in\mathbb{N},n\geq 3$.

2. Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)^2$.

(5p) **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$;

(5p) **b)** Dacă $h:[0,\infty)\to\mathbb{R},h(x)=\frac{x}{f(x)}$, determinaţi primitiva $H:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei *h* astfel

încât $H(0)=-1$;

(5p) **c)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei O*x*, a graficului funcţiei f pentru $x\in[0,1]$.

Varianta 8

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculaţi $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+....-\frac{1}{3^{2011}}\right):\left(1-\frac{1}{3^{2012}}\right)$.

(5p) **2.** Aflaţi numerele reale *a* şi *b* care au suma 1 şi produsul -12.

(5p) **3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$. Aflaţi numerele $x\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(\log_2 x)\le 3$.

(5p) **4.** După o ieftinire cu 20% şi apoi o scumpire cu 10% un produs costă 1760 lei. Care este preţul iniţial al produsului?

(5p) **5.** Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului (AB) unde A(-1,1) şi B(3,3).

(5p) **6.** Calculaţi suma $S=\sin^2 0^0+\sin^2 15^0+\sin^2 30^0+\sin^2 45^0+\sin^2 60^0+\sin^2 75^0+\sin^2 90^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-my+z=2m \\ x-2y+z=-2 \\ mx+m^2y-2z=2 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & m^2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5p) **a)** Arătaţi că $\det A=4-m^2$

(5p) **b)** Determinaţi valorile lui *m* pentru care sistemul este compatibil determinat

(5p) **c)** Rezolvaţi sistemul pentru *m*=0;

2. Fie polinomul $f_{a,b}\in\mathbb{R}[X],\ f_{a,b}=2a^2X^3-2abX^2+b^2X-(2a-1)$

(5p) **a)** Determinaţi numerele întregi *a* şi *b* pentru care $f_{a,b}\,\vdots\,(X-1)$;

(5p) **b)** Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului $f_{1,1}$, calculaţi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(5p) **c)** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2\cdot 8^x-2^{2x+1}+2^x-1=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^4}{4\sqrt{3}}$.

(5p) **a)** Să se studieze monotonia funcţiei *f* ;

(5p) **b)** Să se demonstreze că tangentele la graficul funcţiei *f* în punctele $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ şi $B\left(\sqrt{3},f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ sunt perpendiculare.

(5p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră funcţiile $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{(x-1)^n}{x+2}$ şi integralele $I_n=\int_{-1}^{1}f_n(x)dx.$

(5p) **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1}(x+2)f_1(x)dx.$;

(5p) **b)** Să se calculeze I_1;

(5p) **c)** Să se arate că $I_{n+1}+3I_n=\frac{(-2)^{n+2}}{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$

Varianta 9

Prof. Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Arătaţi că numărul $N=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+1-\sqrt{3}$ este natural.

(5p) **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx+3, m\in\mathbb{R}.$ Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât $G_f\bigcap Ox\neq\Phi.$

(5p) **3.** Aflaţi valorile reale ale lui x astfel ăncât numerele $3^{x+1},9^x,5\cdot3^x-6$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) **4.** Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\left\{C_{11}^k \mid k\in\mathbb{N},0\le k\le 11\right\}$ acesta să fie divizibil cu 11.

(5p) **5.** Care sunt coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC unde A(3,0), B(2,2) şi C(-1,-2)?

(5p) **6.** Fie vectorii $\vec{u}=\left(m^2-1\right)\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=m\vec{i}+\vec{j};m\in\mathbb{R}.$ Aflaţi valorile parametrului real m astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\det A,\ A^2$ şi A^3;

(5p) **b)** Verificaţi egalitatea $A^2=4A-5I_2$ şi demonstraţi că $A^{n+1}=4A^n-5A^{n-1},\ (\forall)n\in\mathbb{N},n\ge2$;

(5p) **c)** Arătaţi că $A^n \neq I_2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinoamele $f = X^8 + X^4 + 1$ şi $g = X^2 + X + 1$, iar x_1 şi $x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului g.

(5p) **a)** Aflaţi restul împărţirii lui f la $g` = X^2 \cdot g$;

(5p) **b)** Calculaţi $x_1^2 + x_2^2$ şi $x_1^3 + x_2^3$;

(5p) **c)** Arătaţi că $f\left(x_1^2\right) + f\left(x_2^2\right) \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : [-3, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1}$.

(5p) **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$;

(5p) **b)** Demonstraţi relaţia $f^2(x) = -2f'(x) \cdot \sqrt{3+x}$ $(\forall) x \in (-3, \infty) \setminus \{1\}$ şi stabiliţi monotonia funcţiei f

(5p) **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = -2$.

2. Se consideră funcţiile

$f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sin x \cdot e^{\cos x} - 1$ şi $F(x) = e^{\cos x} + \sin x - x + 1$.

(5p) **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f;

(5p) **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$;

(5p) **c)** Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$,

$g(x) = \dfrac{f(x) - \cos x + 1}{\left(\sin^2 x - 1\right) e^{\cos x}}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Varianta 10

Prof: Bășcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\lg 10^6+\sqrt{10^6}+\sqrt[3]{10^6}$.

(5p) 2. Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x-10$ cu axa abciselor.

(5p) 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor naturale nenule, ecuația: $\log_{27}^2 x^3+9\log_{27}x=4$.

(5p) 4. Aflați termenul care nu îl conține pe x în dezvoltarea binomială: $\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC și vectorii: $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}, \overrightarrow{OB}=4\vec{i}+2\vec{j}, \overrightarrow{OC}=6\vec{i}-4\vec{j}$. Să se determine cordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

(5p) 6. Comparați numerele $\sin 6$ și $\sin 7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R}), f(x)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

(5p) a) Să se arate că $f(-1)+f(1)=O_2$.

(5p) b) Să se rezolve ecuația $f(2x)=I_2$.

(5p) c) Sa se calculeze $f(2)+(f(2))^2+...+(f(2))^{2014}$

2. Se consideră mulțimea claselor de resturi modulo 9, $\mathbb{Z}_9$

(5p) a) Calculați produsul elementelor inversabile din această mulțime.

(5p) b) Calculați, in $\mathbb{Z}_9$, suma $\hat{1}+\hat{2}+...+2014$.

(5p) c) Rezolvati, in $\mathbb{Z}_9$, sistemul de ecuații: $\begin{cases} \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{0} \\ \hat{4}x+\hat{5}y=\hat{1} \end{cases}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2014}+2014^x-\ln 2014$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abcisă 0.

(5p) c) Să se arate că funcția *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_2^4 f(x)dx$

(5p) b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[1,\infty)$.

(5p) c) Să se afle volumul corpului mărginit de graficul funcției *f*, axa O*x* si dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

Varianta 11

Prof: Bășcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflați conjugatul numarului complex $\frac{-2i}{3-i}$

(5p) 2. Aflați ecuația axei de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-10$.

(5p) 3. Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=\lg 100$.

(5p) 4. Știind că prețul unui obiect, după două reduceri succesive de 10%, este 8100, aflați prețul inițial al obiectului.

(5p) 5. Să se determine lungimea laturii NP și raza cercului circumscris triunghiului MNP, dacă $MN=3, m(\sphericalangle P)=30^\circ, m(\sphericalangle M)=45^\circ$

(5p) 6. Să se arate că triunghiul cu vârfurile M(1,6), N(-1,0) și P(5,-2) este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră punctele A(2,1) și $A_n(-n, n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

(5p) b) Să se afle aria triunghiului AA_2A_3.

(5p) c) Să se verifice dacă punctele O, A_n, A_{n+1} sunt coliniare, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=2014^{(x+y)}$.

(5p) a) Să se calculeze 2014∘ (-2014).

(5p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2\circ 2x=\frac{1}{2014}$.

(5p) c) Să se arate că dacă $x\circ y\circ z=2014^{z+2014}$, atunci $x+y=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$.

(5p) a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^2}, x\neq 1$

(5p) b) Să se arate că $f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(5p) c) Să se determine asimptotele funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x^2+2x-1, x\geq 0\\ 2x-1, x<0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(5p) c) Aflați $a\in[0,2]$ astfel încât aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa O*x* si dreptele de ecuații $x=a$ si $x=2$ să fie 9.

Varianta 12

Prof: Bășcău Cornelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se afle numarul real *x*, știind ca x - 3, x si x + 1 sunt termrnii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[4]{x^2-6x+9}=x+1$.

(5p) 3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Să se rezolve ecuația $(f\circ f)(x)-f(x)=0$.

(5p) 4. Să se determine numărul de drepte care trec prin 10 puncte distincte, necoliniare.

(5p) 5. Aflați ecuația mediatoarei segmentului [AB], unde A(2,3) și B(3,5).

(5p) 6. Comparați numerele cos4 și cos5.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se considera matricele $A(n)=\begin{pmatrix} e^{\ln n} & \ln e \\ \ln 1 & \ln e \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Aflați urma matricei *A(3)A(4)*.

(5p) b) Calculați $\det\left(A^3(3)\right)$.

(5p) c) Calculați $A^{2014}(1)$.

2. Fie polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[x], f(x)=x^4+a, g(x)=x^2+\hat{3}x+\hat{2}, a\in\mathbb{Z}_5[x]$.

(5p) a) Aflați rădăcinile polinomului *g*.

(5p) b) Determinați $a\in\mathbb{Z}_5[x]$ astfel încât polinomul *g* să dividă polinomul *f*.

(5p) c) Pentru $a=\hat{1}$ arătați că polinomul f nu are rădăcini.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

(5p) b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$

(5p) c) Studiati existenta soluțiilor ecuației $f(x)=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2} e^{\ln x^n}\ln x dx, n\in\mathbb{N}$

(5p) a) Calculați I_1.

(5p) b) Calculați $I_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

(5p) c) Verificați egalitatea: $5e^2I_0+20e^2I_1-6e^3=27I_2$

Varianta 13

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi numărul real x pentru care numerele $2,\ x^2+3x,\ 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 2. Determinaţi valoarea parametrului real m pentru care punctul $V\left(\frac{3}{4}, 3m+1\right)$ să fie vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-3x+4$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+9\right)=\log_2(5x+15)$.

(5p) 4. Determinaţi câte numere impare $\overline{ab}$ se pot forma ştiind că $a,b\in\{1,2,4,7\}$ şi $a\neq b$.

(5p) 5. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Rezolvaţi în mulţimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\cos x-\sqrt{3}=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\ m&0&0\\ m&2&m\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi $\det(A(1))$.

(5p) b) Determinaţi numărul real m ştiind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&3&0\\ 1&1&1\\ -2&3&0\end{pmatrix}$

(5p) c) Calculaţi $(A(1))+(A(2))+\dots+(A(10))$

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $3*4*(-3)$.

(5p) b) Arătaţi că $x*y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=7$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in(1,\infty)$.

(5p) b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=2$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2\ln x-3x$ şi $g(x)=\dfrac{2-3x}{x}$.

(5p) a) Să se arate că f este o primitivă a lui g, $\forall x\in(0,\infty)$.

(5p) b) Să se calculeze $\int f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx$.

Varianta 14

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine conjugatul numărului complex $z=\dfrac{3-2i}{1+i}+\dfrac{2+3i}{2-i}$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ exprimată prin relaţia $f(x)=2^x+x$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+\dots+f(8)$

(5p) 3. Să se determine numărul real x astfel încât $\log_{\frac{1}{2}}(7+5x)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)$.

(5p) 4. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element $n\in A$ acesta să verifice inegalitatea $n!\ge n^2$.

(5p) 5. Fie vectorii $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=-7\vec{i}+5\vec{j}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin 15^0-\cos 15^0=a$ să se calculeze valoarea expresiei $\sin 75^0+\cos 75^0-a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(m)=mA+I_3$.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Să se calculeze $M=2\cdot A+2^2\cdot A^2+\dots+2^{2014}\cdot A^{2014}$.

(5p) c) Să se arate că $X(m)\cdot X(n)=X(m+n)$ şi să se verifice dacă $X(m)$ este inversabilă.

2. Fie polinomul $f = X^3 - aX^2 + 3X - 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu x_1, x_2, x_3 rădăcini şi a este număr real.

(5p) a) Calculaţi $f(1) - f(-1)$.

(5p) b) Determinaţi restul împărţirii polinomului f la $x-1$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $x+1$ este 3.

(5p) c) Determinaţi numerele reale a pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei.

(5p) b) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F(x)=(ax+b)\sqrt{x}$ să verifice condiţia $F''(x)=f(x),\ x\in(0,\infty)$.

(5p) c) Să se determine $x\in(0,\infty)$ astfel încât $x^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt{x}-1$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi I_1 şi I_2.

(5p) b) Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Folosind eventual metoda de integrare prin părţi , arătaţi că $nI_n=\dfrac{1}{2}-\int_0^1\dfrac{x^n}{(1+x)^2}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 15

Prof. Brabeceanu Silvia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că $n=\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{16+6\sqrt{7}}$ este număr natural.

(5p) 2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3$ şi $g(x)=x-3$. Calculaţi $f(g(1))-g(f(1))$.

(5p) 3. Să se rezolve pe mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2\cdot 2^{2x-5}=9$.

(5p) 4. 16% din preţul unei mărfi, adică 256 lei reprezintă cheltuieli de transport. Care este preţul acesteia.

(5p) 5. Să se determine unghiul dreptelor $d_1: y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$ şi $d_2: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$.

(5p) 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris $\triangle MNP$, $M=\dfrac{\pi}{6}$, $N=\dfrac{\pi}{3}$ şi $MN=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian de coordonate xOy fie punctele $A(m,m)$, $B(2,m-3)$, $C(-3,3m-1)$ şi matricea $M=\begin{pmatrix} m & 2 & -3 \\ m & m-3 & 3m-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Calculaţi $\det(M)$.

(5p) b) Verificaţi că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ ABC este triunghi.

(5p) c) Pentru $m=4$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-14X^2+48 \in \mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Să se arate că $f=\left(X^2-7\right)^2-1$.

(5p) b) Să se demonstreze că polinomul nu are rădăcini întregi.

(5p) c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei.

(5p) c) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:(-3,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+3}$ şi

$F:(-3,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x+\ln(x+3)$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^1 (x+3)f(x)dx$.

(5p) b) Verificaţi dacă funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\int_{-2}^0 F(x)\cdot f(x)dx$,

Varianta 16

Prof. Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi conjugatul numărului complex $z = (1+2i)(2-i)$.

(5p) 2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)= x^2+3x-8$ şi $g(x) = -x-3$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia iraţională $\sqrt[3]{2x+1} = x+1$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 6.

(5p) 5. Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$. Calculaţi $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $C = \frac{\pi}{3}$ şi $AB = 8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A_p, B_p \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, $A_p = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & p-2 \\ 3p & p+1 & -2 \\ 2p+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B_p = \begin{pmatrix} 1 & p & p \\ p & p & -2 \\ p & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $p \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi $\mathrm{Tr}\,(A_0 + A^t_2)$.

(5p) b) Determinaţi CA_0, unde $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(5p) c) Calculaţi $\sum_{p=1}^{n}(A_p - B_p)$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + X + a$, unde $a \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi $f(-2)$.

(5p) b) Pentru $a = 2$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

(5p) c) Calculaţi $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$ şi $f'(-2)$, $x \in \mathbf{R}$.

(5p) b) Cercetaţi dacă funcţia admite asimptotă oblică.

(5p) c) Determinaţi curbura funcţiei f, oricare ar fi x real.

2. Se consideră funcţia f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f_1(x)dx$.

(5p) b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n, cu $I_n = \int f_n(x)dx$, $x\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}^*$ şi aplicaţi relaţia găsită în cazul I_2.

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt$.

Varianta 17

Prof. Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi numărul real x pentru care numerele 3, $x + 1$ şi 12 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu termini pozitivi, apoi scrieţi suma termenilor.

(5p) 2. Determinaţi numerele reale nenule a şi b astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = ax^2+bx+1$ să admită vârful V(1, 2), punct de maxim.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x^2-4}} = 2^{x-2}$.

(5p) 4. Determinaţi numerele naturale pare $\overline{ab}$ care se pot forma, ştiind că a, $b\in\{4, 5, 6, 7\}$.

(5p) 5. Se consideră dreapta $d: y = \dfrac{-4x+1}{7}$ şi punctul M (-2, -1). Determinaţi distanţa de la punctul M

la dreapta d.

(5p) 6. Transformaţi în produs E(a) = sin a – sin 5a şi calculaţi E($\frac{\pi}{6}$).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ $A = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Aflaţi valoarea det $(A – I_3)$ det $(A + I_3)$.

(5p) c) Arătaţi că $A^n = (3p)^{n-1}\cdot A$, $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, $\forall\, p\in\mathbf{R}$ şi calculaţi A^{2014}.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 - X + m$ unde m este număr real şi ecuaţia $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

(5p) a) Determinaţi m, număr real, pentru ca $-\sqrt{2}$ să fie rădăcină pentru f.

(5p) b) Determinaţi rădăcinile ecuaţiei.

(5p) c) Calculaţi $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)$ unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$.

(5p) a) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei f şi cercetaţi dacă funcţia are asimptote verticale.

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$, unde $x \in D$.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ şi $g: [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2^{tgx}$.

(5p) a) Calculaţi $\int f^2(x)dx$.

(5p) b) Calculaţi volumul corpului determinat de rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g(x)/f(x)$ pentru $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx$, $n \in \mathbf{N}^*$, stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Varianta 18

Prof. Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{5}\right)^{4x-3} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2-3x}$.

(5p) 2. Determinaţi mulţimea soluţiilor inecuaţiei logaritmice $\log_2(\log_{0,5}(x+1)) > 1$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^3 + 64 = 0$.

(5p) 4. Determinaţi numărul natural n astfel încât C_n^3, A_n^2 şi A_{n+1}^2 să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 5. Fie triunghiul ABC cu centrul de greutate $G(4, 3)$, iar $A(3, 6)$ şi $B(-2, 3)$. Determinaţi coordonatele vârfului C al triunghiului.

(5p) 6. Dacă $a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $b\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ şi $\sin a=\frac{3}{5}$, $\sin b=-\frac{4}{5}$ calculaţi $\cos a-\cos b$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinanţii $d_1=\begin{vmatrix} a+b & b & a \\ b & a+b & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$ şi $d_2(x)=\begin{vmatrix} 1+4x & 9 & x+4 \\ 2+5x & 8 & 2x+5 \\ 3+6x & 8 & 3x+6 \end{vmatrix}$ unde a, b, x sunt numere reale.

(5p) a) Calculaţi d_1 dezvoltând după o linie sau o coloană.

(5p) b) Calculaţi $d_2(0)$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $d_2(x)=0$, cu ajutorul proprietăţilor determinanţilor.

2. Se consideră mulţimea $M=\{A_x\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}\}$.

(5p) a) Arătaţi că "$\cdot$" este lege de compoziţie pe M.

(5p) b) Arătaţi că "$\cdot$" este asociativă şi aflaţi $n\in N$ ştiind că $A_1\cdot A_4\cdot A_9\ldots\cdot A_{n^2}=A_{55}$.

(5p) c) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui M.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f:\mathbf{R}-\{1,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$ şi $g: D\to\mathbf{R}$, $g(x)=\arcsin f(x)$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei în punctul $M(0,\frac{3}{2})$ la graficul funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei g şi calculaţi $g(-1)$.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)}$.

2. Se consideră funcţiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

(5p) a) Calculaţi $\int\frac{f_n(x)}{x^n}dx$.

(5p) b) Calculaţi $\int_e^{e^2}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

(5p) c) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbf{R}$, $g(x)=f_n(x)/x^n$.

Varianta 19

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 7.

(5p) 2. Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ pentru ca graficul funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (m - 1)x^2 + 3(m + 1)x + 2(m+1)$,
să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia iraţională $\sqrt[3]{2x+1} = x + 1$.

(5p) 4. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea $C_n^3 > C_n^6$?

(5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+2)\vec{j}$ şi $\vec{u} = 3\vec{i} + (a-3)\vec{j}$, , cu $a \in \mathbf{R}$. Determinaţi a astfel încât vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $C = \frac{\pi}{3}$ şi $AB = 8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A_p \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ $A_p = \begin{pmatrix} 1 & p+1 & p-2 \\ 3p & p+1 & -2 \\ 2p+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Cercetaţi dacă A_0 este inversabilă, scrieţi $A^t{}_1$, calculaţi Tr $(A_0 + A^t{}_1)$.

(5p) b) Determinaţi A^{-1} pentru $p = 0$.

(5p) c) Calculaţi $\sum_{p=1}^{n} A_p$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1$, $a,b \in \mathbf{R}$, $g = X^2 + X + 1$.

(5p) a) Determinaţi $a,b \in \mathbf{R}$ dacă $f(1) = 7$ şi $f(-1) = 5$.

(5p) b) Determinaţi $a,b \in \mathbf{R}$ dacă polinomul g divide polinomul f.

(5p) c) Aflaţi coeficienţii a şi b şi celelalte rădăcini ale polinomului f dacă acesta admite rădăcina $1+\sqrt{2}$ şi conjugata ei.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f: \mathbf{R} - \{1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ şi g: $D \to \mathbf{R}$, $g(x) = \arcsin f(x)$.

(5p) a) Determinaţi ecuaţia tangentei în punctul M $(0, \frac{3}{2})$ la graficul funcţiei f.

(5p) b) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei g şi calculaţi $g(-1)$.

(5p) c) Calculaţi $\lim_{x\to\infty} (f(x))^{3x-g(-1)}$.

2. Se consideră funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$.

(5p) a) Calculaţi $\int_1^e xf(x)dx$.

(5p) b) Calculaţi volumul corpului determinat de rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g: [1, e^2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_1^x (\ln t)^n dt$, $t > 0$, $x > 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Varianta 20

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi modulul numărului complex $z \in \mathbf{C}$, $z = \frac{3+2i}{1-3i}$.

(5p) 2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Calculaţi $f(f(1)) + f(f(2)) + \ldots f(f(12))$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = 2$.

(5p) 4. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale impare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) 5. Se consideră dreapta $d: 2x - 3y + 1 = 0$ şi punctul $A(2, 1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d .

(5p) 6. Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ şi $\sin a = \frac{3}{5}$, calculaţi $ctg\frac{a}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}$, $m \in \mathbf{R}$.

(5p) a) Calculaţi d determinantul matricei sistemului şi precizaţi când este nenul.
(5p) b) Cercetaţi compatibilitatea sistemului pentru $m \in \{2; 5\}$.
(5p) c) Rezolvaţi sistemul pentru $m = 1$.

2. Se consideră mulţimea $M = \{A_x \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\}$.

(5p) a) Arătaţi că „$\cdot$” este lege de compoziţie pe M.

(5p) b) Arătaţi că „$\cdot$” este asociativă şi aflaţi $n \in N$ ştiind că $A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \ldots \cdot A_{n^2} = A_{55}$.

(5p) c) Determinaţi elementele simetrizabile ale lui M.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f: D $\to$ **R**, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

(5p) a) Determinaţi D domeniul de definiţie al funcţiei f şi asimpotele sale.

(5p) b) Fie $S_n = f(2) + f(3) + ... + f(n)$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} S_n$.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţiile f, g, h: **R**$\to$**R**, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \int_0^x f(t^2)dt$ şi $h(x) = e^{f(x)}\cos x$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3}$.

(5p) b) Determinaţi primitivele funcţiei h.

(5p) c) Dacă $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n f(x)dx$, $n\in$ **N***, calculaţi I_2 şi stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Varianta 21

Prof: Ciocănaru Viorica

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi numerele $z = \frac{(1+i)^{12}}{i^{2012}}$ şi $\bar{z}$.

(5p) 2. Se consideră ecuaţia $x^2 + ax + b = 0$, cu $x_1, x_2 \in$ **R** şi $a, b \in$ **Z**. Arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 \in$ **Z**.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} + 2^{x-1} = 132$.

(5p) 4. Aflaţi valoarea lui $a \in$ **R** astfel încât în binomul $(a + \frac{1}{2\sqrt{2}})^{11}$, T_9 să fie $\frac{165}{2^{11}}$.

(5p) 5. Se consideră punctele A(3, 2) şi B(-2, 4). Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

(5p) 6. Dacă $tg^2 a = 2$, calculaţi $\cos 2a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A \in M_3$ (**R**) $A = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix}$, $p \in$ **R**.

(5p) a) Calculaţi A^2.

(5p) b) Aflaţi valoarea $\det(A - I_3)\det(A + I_3)$.

(5p) c) Arătaţi că $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$, $\forall n \in$ **N***, $\forall p \in$ **R** şi calculaţi A^{2012}.

2. În inelul comutativ $(\mathbf{Z}, *, \circ)$, $x * y = x + y - n$ şi $x \circ y = xy - n(x + y) + n(n + 1)$, $\forall\, x, y \in \mathbf{Z}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) a) Determinaţi elementul neutru al legii " $\circ$", pentru $n = 2$.

(5p) b) Rezolvaţi în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sistemul $\begin{cases} x * y = 1 \\ x \circ y = n \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) c) Determinaţi $a, b \in \mathbf{Z}$, a nenul, pentru ca funcţia $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între inelele $(\mathbf{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f: \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(3x - 2)$, $g: (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \log_x(x + 1)$, $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{h(x)}$.

(5p) b) Fie funcţia $k: D \to \mathbf{R}$, $k(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$. Calculaţi $k'(x)$ şi stabiliţi domeniul său de derivabilitate.

(5p) c) Arătaţi că g este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ şi verificaţi inegalitatea $\log_5 6 < \log_3 4$.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(5p) a) Calculaţi $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f_1(x)dx$.

(5p) b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă pentru I_n, cu $I_n = \int f_n(x)dx$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi aplicaţi relaţia găsită în cazul I_2.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \int_0^x f_n(t)dt$.

Varianta 22

Prof. Cristea Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\frac{1}{2^{1005}}(1+i)^{2010}$

(5p) 2. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât tripletul: $\sqrt{x-3}, 1+\sqrt{x-2}, 2+\sqrt{3x-5}$ să constituie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $4^x - 2^x - 12 = 0$.

5p) 4. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întamplare o submulţime dintre submulţimile nevide ale mulţimii A aceasta să aibă toate elementele pare.

(5p) 5. Să se determine numărul real m ştiind că vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4\vec{j}$ şi $\vec{u} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Determinaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului cu laturile de lungimi 6,8 , respectiv 10

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

(5p) 1. Fie mulţimea $G = (1,2) \cup (2;+\infty)$ şi legea de compoziţie "$*$" pe G definită prin

$$x * y = 1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$$, oricare ar fi $x, y \in G$. .

(5p) a) Să se arate că legea de compoziţie "*" este bine definită.

(5p) b) Să se arate că legea de compoziţie "*" este comutativă.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x * e_1 - 1 = 2$, unde e_1 este elementul neutru a legii de compoziţie "*".

2. Se consideră numărul $a = \frac{\sqrt{10} - i\sqrt{2}}{2}$ şi polinomul $f \in \mathbb{Q}, f = x^4 - 4x^2 + 9$

(5p) a) Să se arate că $f(a) = 0.$

(5p) b) Să se arate că polinomul f reductibil în $\mathbb{R}[x]$ şi în $\mathbb{C}[x]$ şi ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

(5p) c) Să se calculeze $a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6$, unde $a_1^6, a_2^6, a_3^6, a_4^6$ sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile

$$f : (-1;+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x \text{ şi } g : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(5p) a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{-x}{1+x}$ și $g'(x)=\frac{x^2}{1+x}, \forall x>-1$

(5p) b) Să se arate că $f(x)<0<g(x), \forall x>0$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{3}{n^2})+\ln(1+\frac{2n-1}{n^2}))$, știind că

$$1+3+5+...+(2n-1)^2=n^2 \text{ și } 1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

2. Se consideră funcțiile

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+...+x^{2002}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^1 f(t)dt, \forall x\in\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

(5p) a) Să se calculeze $f(1)$

(5p) b) Să se arate că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(5p) c) Știind că funcția $F(x)$ este bijectivă, să se calculeze $\int_0^a g(x)dx$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ reprezintă inversa funcției $F(x)$ și $a=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2013}$.

Varianta 23

Prof. Cristea Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+2i}\right)$.

(5p) 2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât tripletul: $3x-1, x+3, 9-x$ să constituie termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

(5p) 3. Rezolvați ecuația $10^x+4^x-2\cdot 25^x=0$.

(5p) 4. Se consideră mulțimea A={1,2,3,4,5,6} . Să se calculeze probabilitatea ca alegând la întamplare o submulțime dintre submulțimile nevide ale mulțimii A aceasta să aibă cel puțin 3 elemente.

(5p) 5. Să se determine numărul real m știind că vectorii $\vec{u}=(m-3)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{u}=8\vec{i}-(15-m)\vec{j}$ sunt coliniari.

(5p) 6. Determinați raza cercului circumscris triunghiului cu laturile de lungimi 7, 5, respectiv 6.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie "*" prin $x*y=3xy-6x-6y+14(x,y\in\mathbb{R})$

(5p) a) Arătaţi că legea de compoziţie este bine definită.

(5p) b) Demonstraţi că $(\mathbb{R},*)$ este monoid comutativ.

(5p) c) Rezolvați ecuația $x*x*x=11$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Q}$ şi funcţia polinomială $f(x)=x^3+x^2+ax+b.$.

(5p) a) Să se determine a,b ştiind că $1-i$ este rădăcină a funcţiei f .

(5p) b) Să se determine tóate rădăcinile funcţiei $f(x)$ ştiind că $1+\sqrt{x}$ este una dintre rădăcinile acesteia.

(5p) c) Să se determine a,b ştiind că ştiind ca funcţia f are o rădăcină triplă .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=xe^x$ şi $f_{n+1}(x)=f_n\,'(x),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}.$

(5p) a) Să se rezolve ecuaţia $f_2(x)=0$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)},n\in\mathbb{N}^*$

(5p) c) Să se determine asimptota la graficul funcţiei f_0 către $-\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)-x$, şi şirul $(I_n)_{n\geq1}$, definit prin $I_n=\int$

$$I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n}{2004+x^n}\right)dx,\forall x\in\mathbb{N}^*.$$

(5p) a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x>-1$.

(5p) b) Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că

$$I_n=\frac{1}{n}\ln\frac{2005}{2004}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(2004+x^n)dx,\forall n\in\mathbb{N}^* \quad .$$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$, unde $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx.$.

Varianta 24

Prof: Dobre Andrei Octavian

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) **1.** Soluția ecuației (x+1)+(x+4)+(x+7)+...+(x+28)=155

(5p) **2.** Să se determine mulțimea tuturor parametrilor reali m pentru care $(m-1)x^2+mx+m+1>0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

(5p) **3.** Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1)=1$

(5p) **5.** Fie punctele A(0,2), B(4,6), C(8,10) . Daca punctul A' este simetricul lui A față de BC, aflați lungimea segmentului AA'.

(5p) **6.** În triunghiul ABC avem BC=4, AC=2 si AB = 6. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] aflați $m(\sphericalangle BAM)$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M=\{X(a)/a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\}$

(5p) **1.** Calculați A^2-A.

(5p) **2.** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$.

(5p) **3.** Să se calculeze $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2014)$

2. Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compozitie " * " prin $x*y=\log_{2014}(2014^x+2014^y)$ $(x,y\in\mathbb{R})$

(5p) **a)** Arătați ca legea "*" este asociativa, dar nu admite element neutru.

(5p) **b)** Demonstrați că $2014+(y*z)=(2014+y)*(2014+z)$, oricare ar fi $y,z\in\mathbb{R}$

(5p) **c)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*x*x=x\log_{2014}6042$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$.

(5p) **a)** Calculați $f'(x)$

(5p) **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f

(5p) **c)** Să se determine ecuațiile asimptotelor către $-\infty$ la graficul funcției f

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$.

(5p) **a)** Să se arate că $I_0+I_1=\frac{\pi+4}{4}$

(5p) **b)** Să se arate că $I_2=\frac{\pi+2}{8}$

(5p) **c)** Să se demonstreze că $I_n<I_2$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$

Varianta 25

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvaţi ,în mulţimea numerelor reale,ecuaţia $\frac{2x-1}{x+3}-\frac{x-3}{2x-1}=\frac{26}{3}$.

5p **2.** Să se determine $a > 0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 2012.

5p **3.** Să se determine ecuaţia medianei duse din vârful A al triunghiului ABC ştiind că A(3,2), B(-2,3) şi C(6,-5).

5p **4.** Să se calculeze $tg1^0 tg2^0 \cdots tg89^0$.

5p **5.** Fie mulţimea $A=\{\pm1,\pm2,\pm3,0\}$ şi o funcţie bijectivă $f: A \to A$. Să se calculeze suma $f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$.

5p **6.** Rezolvaţi ,în mulţimea numerelor reale,ecuaţia $\lg^2 x-7\lg x=30$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $x\in\mathbf{R}$, se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -7 & 0\\ 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$

5p **a)** Rezolvaţi ecuaţia *det* A = 2012.

5p **b)** Pentru $x=\sqrt{2}$ calculaţi $A^n, n\in\mathbf{N}^*$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale *t* pentru care $det(t^2A) = t^2 detA$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră $a,b \in$ R şi polinomul $f = 2X^4 + 9X^2 + aX + b$ care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4

5p **a)** Să se determine *a* şi *b* ştiind că *f* are rădăcina ***i*** .

5p **b)** Să se calculeze $(x_1-3/2)^2+(x_2-3/2)^2+(x_3-3/2)^2+(x_4-3/2)^2$.

5p **c)** Să se determine *a* şi *b* ştiind că *f* are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}, \forall x\in\mathbf{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **b)** Să se arate că $f^2(x)f'(x)=x^2+2x, \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1\}$

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale graficului funcţiei *f* în punctual $x_0 = -2$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p c) Să se determine valorile f_{min}, respectiv f_{max}.

Varianta 26

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Calculaţi $(1+i)^{2012}-(1-i)^{2012}$.

5p 2. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt{11x+4}=x+2$.

5p 3. În mulţimea $[0,2\pi]$ rezolvaţi ecuaţia $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.

5p 4. Se consideră mulţimile A = {1,2,3,4} şi B = {±1,±2,±3}. Să se determine numărul funcţiilor strict crescătoare f : A → B.

5p 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(3,-2), B(-5,4). Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului [AB].

5p 6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_6+a_{16}=2012$, calculaţi a_3+a_{19}.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Pentru $m\in\mathbf{R}$ se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2m-1 & 3 & 1 \\ m & m-3 & 1 \end{pmatrix}$ şi punctele A(m,2), B(2m-1,3), C(m,m-3).

5p a) Determinaţi $m\in\mathbf{R}$ pentru care rangM = 2.

5p b) Determinaţi $m\in\mathbf{R}$ pentru care punctele A,B,C sunt necoliniare.

5p c) Pentru $m\in[1,5]$ determinaţi valoarea maximă a ariei triunghiului ABC.

2. Se consideră: mulţimea G = (-1,1), legea de compoziţie dată prin $x*y=\frac{x+y}{1+xy}, \forall x,y\in G$ şi funcţia $f:G\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

5p a) Arătaţi că G este parte stabilă faţă de legea de compoziţie $*$.

5p b) Arătaţi că $\forall x,y\in G$, $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$.

5p c) Ştiind că legea de compoziţie $*$ este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\cdots*\frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f : R→**R**, $f(x)=x^3-2x+5\operatorname{arctg} x$.

5p a) Arătaţi că funcţia f este strict crescătoare pe **R**.

5p b) Arătaţi că funcţia f este bijectivă.

5p c) Determinaţi $m\in\mathbf{R}$ pentru care $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}$ există, este finită şi nenulă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n>0}$ dat de : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2 .
5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n>0}$ este convergent.
5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$

Varianta 27

Prof: Dogaru Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{5}+\sqrt{11})^2$.

5p **2.** Rezolvaţi,în mulţimea **R×R,** sistemul $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13 \\ x+y=7 \end{cases}$.

5p **3.** Să se determine $x \in \mathbf{N}$, $x > 1$ astfel încât $2C_x^{x-2} + A_x^2 = 1524$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 2012, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$ ştiind că $\vec{u} = -7\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i}-\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze tgx , ştiind că $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ şi $\sin 2x = -\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.
5p **b)** Arătaţi că $A^3 = 10A$.
5p **c)** Rezolvaţi ecuaţia $AX = B$, unde $X \in M_{3,1}(\mathbf{C})$

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$,care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + ... + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.
5p **b)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la X^2-1.
5p **c)** Să se demonstreze că f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. Se consideră functia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin $f(x) = - x^3 + 5x^2 - 3x + m$.

5p **a)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
5p **b)** Determinaţi intervalele de concavitate ale funcţiei f.
5p **c)** Determinaţi valorile reale ale parametrului m pentru care ecuaţia f(x) = 0 are trei rădăcini reale distincte.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, se consideră funcţia $f_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ f_n(x) = (1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze aria subgraficului funcţiei f_n.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 x f_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

Varianta 28

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculați ε^3

(5p) 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4(3m+1)x + 5, m \in \mathbb{R}$. Să se determine cel mai mare m astfel încât funcția să aibă un maxim egal cu 6.

(5p) 3. Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $\sqrt{3x^2 - 4x - 15} = x - 2$

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \left\{\sqrt[3]{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n < 100\right\}$, acesta să fie rațional.

(5p) 5. Se consideră punctele $A(5,6), B(-1,-2), C(6,5)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

(5p) 6. Calculați produsul $P = \cos 1^0 \cdot \cos 2^0 \cdot \cos 3^0 \cdot \ldots \cdot \cos 179^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbb{C}$ se definește matricea $V(x) = A + xI_3$ și funcția polinomială $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x) = \det V(x)$.

(5p) a) Determinați rangul matricei A;

(5p) b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $f(x) = 1$

(5p) c) Există o matrice $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$, cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Justificați.

2. În $\mathbb{Z}$, se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$

(5p) a) În $\mathbb{Z}$, să se rezolve ecuația $x*x=x\circ x$.

(5p) b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât relația $x\circ a=3$ să aibă loc, oricare ar fi x, întreg.

(5p) c) Rezolvați sistemul $I_1 =$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

(5p) a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(5p) c) Să se studieze concavitatea funcției $f(x)$, pe intervalul $(-1,+\infty)$

2. Se consideră $I_n=\int\limits_e^{e^2} x\ln^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$

(5p) a) Să se calculeze I_1

(5p) b) Să se arate că $I_n\le I_{n+1}, \forall x\in\left[e,e^2\right], n\in\mathbb{N}$

(5p) c) Să se calculeze o formulă de recurență pentru integrala I_n

Varianta 29

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul $\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 \in \mathbb{Z}$

(5p) 2. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $ax^2+(3a-1)x+a+3=0$ are soluții reale.

(5p) 3. Să se arate că ecuația $\log_2\left(\log_3(x-16)\right)=1$ are soluție un număr întreg, pătrat perfect.

(5p) 4. După o reducere de 20% și o scumpire cu 15%, prețul unui produs devine 575 lei. Aflați prețul inițial.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(1,2), B(5,6), C(-1,1)$. Determinați ecuația înălțimii din C, în acest triunghi.

(5p) 6. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

(5p) a) Să se scrie matricea A, a sistemului și să se calculeze $\det A$.

(5p) b) Să se calculeze rangul matricei A, după valorile parametrului real, a. Poate fi rangA=2?

(5p) c) Pentru $a\neq 1$, să se rezolve sistemul.

2. Se consideră inelul $(Z_5,+,\cdot)$, unde $Z_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$

(5p) a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{4}=\hat{3}$, în Z_5.

(5p) b) Să se calculeze, în Z_5, determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & 3 & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix}$

(5p) c) Să se rezolve, în $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$, sistemul $\begin{cases} \hat{3}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{3} \end{cases}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-2}$

(5p) a) Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, să se calculeze $f'(x)$

(5p) b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f

(5p) c) Să se determine coodonatele punctelor de extrem ale graficului funcției f și punctele de inflexiune, dacă există.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^4+1}dx$

(5p) a) Calculați $\int\dfrac{x^n}{x^4+1}dx$, pentru n=3

(5p) b) Calculați I_1 și I_3.

(5p) c) Demonstrați că $I_2\in\left(\dfrac{\ln 2}{4},\dfrac{\pi}{8}\right)$

Varianta 30

Prof. Gaga Loghin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie ecuația $x^2-mx-1=0$, $m\in\mathbb{R}$, cu soluțiile x_1 și x_2. Să se determine parametrul real m, astfel încât $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$

(5p) 2. Se consideră șirul $x_n=2n-1, n\in\mathbb{N}^*$. Cât trebuie să fie valoarea lui n, astfel încât să existe relația $x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=2014^2$

(5p) 3. Determinați soluțiile ecuației $\sqrt{3}\cdot\sin x-\cos x=1,\ x\in[0,2\pi]$

(5p) 4. Să se determine TVA-ul adăugat unui produs, știind că prețul de vânzare (prețul cu TVA) este 372 lei, iar TVA-ul este 24% din prețul inițial al produsului.

(5p) 5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{u}=a\overline{i}+(a-1)\overline{j}$ și $\overline{v}=3\overline{i}-(3a-1)\overline{j}$ să fie perpendiculari.

(5p) 6. Să se calculeze suma $S=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+\dots+\sin^2 90^0$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

(5p) a) Să se calculeze A^3

(5p) b) Să se determine rangul matricei $A+A^t+I_3$

(5p) c) Să se determine inversa matricei $A+I_3$

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+X+b;$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g(X)=X^2-1$.

(5p) b) Să se determine polinomul f, știind că una dintre rădăcinile acestuia este $x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(5p) c) Pentru $a=-4$, folosind polinomul f determinat la b), să se determine $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+1}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia funcției f.

(5p) b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\ \infty)$

(5p) c) Să se arate că, pentru $a,b\in\left(-1+\sqrt{3},\infty\right),\ f\left(\sqrt{ab}\right)\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx$

(5p) a) Să se calculeze I_2

(5p) b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

Varianta 31

Prof: Gaga Loghin.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați produsul numerelor complexe $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{20}$.

(5p) 2. Verificați dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x-2012$ este injectivă

(5p) 3. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $16^x+5\cdot 4^{x+1}-21=0$

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre,
acesta să aibă exact două cifre egale.

(5p) 5. În sistemul de axe de coordonate xOy, se consideră punctele: $A(2,5), B(-3,4), C(7,-2)$.
Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii BC

(5p) 6. Fie $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\cos a=-\frac{4}{5}$. Calculați $tg\,\frac{a}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\ m&1&0\\ 1&1&m\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$ și sistemul de ecuații

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ mx+y=-1\\ x+y+mz=3\end{cases},\ x,y,z\in\mathbb{R}$$

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei M

(5p) b) Să se rezolve sistemul, știind că m=1

(5p) c) Să se studieze în ce condiții sistemul este incompatibil

2. Fie mulțimea $M=(a,\infty)$ o mulțime de numere reale și legea de compoziție, definită pe $\mathbb{R}$,
$x*y=2xy-4x-4y+5a$

(5p) a) Să se arate că, pentru orice $a\geq 2$, mulțimea **G** este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația $*$.

(5p) b) Să se determine a, știind că $(G,*)$ este grup abelian

(5p) c) Să se arate că grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe prin funcția
$f:G\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=2x-4$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$

(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie și cele de convexitate ale funcției f.

(5p) c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^{2011})+x^{2013}}{x^{2012}}$$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(5p) a) Să se calculeze I_0 și I_1

(5p) b) Să se arate că $\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n-1)},\forall n\geq 2$

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)$

Varianta 32

Prof: Gaga Loghin.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $b_1, 7, b_3, 28, \cdots$

(5p) 2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=5^x+\log_5 x$. Să se determine $f(f(1))$

(5p) 3. Se consideră dezvoltarea binomială $\left(2012\sqrt[4]{x}+\frac{2012}{\sqrt{x}}\right)^9, x>0$. Să se dedetermine termenul liber al dezvoltării.

(5p) 4. Se consideră mulţimea *M* a tuturor funcţiilor definite pe *A* ={2010, 2011, 2012}cu valori în *B*={1, 2, 3}. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcţie din mulţimea *M*, aceasta să fie injectivă .

(5p) 5. Se consideră punctele A(−2,3), B(3,m), C(2,4)și D(n,5). Să se determine *m,n*∈ **R** astfel încât patrulaterul *ABCD* să fie paralelogram .

(5p) 6. Fie ABC un triunghi, cu tgA=2, $tgB=\frac{8-5\sqrt{3}}{11}$. Să se determine măsura unghiului C

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, de ordin 3, cu elemente din mulțimea numerelor reale.

(5p) a) Să se verifice dacă $A^3 - A = A^2 - I_3$

(5p) b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3,\ \forall n \in N, n \geq 3$

(5p) c) Să se arate că suma elementelor matricei A^n este n+3

2. Fie polinomul $p(X) = X^3 + aX^2 + X + b, a, b \in \mathbb{Z}$ și rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

(5p) a) Să se afle rădăcinile polinomului p, pentru a=b=1

(5p) b) Să se determine a și b, știind că o rădăcină a polinomului este $x = i$.

(5p) c) Știind că b=1, să se determine a știind că polinomul admite o rădăcină rațională

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-3,3) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\dfrac{x+3}{3-x}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și să se determine intervalele de monotonie

(5p) b) Să se determine asimptotele funcției f

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x^n+1)}{x^2+1}dx, n \in \mathbb{N}^*$

(5p) a) Să se calculeze I_0.

(5p) b) Să se studieze monotonia șirului

(5p) c) Folosind, eventual relația $\ln(1+t) \leq t$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

Varianta 33

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma tuturor numerelor naturale mai mici decât 100 care sunt divizibile cu 5.

(5p) 2. Să se rezolve ecuația $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 117$.

(5p) 3. Calculaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{20}$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre cu elemente din mulţimea $\{0,1,2,3\}$, acesta să fie număr par.

(5p) 5. Să se determine numărul real *m* astfel încât dreptele $d_1: 3x - 2y + 5 = 0$ şi $d_2: 4x + my - 2 = 0$ să fie paralele.

(5p) 6. Calculaţi lungimea medianei din A corespunzătoare triunghiului ABC determinat de punctele A(4,3), B(2,5) şi C(-2,-1).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră punctele A(3,2) B(1,5) şi C(-*n*,*n*), unde $n \in N^*$

(5p) a) Pentru *n=1* să se scrie ecuaţia dreptei AC;

(5p) b) Să se demonstreze că punctele A, B, C nu pot fi coliniare, $\forall n \in N^*$;

(5p) c) Să se determine $n \in N^*$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie 10.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie:

$x * y = 6xy - 5(x+y) + 5, \forall x, y \in R$

(5p) a) Să se demonstreze asociativitatea legii de compoziţie;

(5p) b) Să se determine simetricul lui 2 în raport cu legea de compozitie " * ";

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x * x * x = x, \forall x \in R$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

(5p) a) Calculaţi $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$;

(5p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei *f*;

(5p) c) Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, dacă $m \in (-2, 2)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \in N^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2014} dx, \forall n \in N^*$

(5p) a) Calculaţi I_1

(5p) b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n \in N^*}$ verifică relaţia $I_{n+1} + 2014 I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in N^*$

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} n I_n$

Varianta 34

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z=1+i+i^2+...+i^{10}$.

(5p) 2. Să se determine $m\in R$ astfel încât $x^2-mx+9>0, \forall x\in R$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-4x+3}=x-1$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii A={0,1,2,...,10}, acesta să verifice inegalitatea $n!<100$.

(5p) 5. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1: 2x-3y+5=0$ şi $d_2: ax+6y-1=0$.Să se determine numărul real *a* astfel încât drepetele să fie perpendiculare.

(5p) 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii : $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=2, m\in R \\ mx+y+z=3 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $m\in R$ pentru care detrminantul matricei este nul;

(5p) b) Pentru $m=0$ să se rezolve sistemul de ecuaţii;

(5p) c) Să se discute în funcţie de $m\in R$ rangul matricei sistemului.

2. Se consideră polinomul $f\in Z_4[X]$, $f=X^3+aX+b$

(5p) a) Să se determine numărul polinoamelor f de această formă;

(5p) b) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+\hat{2}$;

(5p) c) Pentru $b=\hat{1}$ să se determine $a\in Z_4$ astfel încât polinomul f să nu admită rădăcini în $Z_4[X]$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: R/\{2014\}\to R, f(x)=\dfrac{x}{x-2014}$.

(5p) a) Să se demonstreze că *f* este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$

(5p) b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f ;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^x$

2. Se consideră funcţiile $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\ln x+1$ şi $g:(0,\infty)\to R, g(x)=x\ln x$

(5p) a) Să se arate că funcţia g este o primitivă a funcţiei f ;

(5p) b) Calculaţi $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$

(5p) c) Să se arate că $e-1\le\int_1^e f(x)dx\le 2(e-1)$

Varianta 35

Prof. Ionescu Maria

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt{6}\right)^{-2}$.

(5p) 2. Să se determine funcţia de gradul al doilea $f:R\to R$ care este tangentă la axa OX şi trece prin punctele $A(0,-4)$ şi $B(1,-1)$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x^2-20\lg x+24=0$.

(5p) 4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibe produsul cifrelor egal cu 6.

(5p) 5. Calculaţi lungimea înălţimii din C a triunghiului ABC determinat de punctele $A(3,0)$; $B(0,4)$ şi $C(3,4)$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin x=-\frac{1}{2}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se arate că $A^2-6A+8I_2=O_2$;

(5p) b) Să se determine matricea $X\in M_2(C)$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$

(5p) c) Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $Y^2=A$, în mulţimea $M_2(C)$

2. Se consideră polinomul $f\in R[X]$, $f=X^4-2014X^2+2013$

(5p) a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3+x_4$;

(5p) b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului f ;

(5p) c) Calculaţi $(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2)$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\ln(x^2+1)$

(5p) a) Să se studieze monotonia funcţiei f .

(5p) b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f .

2. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\sqrt{x^2+2014}$

(5p) a) Calculaţi $\int_{11}^{102} f\left(\sqrt{x}\right)dx$;

(5p) b) Să se arate că $\int_1^{11}\frac{x}{f^2(x)}dx=\ln\frac{45}{\sqrt{2015}}$;

(5p) c) Să se arate că orice primitivă F a funcţiei f este strict crescătoare pe R.

Varianta 36

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi partea imaginară a numărului: $(1+i)^{2014}$.

(5p) 2. Rezolvaţi în RxR sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$.

(5p) 4. Calculaţi numărul funcţiilor strict monotone $f:\{1;2;3;4\}\to\{1;2;3;4;5;6\}$.

(5p) 5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $2\sin x+\cos 2x=1$.

(5p) 6. Calculaţi aria triunghiului ABC, dacă A(1;2);B(-1;-2) şi C(0;-2).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} ax+by+cz=a \\ bx+cy+az=b \\ cx+ay+bz=c \end{cases}$;a,b,c$\in R^*$,cu necunoscutele (x,y,z)$\in R^3$.

(5p) a) Arătaţi că determinantul sistemului este Δ=(a+b+c)(-a$^2-b^2-c^2+ab+bc+ca$).

(5p) b) Rezolvaţi sistemul in cazul în care acesta este compatibil determinat.

(5p) c) Dacă $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$ şi $x^2+y^2+xy=0$,demonstraţi că sistemul are soluţie unică.

2. Se consideră mulţimea G=$\left\{\begin{pmatrix} x & 5y \\ -y & x \end{pmatrix} / x,y\in Z\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că,pentru orice A,B$\in G$ rezultă A+B$\in G$ şi AB$\in G$.

(5p) b) Dacă A,B$\in G$ şi AB=O_2,demonstraţi că A=O_2 sau B=O_2.

(5p) c) Calculaţi elementele inversabile ale inelului (G;+;·).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).

(5p) a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$.

(5p) b) Arătaţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are trei rădăcini reale distincte.

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Se consideră şirurile $I_n=\int_{-3}^{3}x^n\sqrt{9-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_{-1}^{1}x^n\sqrt{9-x^2}\,dx$,unde n$\in N$

(5p) a) Calculaţi I_1 şi I_2.

(5p) b) Demonstraţi că $I_{2n+1}=0$,pentru orice n$\in N$.

(5p) c) Calculaţi J_{2n+2} în funcţie de J_{2n}.

Varianta 37

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $\left|z^3\right|+\left|\overline{z}^{-3}\right|$,dacă $z=-i+\sqrt{3}$.

(5p) 2. Determinaţi mulţimea punctelor de intersecţie dintre graficele funcţiilor $f:R\to R$, $f(x)=2x^2-3x+1$ şi $g:R\to R$, g(x)=2-2x.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $9^x-18\cdot 6^{x-1}+2^{2x+1}=0$.

(5p) 4. Calculaţi rangul termenului ce nu conţine x din dezvoltarea binomului: $\left(x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{100}$.

(5p) 5. Determinaţi valorile parametrului real m, ştiind că dreptele de ecuaţii (m+1)x-2y-5=0 şi 4x-(m-1)y+7=0 sunt paralele.

(5p) 6. Calculaţi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$,unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\\ 1 & a^3 & b^3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ bc & ac & ab\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătaţi că detA=ab(a-1)(b-1)(b-a) şi detB=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c).

(5p) b) Demonstraţi că $\det(A\cdot {}^{T}A)\geq 0$,unde ${}^{T}A$ este transpusa matricei A.

(5p) c) Calculaţi $\det(A-{}^{T}A)$.

2. Se consideră polinomul $f\in C[X]$, $f=x^4-x^3+x^2-x+1$cu rădăcinile $x_k, k=\overline{1;4}$.

(5p) a) Arătaţi că (x+1)f(x)= x^5+1.

(5p) b) Calculaţi $\sum_{k=1}^{4}x_k^5$.

(5p) c) Demonstraţi că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty)\to R$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

(5p) a) Calculaţi asimptotele la graficul funcţiei f.

(5p) b) Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Arătaţi că şirul $a_n=\ln(n+2)-\sum_{k=1}^{n}f(k)$ este convergent.

2. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{1}{\cos x+2}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$.

(5p) b) Arătaţi că funcţia f admite primitive care sunt strict crescătoare pe R.

(5p) c) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Varianta 38

Prof. Isofache Cătălina Anca

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi $(1+i)^3+(1-i)^3$.

(5p) 2. Determinaţi minimul funcţiei $f:R\to R$, $f(x)=3x^2+x+5$.

(5p) 3. Rezolvaţi în R ecuaţia: $\sin^2 x=\cos x-1$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr natural format din trei cifre,acesta să fie divizibil cu 6.

(5p) 5. Calculaţi valorile reale ale parametrului m,dacă mediana din vârful C al triunghiului ABC cu A(m+1;2);B(2;4) şi C(m-1;2) are lungimea $\sqrt{2}$.

(5p) 6. Determinaţi valorile reale ale lui a, ştiind că vectorii $\vec{u}=\vec{i}+(a-3)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră punctele A(m+1;2);B(m;m), C(2m+1;5) şi matricea $M=\begin{pmatrix} m+1 & 2 & 1\\ m & m & 1\\ 2m+1 & 5 & 1\end{pmatrix}$, m$\in R$.

(5p) a) Calculaţi rangul matricei M.

(5p) b) Demonstraţi că există triunghiul ABC, pentru orice m$\in R$.

(5p) c) Calculaţi valoarea minimă a ariei triunghiului ABC.

2. Se consideră legea de compoziţie $x\circ y=\sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}$, $\forall x,y\in G; G=[0;\infty)$.

(5p) a) Arătaţi că legea de compoziţie este asociativă.
(5p) b) Calculaţi elementele simetrizabile ale mulţimii G, în raport cu legea de compoziţie.
(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea G ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2014 ori} = x$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f; g : R \to R$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ şi $g(x) = e^x$.

(5p) a) Calculaţi $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 42}{x - 3}$.

(5p) b) Demonstraţi că $g(x) \geq x + 1$,oricare ar fi $x \in R$.

(5p) c) Arătaţi că $g(x^3) + g(x^2) + g(x) \geq f(x), \forall x \in R$.

2. Se consideră funcţiile $f : (2; \infty) \to R$, $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; $g : (2; \infty) \to R$

$g(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$; A,B,C $\in R$ şi $F : [e; e^2] \to R$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt + \ln \frac{x^2 - x - 2}{x+2}$.

(5p) a) Calculaţi A,B şi C , ştiind că f(x)=g(x) , $\forall x \in (2; \infty)$

(5p) b) Determinaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=3 şi x=4.

(5p) c) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei F în jurul axei Ox.

Varianta 39

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $n = \left|2\sqrt{2} - 2\right| + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$ este natural.

(5p) 2. Determinaţi numărul real x pentru care numerele $\sqrt[3]{8}, 2x + 1, 8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2 + 3\right) = \log_2\left(3x + 1\right)$.

(5p) 4. Determinaţi câte numere naturale pare $\overline{abc}$, se pot forma ştiind că $a, b, c \in \{0, 1, 4, 5\}$.

(5p) 5. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = -4\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic isoscel ABC, ştiind că $m(A) = 90^\circ$ şi $AB = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Să se calculeze $f(A)=A^3-2A^2+A+I_3$.

(5p) b) Să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & na+C_n^2\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice n număr natural, $n\geq 2$.

(5p) c) Arătaţi că A este inversabilă pentru orice $a\in\mathbb{R}$ şi calculaţi A^{-1}.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+4X^3+aX^2-6X+b\in\mathbb{C}[X]$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X-1$ şi cu $X+2$.

(5p) b) Pentru $a=1, b=0$ descompuneţi polinomul în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

(5p) c) Determinaţi o relaţie între a şi b ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2x_3x_4=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei.

(5p) c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_o=2$, situat pe graficul funcţiei.

2. Se consideră funcţiile $f:(3;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+3+\dfrac{1}{x-3}$ şi $F:(3;+\infty)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=x^3+3x+\ln(x-3)$.

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(3;+\infty)$.

(5p) b) Verificaţi dacă F este o primitivă a funcţiei f.

(5p) c) Calculaţi $\int_4^5 f'(x)dx$.

Varianta 40

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi produsul elementelor mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+2|\le 10\}$.

(5p) 2. Determinaţi $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ astfel încât vârfurile parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)x^2-2mx+m+1$ să fie situate sub axa Ox.

(5p) 3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $5^x+5^{x+2}=\frac{26}{5}$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie cub perfect.

(5p) 5. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin $A(1,-2)$ şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $4x+2y-11=0$.

(5p) 6. Calculaţi cosinusul unghiului B al triunghiului ABC dacă $AB=3, AC=5$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimile $P=\{A\in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2=I_3\}$ şi $Q=\{A\in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2=A\}$.

(5p) a) Dacă $A\in P$ atunci $B=\frac{1}{2}(A+I_3)\in Q$.

(5p) b) Dacă $A\in Q$ atunci $C=2A-I_3\in P$.

(5p) c) Demonstraţi că $A(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ este inversabilă pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ şi calculaţi $A^{-1}(a,b)$.

2. Fie $(I,+,\cdot)$ un inel necomutativ. Pe mulţimea I se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+yx$.

(5p) a) Studiaţi comutativitatea şi asociativitatea legii de compoziţie "$*$".

(5p) b) Demonstraţi că operaţia "$*$" este distributivă faţă de adunare.

(5p) c) Să se arate că $x^2*(y*x)=(x^2*y)*x, \forall x,y\in I$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{e^x}$.

(5p) a) Precizaţi asimptotele funcţiei.
(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
(5p) c) Aflaţi punctele de inflexiune ale funcţiei.

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a) Studiaţi monotonia funcţiei F.
(5p) b) Arătaţi că F este inversabilă.
(5p) c) Calculaţi $\int_0^{\frac{11}{6}} F^{-1}(x)dx$, unde F^{-1} este inversa lui F.

Varianta 41

Prof. Lămătic Lidia Carmen

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi raţia progresiei geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $a_2+a_3=4$ şi $a_4+a_5=36$.
(5p) 2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{3-x}-4$ cu axele de coordonate.
(5p) 3. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=x-1$.
(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca, alegînd la întâmplare un număr natural de trei cifre distincte, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 5
(5p) 5. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$. Să se arate că unghiul format de cei doi vectori este ascuţit dacă şi numai dacă $a>3$.
(5p) 6. Arătaţi că $\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} mx+y+z=3 \\ x+my+z=5 \\ x+y+mz=7 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.
(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.
(5p) c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât soluţia $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ este progresie aritmetică cu raţia 2.

2. Fie $a\in\mathbb{R}_+^*$ şi $I_a=(a,\infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6$.
(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}_+^*$ pentru care I_a este parte stabilă pentru această lege de compoziţie.
(5p) b) Ştiind că $(I_2,\circ)$ este grup abelian, să se calculeze inversul elementului 2014.
(5p) c) Să se arate că $f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(I_2,\circ)$, $f(x)=x+2$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{a+x}{a-x}$, $a\in\mathbb{R}_+^*$.
(5p) a) Cercetaţi dacă funcţia admite asimptote.
(5p) b) Demonstraţi că ecuaţia $f(x)=0$ are soluţie unică.
(5p) c) Determinaţi intervalele de convexitate ale funcţiei.

2. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{2x}$.
(5p) a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $\mathbb{R}$.
(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.
(5p) c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)-e^{4x}+x-2$ în jurul axei Ox.

Varianta 42

Prof. Marcu Ştefan Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali , se ştie că $b_1 = 2$ şi $b_4 = 54$. Calculaţi suma primilor şase termeni ai progresiei .

(5p) 2. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie dintre graficul funcţiei $f : R \to R, f(x) = x^2 + x + 2$ şi dreapta de ecuaţie $y = 2x + 8$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $2^{x-4} = 4^{x-2}$.

(5p) 4. Aflaţi câte numere naturale de patru cifre distincte, se pot scrie cu cifrele impare.

(5p) 5. Calculaţi perimetrul unui triunghi ABC, ştiind că : $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

(5p) 6. Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, ştiind că : AB=4, AC=5 şi BC=6 .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x, se consideră matricea : $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$

(5p) a) Calculaţi $\det(A(x) + A(-x))$.

(5p) b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\det(A(x)) = 0$.

(5p) c) Arătaţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $A(x) \cdot A(-x)$ este strict negativă .

2. Pe mulţimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziţie asociativă :
$x \circ y = x \cdot y + 5x + 5y + 20$

(5p) a) Verificaţi că : $x \circ y = (x+5)(y+5) - 5$, $(\forall) x, y \in R$

(5p) b) Aflaţi elementul neutru al legii de compoziţie .

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{2014-ori} = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

(5p) a) Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}, (\forall) x \in R$.

(5p) b) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că f este strict crescătoare pe R .

2. Se consideră şirul : $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^x dx, n \in N$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\in N}$ este strict descrescător .

(5p) c) Demonstraţi că : $I_n + n \cdot I_{n-1} = e, (\forall) n \in N^*$.

Varianta 43

Prof. Marcu Ştefan Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi modulul numărului complex : $z = \dfrac{(1+i)^{2014}}{(1-i)^{2013}}$.

(5p) 2. Deterninaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei : $f : R \to R, f(x) = x^2 + x + 1$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\log_2(x^2+1) = 1 + \log_2 x$.

(5p) 4. Calculaţi probabilitatea ca un număr natural de două cifre să fie divizibil cu 5 .

(5p) 5. În reperul cartezian XOY se consideră punctele A,B,C de coordonate : A(1,1) , B(-1,-1) şi C(2,-2) . Calculaţi lungimea medianei duse din vârful C în triunghiul ABC .

(5p) 6. Într-un triunghi ABC avem $A = \dfrac{\pi}{4}, B = \dfrac{\pi}{3}$. Calculaţi $\sin C$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\det(I_2 + x \cdot A) = 1$

(5p) b) Verificaţi că : $A^2 + 5 \cdot A = O_2$.

(5p) c) Calculaţi suma : $A + A^2 + ... + A^{2014}$.

2. Se consideră polinomul $f \in R[X], f = X^3 + aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in R$.

(5p) a) Să se determine $a, b, c \in R$, ştiind că $f(0) = 1, f(1) = 4, f(-1) = 0$

(5p) b) Pentru $a = b = c = 1$, aflaţi rădăcinile polinomului f .

(5p) c) Arătaţi că, dacă $a^2 - 2b < 0$, atunci f nu are toate rădăcinile reale .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) c) Arătaţi că f este strict crescătoare pe $(-1,1)$.

2. Se consideră şirul : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + nx + 1}{x+1} dx, n \in N$

(5p) a) Calculaţi I_2 .

(5p) b) Arătaţi că : $0 < I_n < (n+2) \cdot \ln 2$.

(5p) c) Calculaţi : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (I_n + I_{n+1})$.

Varianta 44

Prof. Marcu Ştefan Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi suma : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - .... + \frac{1}{3^6}$.

(5p) 2. Se consideră funcţiile $f, g: R \to R, f(x) = 2x+1, g(x) = x+3$. Calculaţi $f(g(0)) - g(f(0))$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale, ecuaţia : $\sqrt{x^2+1} = x-3$.

(5p) 4. Aflaţi câte numere naturale de trei cifre distincte, se pot scrie cu cifrele pare nenule .

(5p) 5. Fie vectorii : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine numerele reale x, y astfel încât $\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$.

(5p) 6. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ cu $\sin x = \frac{1}{3}$. Calculaţi $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A_n(2n-1, 2n+1)$ cu $n \in N$.

(5p) a) Calculaţi aria triunghiului $OA_{2013}A_{2014}$.

(5p) b) Arătaţi că, punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m,n,p\in N$.

(5p) c) Aflaţi câte drepte distincte, determină punctele $O, A_0, A_1,..., A_{2014}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziţie :
$x\circ y = x\cdot y - ax - ay + 2$.

(5p) a) Să se afle $a\in R$ ştiind că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1,\ (\forall)x,y\in R$.

(5p) b) Pentru a=1, verificaţi dacă numărul $\dfrac{2014}{2013}$ este simetricul numărului 2014, în raport cu legea "$\circ$".

(5p) c) Aflaţi valorile reale ale lui a, pentru care : $x\circ x>0,(\forall)x\in R$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f: R^* \to R,\ f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) c) Demonstraţi că : $\dfrac{2014}{\ln 2014}>\dfrac{2013}{\ln 2013}$.

2. . Se consideră şirul : $I_n=\int_0^1 x\cdot(1-x)^n\,dx, n\in N$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in N}$ este convergent .

(5p) c) Arătaţi că : $I_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)},(\forall)n\in N$.

Varianta 45

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați modulul numărului complex $(1+i)(2-3i)$.

(5p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+1}-2^{x+2}+1=0$.

(5p) 3. Determinați valoarea minimă a funcției $f:R\to R, f(x)=x^2-7x+6$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

(5p) 5. Se consideră punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=-\vec{i}+5\vec{j}$ .Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$.

(5p) 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dacă $AB=2, AC=3, m(A)=\frac{5\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 \\ x & 2^x & -2 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}, x\in R.$.

(5p) a) Arătați că D(x) este pătrat perfect, $\forall x\in N$.

(5p) b) Calculați D(0).

(5p) c) Rezolvați în R ecuația $D(x)=2^{2x}$.

2. Pe mulțimea $G=(\sqrt{3},\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2y^2-3x^2-3y^2+12}$

(5p) a) Să se arate că legea este asociativă.

(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii.

(5p) c) Să se rezolve în G ecuația $x*1=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:D\to R, f(x)=\ln\left(1+\frac{2014}{x}\right)$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție al funcției.

(5p) a) Determinați domeniul maxim de definiție D.

(5p) b) Calculați $f'(x)$.

(5p) c) Determinați asimptota la graficul funcției către $+\infty$.

2. Fie $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} xe^{x}, x\le 0 \\ \sin^{3}x, x>0 \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe R.

(5p) b) Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x^{2}}$.

Varianta 46

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\left[\sqrt{2014}\right]+\sqrt{\left[\frac{2014}{2013}\right]}$.

(5p) 2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ definit prin $a_n=5n-3$. Arătați că șirul este o progresie aritmetică.

(5p) 3. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+3x+3=0$. Calculați $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$.

(5p) 4. Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=1+3x$. Rezolvați în R ecuația $f\circ f=f$.

(5p) 5. Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculați tgx.

(5p) 6. Fie paralelogramul ABCD cu AB=6, BC=8, $m(B)=\frac{\pi}{6}$. Calculați aria triunghiului ABO, unde O este punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ mx-y+z=-1,\ m\in R \\ x-my-z=2 \end{cases}$

(5p) a) Calculați determinantul matricei A, unde A reprezintă matricea asociată sistemului.

(5p) b) Determinați valorile reale ale lui *m* astfel încât matricea A să fie inversabilă.
(5p) c) Arătați că sistemul este incompatibil pentru m= -1.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - \left(m^2 + n^2\right)X^2 + \left(m+n\right)X + 1,\ m,n \in R.$

(5p) a) Calculați f(0).
(5p) b) Determinați m,n $\in$ R, astfel incât între rădăcinile polinomului x_1, x_2, x_3 să existe relația

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{1}{2}$$

(5p) c) Pentru m=1 și n=0 calculați f(1)+f(2)+…+f(100).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : R - \{2\} \to R,\ f(x) = \frac{2014x}{x-2}$.

(5p) a) Calculați $f'(x)$.
(5p) b) Arătați că $f(x) < 2014, \forall x \in (-\infty, 2)$.
(5p) c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} arctg^2 \sqrt{x-2} \cdot f(x)$

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to R,\ f(x) = x^3(\ln x - 1),\ g(x) = x^2(3\ln x - 2)$.

(5p) a) Arătați că f este o primitivă a lui g.
(5p) b) Calculați $\int_1^e g(x)dx$.
(5p) c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

Varianta 47

Prof. Nicolaescu Nicolae

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

(5p) 2. Într-o progresie geometrică al cincilea termen este egal cu 48, iar al treilea termen este egal cu 12.Calculați al nouălea termen al progresiei geometrice.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x}=x$.

(5p) 4. Determinați partea imaginară a numărului $\frac{i^{2014}}{i+1}$.

(5p) 5. Calculați $tg\frac{11\pi}{4}$.

(5p) 6. Fie dreptunghiul ABCD cu AB=8, BC=6, iar O este punctul de intersecție al diagonalelor. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ în $M_2(R)$.

(5p) a) Rezolvați ecuația $\det(A+xI_2)=-3$.

(5p) b) Rezolvați în $M_{2,1}(R)$ ecuația $A\cdot X=C$.

(5p) c) Arătați că matricea A-xB este inversabilă pentru orice x număr natural par.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2+3X+\hat{1}\in Z_7[X]$.

(5p) a) Determinați $m\in Z_7$ astfel încât produsul rădăcinilor polinomului f să fie egal cu $\hat{3}$.

(5p) b) Pentru $m=\hat{1}$ calculați $f(\hat{1})$.

(5p) c) Pentru $m=\hat{1}$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X+6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:R\to R, f(x)=e^x+2014x.$

(5p) a) Arătați că f este convexă pe R.
(5p) b) Determinați asimptota la graficul funcției către $-\infty$.
(5p) c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul A(0,1).

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 (x+1)^n arctgx dx,\ n \in N$.

(5p) a) Calculați I_1.

(5p) b) Arătați că $\frac{\pi}{4} - \ln 2 \le I_n \le 2^n \frac{\pi}{4},\ n \in N$.

(5p) c) Calculați aria suprafeței plane mărginite de graficul $g:[0,\frac{1}{2}] \to R,\ g(x) = arctg2x$,axa Ox și dreptele de ecuație x=0 și $x = \frac{1}{2}$.

Varianta 49

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se consideră funcţia $f: R \to R$, f(x)=2-3x.Arătaţi că fof este crescătoare.

(5p) 2. Să se rezolve în R ecuaţia $2^x + 2^{1-x} = 3$.

(5p) 3. Care este probabilitatea ca alegând un element $k \in \{1,2,3,4,5\}$, numărul C_6^k să fie par?

(5p) 4. Determinaţi $z \in C, z = a+bi,\ a,b \in Z$ astfel încât $|z| = 2$.

(5p) 5. Să se determine ecuaţia înălţimii AM a ΔABC, unde A(-1,3),B(0,6),C(5,-2).

(5p) 6. Să se calculeze sin2x, dacă $\cos x = \frac{3}{7}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} a^2x + by + cz = -1 \\ ax + b^2y + cz = -1 \\ ax + by + c^2z = -1 \end{cases}$ şi fie $A = \begin{pmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{pmatrix}$ matricea sistemului.

(5p) a) Să se arate că există a,b,c nenule astfel încât detA=0.
(5p) b) Rezolvaţi sistemul pentru a=2, b=1, c=1.
(5p) c) Determinaţi a,b,c$\in R$ astfel încât sistemul să admită soluţia $x = y = z = 1$.

2. Pe $(-\infty,1)$ definim legea $x * y = 1 - (1-x)^{\log_2(1-y)}$.

(5p) a) Arătaţi că legea este asociativă.
(5p) b) Să se determine elementul neutru al legii.
(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=x^4-4x+3$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{(x-1)^3}$.

(5p) b) Arătaţi că f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$.

(5p) c) Determinaţi $m,n\in R$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}-\left(mx^2+n\right)=5$.

2. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$.

(5p) a) Să se arate că orice primitivă a lui f este crescătoare pe R.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \ln\left(1+e^x\right)e^x dx$.

(5p) c) Calculaţi derivata funcţiei $g:(0,\infty)\to R, g(x)=\int_0^{\ln x} f(t)dt$.

Varianta 50

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi $x,y\in R$ astfel încât $(2x+3yi)-(y-xi)=2+i$.

(5p) 2. Să se rezolve în $(0,\infty)$ ecuaţia $\log_3^2 x+\log_3 9x-4=0$.

(5p) 3. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=mx^2-2mx+3$.Să se determine $m\in R$ astfel încât graficul
funcţiei f să nu intersecteze axa Ox.

(5p) 4. Să se calculeze $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^8}$.

(5p) 5. Se consideră punctele A(3,a),B(-1,2),C(2,a),D(4,0).Să se determine $a\in R$ astfel încât $AB\perp CD$.

(5p) 6. Să se arate că $\dfrac{\sqrt{6}\sin 135^o}{\cos 150^o}\in Z$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $G=\left\{M(x)\in M_3(R)/M(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0 & 0\\ 0 & 3^x & 0\\ 0 & 0 & 5^x\end{pmatrix}\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $(G,\cdot)$ grup abelian.

(5p) b) Să se arate că $(R,+)\simeq(G,\cdot)$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\det\left(M(x)\cdot M(2x)\cdot\ldots\cdot M(2012x)\right)=30^{2012}$.

2. În $Z_5[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+4,\ g=X+\hat{3}$.

(5p) a) Să se arate că g/f.

(5p) b) Descompuneţi polinomul f în $Z_5[X]$.

(5p) c) Câte perechi $(a,b)\in Z_5\times Z_5$ verifică relaţia $(ax+\hat{b})^2=4x^2+x+\hat{1},(\forall)x\in Z_5$?

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$.

(5p) a) Să se determine $a,b,c\in R$ astfel încât $f'(x)=e^x\left(3x^2+7x+3\right)$.

(5p) b) Pentru a=3,b=1, c=2 să se calculeze asimptota la graficul funcţiei f către $-\infty$.

(5p) c) Pentru $a=3,b=1,c=2$ să se rezolve ecuaţia $f(\ln x)=6x$.

2. Fie funcţia $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin x, x\le 0\\ \ln(x+1), x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe R.

(5p) b) Să se determine primitiva funcţiei f care îndeplineşte condiţia $F(0)=1$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Prof: Nicolaescu Nicolae.

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $x \in R$ astfel încât $x, x^3, 5x+4$ să fie în progresie aritmetică.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $A_n^3 = n, n \in N, n \geq 3$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3-x}+\sqrt{5x+9}=4$.

(5p) 4. Aflaţi $x \in [0, 2\pi)$ din ecuaţia $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(5p) 5. În paralelogramul ABCD, AB=6cm, AD=4cm, $m(\measuredangle BAD)=75^o$.Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

(5p) 6. Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care expresia $\arcsin(x^2+x+1)$ are sens.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $M=\left\{X \in M_2(R) / X^2=-3X\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

(5p) b) Să se arate că dacă $A \in M$,atunci $\det A=0$ sau $\det A=9$.

(5p) c) Dacă $A \in M$, $\det A=0$ şi $A \neq O_2$, atunci $trA=-3$.

2. Se consideră punctele A(-1,1),B(2,3),C(1,0),D(-2,-2).

(5p) a) Arătaţi că ABCD paralelogram.

(5p) b) Să se calculeze A_{ABCD}.

(5p) c) Să se determine $M \in BC, M \neq C$ astfel încât lungimea segmentului AM să fie egală cu $\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-\infty,-2012)\cup(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\ln(1+\frac{2012}{x})$

(5p) a) Să se arate că f' crescătoare pe domeniul maxim de definiţie.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f(n)\right]^n$.

(5p) c) Să se arate că $\exists c \in (1,2)$ astfel încât $\frac{2012}{c(c+2012)}=-\ln\frac{1007}{2013}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(1-3x^2\right)^n dx$.

(5p) a) Calculaţi I_1.

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

(5p) c) Demonstraţi că $I_n = \frac{4n^2-4n}{4n^2-1} I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

Varianta 52

Prof. Oancea Cristina

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Se considera functia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = mx^2 - mx + 1, m \in R^*$.Sa se determine numarul real m stiind ca valoarea minima a functiei este egala cu4.

(5p) 2. Sa se determine solutiile reale ale ecuatiei
$2 \cdot 9^x - 3 \cdot 3^x + 1 = 0$

(5p) 3.. In reperul cartezian xOy se considera punctele A(2;3),B(10;17).Determinati coordonatele punctului M, stiind ca $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

(5p) 4. Sa se determine numarul real a daca dreptele 3x+2y-5=0 si ax+6y+1=0 sunt paralele.

(5p) 5. Sa se calculeze $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$

(5p) 6. Determinati $x \in (0; \frac{\pi}{2})$,stiind ca

$$\frac{tgx + 2ctgx}{ctgx} = 3$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se considera sistemul $\begin{cases} mx - y + 4z = 4 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

(5p) a) Sa se afle valorile reale ale lui m , pentru care tripletul (1,2,1) este solutie a sistemului de ecuatii.

(5p) b) Sa se arate ca $\forall m \in Q$, sistemul este compatibil determinat.

(5p) c) Sa se arate ca determinantul matricei asociate sistemului <16 , $\forall m \in N$

2. Se considera polinoamele cu coeficiente rationali $f(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 4$ si $g(x) = 3x^3 + x^2 + 3x + 1$

(5p) a) Pentru a =12 si b=6 , sa se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(5p) b) Sa se determine a, b $\in$ R astfel incat polinomul f(x) sa fie divizibil cu polinomul g(x).
(5p) c) Pentru a =14 si b=10 sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili in Q[x].

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f: R/\{5\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x+5}$

(5p) a) Sa se scrie ecuatia asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului functiei f.
(5p) b) Sa se determine punctele de extrem pentru functia f.

(5p) c) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa 0.

2. Se considera functia $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} e^x+1, x \in (-\infty;0) \\ 2-x, x \in [0;\infty) \end{cases}$

(5p) a) Sa se arate ca functia f admite primitive pe R.
(5p) b) Sa se determine volumul corpului obtinut prin rotatia in jurul axei Ox a graficului functiei f(x).
(5p) c) Sa se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x)\,\mathrm{dx}$

Varianta 53

Prof. Oancea Cristina

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculati $(3^0+3^1+.....3^{2014}) \cdot \dfrac{2}{3^{2015}-1}$
(5p) 2. Cate numere de 3 cifre se pot forma cu elementele multimii {0,1,2,3,4,5}?
(5p) 3. Calculati $(1\text{-i})^{2014}$ $-(1+i)^{2014}$
(5p) 4. Sa se determine coordonatele varfului parabolei asociate functiei
$f: R \to R,\ f(x) = x^2-5x+6$
(5p) 5. Fie vectorii $\vec{a},\vec{b}$ care verifica relatiile $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ si $m(\sphericalangle\alpha)=30^0$ .Calculati $\vec{a}\cdot\vec{b}$
(5p) 6. Calculati $\sin 35^\circ + \cos 35^\circ + \cos 145^\circ - \sin 145^\circ$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matrices A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ si $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5p) a) Stiind ca $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ sa se calculeze

$A^1 + A^2 + A^3 + ... + A^{2014}$

(5p) b) Sa se calculeze A^{-1}

(5p) c) Sa se rezolve ecuatia $\det(A^n) = 3 \cdot 5^{2n} - 1250$

2. Fie polinoamele $f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 44x - 32$ si $g(x) = x - 8$

(5p) a) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f(x) la g(x)

(5p) b) Sa se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

(5p) c) Sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se considera functia $f(x): R \to R,\ f(x) = (x^2 - 1) \cdot \ln x$

(5p) a) Rezolvati ecuatia $f(x) + f'(x) = 0$

(5p) b) Precizati intervalele de monotonie ale functiei.

(5p) c) Scrieti ecuatia tangentei la graficul functiei in punctul de abscisa 1.

2. Pentru $\forall n \in N$ se considera functiile $f_n : [-2;2] \to R,\ f_n(x) = \frac{(x-2)^n}{x+3}$ si integralele $I_n = \int_{-2}^{2} f_n(x)dx$

(5p) a) Sa se calculeze I_1 .

(5p) b) Sa se calculeze $\int_{-2}^{2} (x+3) f_1(x)dx$

(5p) c) Calculati volumul corpului obtinut prin rotatia , in jurul axei Ox a graficului $g(x) = (x+3) \cdot f_2(x)$ pentru $x \in [0,2]$

Varianta 54

Prof. Oancea Cristina

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinati n $\in N, n \geq 1$ pentru care $A_n^1 + C_n^1 = 36$

(5p) 2. Pretul unui produs este de 215 lei,el se scumpeste cu 10%.Calculati pretul produsului dupa scumpire.

(5p) 3. Aratati ca $\left(\sqrt{6};\sqrt{12}\right) \cap Z = \{3\}$

(5p) 4. Aflati cardinalul multimii $A = \{x \in Z / |3x+2| \leq 11\}$

(5p) 5. Determinati numarul real m pentru care ecuatia x^2 -(m-2)x+2m=0

(5p) 6. Calculati

$\cos 60^\circ + \cos 70^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 110^\circ + \cos 120^\circ$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se considera matricele A=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5p) a) Sa se calculeze $A^2 + B^2$

(5p) b) Verificati daca det(A+B)=det(A)+det(B)

(5p) c) Stiind ca C=A+B sa se calculeze $C^1 + C^2 + C^3 + ...C^{2014}$

2. Fie polinomul $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ si $g(x) = x - 4$

(5p) a) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f(x) la g(x)

(5p) b) Sa se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(5p) c) Sa se descompuna polinomul f(x) in produs de factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Se considera functia $f:(0;\infty) \to R$ definita prin $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{(x+2)^3}$

(5p) a) Calculati $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(5p) b) Aflati asimptotele graficului functiei f(x).

(5p) c) Sa se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} x^4 \cdot f'(x)$

2. Pentru $\forall n \in N$ se considera functiile $f_n(x): \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f_n(x) = (x-3)^n$ *si* integralele

$I_n = \int_0^3 f_n(x)dx$

(5p) a) Sa se calculeze I_2

(5p) b) Sa se calculeze aria suprafetei cuprinse intre graficul functiei $f_{2014}(x)$ si dreptele x=0 si x=3

(5p) c) Sa se calculeze $\int_0^3 x \cdot f_n(x)dx$

Varianta 55

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea: $1+4+7+...+x=145$.

(5p) 2. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0$, $m\in R$. Să se demonstreze că expresia $m\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-1\right)$ nu depinde de m.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

(5p) 4. Să se afle termenul dezvoltării binomului $\left(\sqrt{a}+\frac{4}{\sqrt[3]{a}}\right)^{150}$, $a>0$ care nu conţine pe a.

(5p) 5. Să se determine numărul real m astfel încât punctele $A(1,2m+1)$, $B(2,9)$ şi $C(4,4m+1)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $tg^2\alpha=8$, să se calculeze $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $V(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}\in M_3(R)$, şi x_1,x_2,x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3-3x+2=0$.

(5p) a) $\det(V(1,2,3))=?$;

(5p) b) Să se calculeze produsul $V(a,b,c)\cdot {}^tV(a,b,c)$;

(5p) c) Să se calculeze valoarea determinantului $\det(V(x_1,x_2,x_3))$.

2. Fie polinomul $f\in R[X]$, $f=X(X+1)(X+2)(X+3)$.

(5p) a) Să se demonstreze că $\nexists k\in Z^*$ astfel încât $f(k)=m^2$, $m\in Z$;

(5p) b) Să se afle k, dacă $f(k)=-1, k\in R$;

(5p) c) Să se calculeze suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{(k+1)(k+2)}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)$.

(5p) a) Să se calculeze limita $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}$;

(5p) b) Să se calculeze $\frac{f'(2)}{f(2)}$;

(5p) c) Să se arate că f' are trei rădăcini reale.

2. Fie funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$, $g(x)=\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int f(x)dx$;

(5p) b) Dacă $H(x)$ este o primitivă a funcţiei $h:R\to R$, $h(x)=f(x)+g(x)$, să se arate că $H(x)$ este o funcţie crescătoare;

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx$.

Varianta 56

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se demonstreze că $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}\in Z$.

(5p) 2. Fie funcţiile $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-4x+5, g(x)=4x-7$. Să se afle coordonatele punctelor de întâlnire ale graficelor lui f şi g.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=2,\ x\in R$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr de trei cifre, acesta sa fie format din cifre prime distincte.

(5p) 5. Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+(m+2)\vec{j}$, $\vec{v}=(1-m)\vec{i}+(m-1)\vec{j}$, $m\in R$. Să se afle m, dacă $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{2}$.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc: $AB=12cm, BC=16cm$ şi $AC=20cm$. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 & 0\\ 0 & m+1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(R)$.

(5p) a) Să se afle m, ştiind că $rangA(m)=3$;

(5p) b) Să se determine $A^{-1}(2)$;

(5p) c) c) Să se rezolve ecuaţia $\det\left(A(m)\cdot A(m-1)\right)=-1,\ m\in R$.

2. Fie polinomul $f\in R[X]$, $f=X^5-2X^4+6X^3-12X^2+5X-10$.

(5p) a) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale;

(5p) b) Să se determine o rădăcină reală a lui f;

(5p) c) Să se demonstreze că f are patru rădăcini complexe diferite.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\setminus\{-4\}\to R$, $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+1}{x+4}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia funcţiei f pe domeniul maxim de definiţie;

(5p) b) Să se determine asimptotele lui f;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{2x}\right)^{2x+1}$.

2. Se consideră integrala $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, $n\in N^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_1;

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}=\frac{1}{n+1}-I_n$;

(5p) c) Să se calculeze I_6.

Varianta 57

Prof. Oláh Csaba

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $z\in C$, $z+\frac{1}{z}=i$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.

(5p) 2. Fie $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-6x+8$ şi $g(x)=2x-6$. Să se rezolve ecuaţia $(f\circ g)(x)=0$.

(5p) 3. Să se afle valoare lui x din ecuaţia $\log_{x-1}(x+1)+\log_{x+1}(x-1)=2$.

(5p) 4. Să se determine $n\in N^*$ dacă $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2048$.

(5p) 5. Fie punctele $A(2,3)$, $B(1,5)$ şi $C(2,7)$ în sistemul cartezian. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(5p) 6. Să se demonstreze că $2(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)=\cos 2b-\cos 2a$, $a,b\in R$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie determinantul $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-2x+5=0$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul D;

(5p) b) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 2-x & x-3 \\ x-3 & x & 2-x \\ 2-x & x-3 & x \end{vmatrix} = 0$.

2. Fie mulţimea $G=(4,\infty)$ şi operaţia algebrică "$*$", $x*y=xy-4x-4y+20$, $x,y\in G$.

(5p) a) Să se calculeze elementele simetrizabile din G, în raport cu "$*$";

(5p) b) Să se afle $b\in R$ pentru care $x*b=b*x=b$, $\forall x\in R$;

(5p) c) Să se rezove ecuaţia $x^4*4^4*4+4^x=5$, dacă se ştie ca legea de compoziţie "$*$" este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\dfrac{3n^2+3n+1}{\left[n(n+1)\right]^3}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia şirului $(b_n)_{n\geq1}$, $b_n=a_n+\dfrac{1}{(n+1)^3}$;

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot n^4$;

(5p) c) Să se calculeze limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

2. Fie funcţia $f_n:R\to R$, $f_n(x)=\dfrac{1+tg^2x}{1-tg^nx}$, $n\in N^*$ şi $I_n=\int f_n(x)dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1;

(5p) b) Să se calculeze I_2;

(5p) c) Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f_4(x)\,dx$.

Varianta 58

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|2x-1|\le 9\}$.

(5p) 2.Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=3x^2-3x+1$.

(5p) 3.Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{8-3x}=2-x$.

(5p) 4.Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2012}$.

(5p) 5.Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(2,0)$ și $C(0,2)$.

(5p) 6. Știind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos 2x=\frac{1}{2}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-my+m^2z=0 \\ -mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y-mz=0 \end{cases}$,unde $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

(5p) b) Arătați că, pentru nicio valoare a lui m ,sistemul un are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0,z_0 numere reale strict pozitive.

(5p) c) Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2,oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2.Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}(2x+2y-xy+2)$.

(5p) a)Verificați dacă legea de compoziție „$*$" este asociativă.

(5p) b)Arătați că legea de compoziție „$*$" admite element neutru.

(5p) c)Rezolvați ecuația $x*x*x*x=-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+2012$.

(5p) a)Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

(5p) b)Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$.

(5p) c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x) = m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2012}dx$.

(5p) a) Calculați I_2.

(5p) b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $I_{n+1} + 2012 I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 59

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $(1-2i)(1+i)-3(3-2i)$.

(5p) 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 2$.

(5p) 3.Rezolvați în $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

(5p) 4.Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 11\}$ .Determinați numărul de submulțimi cu 4 elemente ale mulțimii A,submulțimi care conțin exact 3 numere impare.

(5p) 5.Calculați lungimea medianei din A în $\triangle ABC$, unde $A(-1;3), B(1;5)$ și $C(3;-1)$.

(5p) 6.Fie x un număr real care verifică egalitatea $tgx + ctgx = 3$. Arătați că $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(5p) a)Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) b)Arătați că $\left(A(x) - A(y)\right)^{2012} = O_3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) c) Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

2.Se consideră polinomul $f = (x+2i)^{10} + (x-2i)^{10}$, având forma algebrică

$f = a_{10}X^{10} + a_9 X^9 + ... + a_1 X + a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_{10} \in \mathbb{C}$.

(5p) a)Determinațirestul împărțirii polinomului f la $X - 2i$.

(5p) b) Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

(5p) c) Demonstrați că tóate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-2)$.

(5p) a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(2;+\infty)$.

(5p) b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

2.Se consideră funcția $f:[1;3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3$.

(5p) a)Calculați $\int_1^9 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

(5p) b)Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;3]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ și axa Ox.

(5p) c)Arătați că $(2n+1)\int_1^3 f^n(x)dx+2n\int_1^3 f^{n-1}(x)dx=0$.

Varianta 60

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_3=5$ și $b_3+b_5=20$.

(5p) 2.Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2+(3a-2)x+2a-1=0$ are soluții reale.

(5p) 3.Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2\ln(2x-3)-\ln(x-1)=\ln(5-2x)$.

(5p) 4.Determinați $n\in\mathbb{N}, n\geq 2,$ pentru care $C_n^2+A_n^2=63$.

(5p) 5.Să se arate că vectorii $\vec{v_1}=2011\vec{i}+2012\vec{j}$ și $\vec{v_2}=2011\vec{i}-2012\vec{j}$ formează un unghi obtuz.

(5p) 6.Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $A=\frac{\pi}{4}, B=\frac{\pi}{6}$ și $AB=12$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și sistemul $\begin{cases} ax+y+z=5 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 4x-y-3z=b \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1,1,1)$.

(5p) b)Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

(5p) c)Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu tóate componentele întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-2X^4-X^3+6X^2-3X-10\in\mathbb{C}[X]$.

(5p) a)Să se determine o rădăcină întregă a polinomului f.

(5p) b)Calculați $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_4-x_5)^2$, unde $x_1,x_2,....,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

(5p) c)Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1001x-2012$.

(5p) a)Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=2+\dfrac{1}{n+2012}$ are soluție unică $x_n\in\mathbb{R}$.

(5p) b)Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, unde x_n este precizat la a).

(5p) c)Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-2)$, unde x_n este precizat la a).

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+...+x^{2010}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(5p) a)Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) b)Să se arate că funcția F este bijectivă.

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2011}$.

Varianta 61

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-1000}+(\sqrt{3})^2$.

(5p) 2. Să se determine valorile reale ale lui m , ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2+mx-m+1=0$ verifică relaţia $2(x_1+x_2)+x_1x_2=3$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $9^{2x}=3^{x^2}$.

(5p) 4. Rezolvaţi in R ecuaţia $\sqrt{2x-1}=2-x$

(5p) 5. Aflati aria triunghiului determinat de punctele A(1,3) , B(-2, 4) , C(6,3) .

(5p) 6. Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\cos x=-\frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+z=1\\3x+ay+2z=1\\9x+a^2y+4z=1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi se notează cu A matricea sistemului.

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A .

(5p) b) Determinaţi valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) c) Pentru $a=1$, rezolvaţi sistemul.

2. Fie $H=\left\{X\in M_3(\mathbb{Z}_5)\mid X=\begin{pmatrix}\hat{0}&a&b\\\hat{0}&\hat{1}&a\\\hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\right\}$.

(5p) a) Aflaţi numărul de elemente al mulţimii H .

(5p) b) Arătaţi că dacă $A,B\in H$ atunci $A\cdot B\in H$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea H ecuaţia $X^3=I_3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},x>0$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f .

(5p) c) Arătaţi că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}dx$

(5p) a) Calculaţi I_1,I_2 .

(5p) b) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

(5p) c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 62

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $2\overline{z}+z=3+2i$.

(5p) 2. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1+2^x-2\cdot 4^x=0$.

(5p) 4. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 5 elemente.

(5p) 5. Calculaţi distanţa de la punctul $A(1;3)$ la dreapta de ecuaţie $d: 2x+3y-1=0$.

(5p) 6. Ştiind că $\sin x+\cos x=1$, aflaţi $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulţimea S_4 a permutărilor de gradul 4 se consideră

$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ şi $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze $\alpha\circ\beta$.

(5p) b) Să se determine $x\in S_4$ astfel încât $x\circ\alpha=\beta$.

(5p) c) Să se arate că nu există $x\in S_4$ astfel ca $x^4=\alpha$.

2. Se consideră polinomul $f=(1+X+X^3)^{30}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică

$f=a_{30}X^{30}+...+a_1X+a_0$.

(5p) a) Să se calculeze $f(-1)+f(1)$.

(5p) b) Să se arate că suma $a_0+a_1+...+a_{30}$ este divizibilă cu 3.

(5p) c) Să se determine restul împărţirii lui f la X^2-1 .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

(5p) a) Determinaţi $f'(x)$.

(5p) b) Studiaţi monotonia funcţiei f.

(5p) c) Arătaţi că $2e^{\sqrt{3}}<3e^{\sqrt{2}}$.

2. Fie $I_1=\int\frac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$ $I_2=\int\frac{\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

(5p) a) Să se calculeze $2I_1+3I_2$.

(5p) b) Să se calculeze $2I_2-3I_1$.

(5p) c) Să se determine I_1 şi I_2 .

Varianta 63

Prof. Pascotescu Camelia

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=(-1)^x+(-2)^{x+1}$. Calculaţi $f(3)$.

(5p) 2. Arătaţi că $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

(5p) 3. Fie funcţia $f:\{1,2,3\}\to\{-1,-2,-3\}$, f injectivă . Calculaţi suma $f(1)+f(2)+f(3)$.

(5p) 4. Să se afle numărul real m pentru care graficul funcţiei $f=3x^2-(m+2)x+7$ are axa de simetrie x=1.

(5p) 5. În plan se consideră punctele $A(2,3),B(1,0)$ şi $C(-1,4)$. Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.

(5p) 6. Determinaţi ecuaţia medianei din B a triunghiului cu vârfurile $A(-1,2),B(2,-3),C(1,-4)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+2y+z=1\\2x-y+z=1\\7x-y+bz=a\end{cases}$ unde $a,b\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine b astfel încât rangul matricei sistemului să fie 2 .

(5p) b) Să se determine a şi b pentru care sistemul este incompatibil .

(5p) c) Să se rezolve sistemul in cazul in care este compatibil nedeterminat .

2. Se consideră mulţimea G a matricelor $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $a\in(0;\infty)$.

(5p) a) Să se arate că $(G,\cdot)$ are o structură de grup abelian .

(5p) b) Să se calculeze $A(a)^{2011}$.

(5p) c) Să se demonstreze că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

(5p) a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

(5p) b) Să se determine imaginea funcţiei f .

(5p) c) Să se demonstreze inegalitatea $e\cdot\ln x\le 2\sqrt{x}, \forall x\in(1;\infty)$.

2. Fie Şirul $(I_n)_{n\ge1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}t\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se calculeze I_1 .

(5p) b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent la 0 .

Varianta 64

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați cardinalul mulțimii $A=\left(\log_{\frac{5}{3}}2, \sqrt[3]{9}\right)\cap\mathbb{N}$.

(5p) 2. Determinați valorile naturale nenule ale lui m pentru care parabola $y=x^2+3x+m$ admite un minim pozitiv.

(5p) 3. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\log_2\left(3\cdot2^x+4\right)=x+2$

(5p) 4. Ce termen al dezvoltării $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^9$ nu-l conține pe x ?

(5p) 5. Să se determine coordonatele capetelor unui segment știind că punctele $M(-1,1)$ și $N(-3,4)$ împart segmentul în trei părți egale.

(5p) 6. Verificați dacă triunghiul ABC cu AB=6 cm , AC=8 cm și BC=5 cm este obtuzunghic?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+m^2y+2mz=-2 \\ 2mx+y+m^2z=7 \\ m^2x+2my+z=-5 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați valorile parametrului real m pentru care sistemul este compatibil determinat.

(5p) b) Ştiind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0) să se demonstreze că $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(5p) c) Pentru $m = -1$ rezolvați sistemul în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ și legea de compoziție "$\circ$" pe G definită prin $x \circ y = axy + bx + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați a , b și c știind că legea "$\circ$" admite pe -1 ca element neutru iar simetricul lui $\frac{1}{2}$ este $-\frac{11}{8}$

(5p) b) Pentru $a = 2$, $b = c = 3$ rezolvați pe mulțimea G ecuația $x \circ x \circ x = x$

(5p) c) Pentru $a = 2$, $b = c = 3$ demonstrați că funcția $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(mx + n)$, unde m și n sunt convenabil alese , este izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 3| + \ln x$

(5p) a) Studiați derivabilitatea funcției pe domeniul de definiție .

(5p) b) Stabiliți eventualele puncte de extrem local ale funcției f .

(5p) c) Determinați tangenta la graficul funcției ce este paralelă cu prima bisectoare .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(5p) a) Calculați $\int_1^{16} f\left(-\sqrt[4]{x}\right) dx$.

(5p) b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a subgraficului funcției $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{-f(x)}$

(5p) c) Fie șirul $a_n = \int_n^{n+1} \frac{f(x+1)}{x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{n^2}$

Varianta 65

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma primilor patru termeni ai unei progresii geometrice dacă $a_3 = 3$ și $a_4 = -2$.

(5p) 2. Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R} \to (-1,\infty)$, $f(x) = \log_2(3^x + 1) - 1$.

(5p) 3. Să se rezolve ecuația $\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}} = \frac{1}{5}$ în mulțimea numerelor reale

(5p) 4. Câte submulțimi de trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,...,9\}$ conțin un singur element impar ?

(5p) 5. Se dau punctele $A(1,2)$ și $B(2,1)$. Să se determine coordonatele punctului C știind că aparține axei ordonatelor iar aria triunghiului ABC este egală cu 1 .

(5p) 6. Dacă $a,b \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $tga = \frac{1}{7}$, $tgb = \frac{1}{3}$ demonstrați că $a + 2b = 45°$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A, X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

(5p) a) Arătați că $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$, $\forall X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

(5p) b) Determinați matricele $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ce îndeplinesc simultan condițiile $AX = XA$ și $\det(X) = 0$

(5p) c) Rezolvați ecuația $X^4 = A$ în $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f = X^4 + (2-m)X^3 + (3-m)X^2 - 2(1+m)X + 4(m-1)$, $f \in \mathbb{C}[X]$, $m \in \mathbb{C}$.

(5p) a) Arătați că f este divizibil cu $X - 1$ pentru orice $m \in \mathbb{C}$,

(5p) b) Pentru $m = 2 - i$ determinați partea imaginară a numărului $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

(5p) c) Determinați $m \in \mathbb{C}$ știind că f admite ca rădăcină pe $1 - i$ și apoi rezolvați ecuația $f(x) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(5p) a) Arătați că f este injectiva dar un este surjectivă .

(5p) b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul în care acesta intersectează axa absciselor .

(5p) c) Determinați asimptotele la graficul funcției f .

2. Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

(5p) a) Calculați $\int_0^1 f(x+2) \cdot e^x dx$

(5p) b) Determinați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:[0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x+2)}{x+1} \cdot e^{x^2-2x+1}$ și axa Ox

(5p) c) Demonstrați că $\int_1^3 \left(x^2-4x+3\right)^n dx = 2\cdot\int_0^1 \left(x^2-1\right)^n dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Varianta 66

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați numerele complexe de modul 5 ce au partea imaginară egală cu $\left[\log_{0,5} 5\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

(5p) 2. Determinați valorile reale ale lui m astfel încât între rădăcinile ecuației $x^2+mx+m+2=0$ să existe relația $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-1$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x$.

(5p) 4. Determinați numerele naturale $n\geq 3$ care verifică relația $C_n^3=2C_n^2$.

(5p) 5. Aflați aria unui pătrat ce are două dintre laturile sale situate pe dreptele de ecuații $3x+4y-7=0$ respectiv $6x+8y+1=0$.

(5p) 6. Știind că $tgx=2$ calculați $\frac{3\sin x}{2\sin x+5\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A, X\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} a & a+2 & a+4\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

(5p) a) Arătați că ecuația $A\cdot X=O_3$ are soluție unică pentru orice întreg a .

(5p) b) Pentru $a=0$ rezolvați ecuația $A\cdot X=I_3$.

(5p) c) Pentru $a\in\mathbb{Z}$ arătați că sistemul $\begin{cases} ax+(a+2)y+(a+4)z=2a\\ x+3y+4z=1\\ 2x+3y+z=1\end{cases}$ are soluție unică în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ce un depende de a .

2. Fie mulțimea $A=\left\{f\in\mathbb{Z}_5[X] \mid f=X^4+aX^3+bX^2+4 \quad , \quad a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$

(5p) a) Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un polinom de gradul 4 din $\mathbb{Z}_5[X]$ acesta să fie din mulțimea A .

(5p) b) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}_5$ știind că 2 este rădăcină a polinomului f și că restul împărțirii lui $f\left(X+\hat{1}\right)$ la $X+2$ este $\hat{3}$.

(5p) c) Pentru $a=b=\hat{0}$ descompuneți în factori ireductibili polinomul f peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+1}$.

(5p) a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ funcția are două puncte de extrem .

(5p) b) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\operatorname{Im} f=[-1,3]$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{f'(x)}}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$

(5p) a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$

(5p) b) Arătați că $2\sqrt{e} \le \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 \dfrac{e}{f(x)}dx \le 1+e$

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{f(x)-1}$

Varianta 67

Prof: Pisică Lăcrămioara

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice ce are rația egală cu triplul primului termen , iar $a_6 + a_8 = 19$.

(5p) 2. Găsiți două funcții de gradul întâi , de monotonii diferite astfel încât $f \circ g = g \circ f$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(5p) 3. Determinați soluțiile întregi nenule ale inecuației $(\log_3 2)^{x^2-x} > (\log_3 2)^{x+3}$.

(5p) 4. Determinați câte numere naturale de două cifre sunt divizibile cu 4 sau cu 6 .

(5p) 5. Determinați ecuația mediatoarei segmentului de capete $A(1,2)$ și $B(2,1)$.

(5p) 6. Fie paralelogramul ABCD. Considerăm punctele M și N pe AB și respectiv AC astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Arătați că punctele M , N și D sunt coliniare .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = A - 2I_2$.

(5p) a) Determinați cea mai mică valoare a numărului natural nenul k pentru care $B^n = O_3, \forall n \geq k$.

(5p) b) Calculați $A^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Demonstrați că $7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det\left(A^k\right) \leq 3^{2012}$

2. Se consideră matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X_a = I_2 + aA \,,\, a > -\frac{1}{2} \right\}$.

(5p) a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(5p) b) Demonstrați că funcția $f : G \to \mathbb{R}$, $f(X_a) = \ln(2a+1)$ este izomorfism de la grupul $(G,\cdot)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

(5p) c) Arătați că $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot X_{\frac{5}{2}} \cdot \ldots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} = X_{\frac{2^n \cdot n! - 1}{2}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$

(5p) a) Studiați monotonia funcției f .

(5p) b) Arătați că f este inversabilă și calculați $g'(0)$, unde $g = f^{-1}$

(5p) c) Rezolvați ecuația $f(x)+f\left(x^3\right)=f\left(x^2\right)+f\left(x^4\right)$.

2. Se consideră șirul $\left(I_n\right)_{n\geq1}$ având termenul general $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^4+1}dx$

(5p) a) Calculați I_3 și I_1

(5p) b) Arătați că șirul $\left(I_n\right)_{n\geq1}$ este convergent și , apoi, calculați limita sa .

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\cdot I_n$, $k\in\mathbb{R}$

Varianta 68

Prof: RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze modulul numărului complex :

$$z=\frac{1+3i}{2-5i}$$

(5p) 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația :

$$2^{x+1}+2^{x+2}+3\cdot2^{x+3}=1920$$

(5p) 3. Fie $f(x)=2x^2+\cos x$, $f:R\to R$, să se demonstreze că f este funcție pară.

(5p) 4. Să se determine termenul de rang 8 al dezvoltării:

$$(\sqrt[3]{x}+\frac{y}{x^2})^{10}$$

(5p) 5. Fie dreptele $d_1:(m+1)x+4y-5=0$ și $d_2:(2m-3)x-2y+1=0$, să se determine $m\in R$ astfel ca dreptele să fie paralele.

(5p) 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului care are lungimile laturilor 8,11,13.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea A$\in M_3(R)$ unde A=$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,cu $x_1<x_2$ radacinile ecuatiei

$x^2-3x+2=0$; y_1,y_2 reprezinta prímele numere naturale consecutive $t_1=C_3^1, t_2=A_3^1$.

(5p) a) Calculati elementele matricei A.

(5p) b) Calculati matricea A^2-2A.

(5p) c) Determinati inversa matricei A.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie $x*y=3xy-3x-3y+4$.
(5p) a) Arătați ca intervalul $(1,\infty)$ este parte stabila a lui R in raport cu legea data.
(5p) b) Considerand legea asociativă să se determine simetricul elementului 3.
(5p) c) Să se rezolve in mușțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=73$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dă funcția $f:[3;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}-x$.
(5p) a) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
(5p) b) Să se demostreze că f este concava pe intervalul $(3;+\infty)$
(5p) c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției in punctul de abscisa 4.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}$ unde $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}dx$.

(5p) a) Să se calculeze I_1.
(5p) b) Să se demonstreze că are loc egalitatea:

$$I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1},n\in\mathbb{N}*$$

(5p) c) Folosind faptul că $(I_n)_{n\geq1}$ este un şir descrescător , să se demonstreze :

$$\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{3(n-1)}.$$

Varianta 69

Prof: RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze suma 2+5+8+......+110.
(5p) 2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=x^2+6x-5$, să se determine imaginea funcției.
(5p) 3. Să se calculeze $A_4^2-2\cdot C_4^3+P_2$.
(5p) 4. Fie $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+5\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+4\vec{j}$, să se calculeze cosinusul unghiului format de cei doi vectori.
(5p) 5. Se consideră mulțimea A={1,2,3,7} , să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii A.
(5p) 6. Ştiind că $\sin x=\frac{1}{3}$, să se calculeze tg^2x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră permutările $\alpha, \beta \in S_5$ cu $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ si $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(5p) a) Calculați $\alpha\beta$.

(5p) b) Rezolvați ecuația x $\alpha^{2011} = \beta$.

(5p) c) Determinați ordinul permutării α.

2. Fie polinoamele cu coeficienți reali f= $x^{6n+2} + x^{3n+1} + 1$ si g= $x^2 + x + 1$.
(5p) a) Determinați rădăcinile polinomului g.

(5p) b) Să se determine a,b numere reale astfel incât g$\bullet(2ax+b) = 2ax^3 + 7x(x+1) + 3$

(5p) c) Să se demonstreze că polinomul f se divide cu polinomul g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 1}; x < 1 \\ \dfrac{5ax - 3}{x + 4}; x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel incât f continuă în $x_0 = 1$.

(5p) b) Dacă a=1 și x>1 să se demonstreze egalitatea $f''(x) + 2f'(x) \cdot \dfrac{1}{x+4} = 0$.

(5p) c) Să se arate că f(2010)$\leq$f(2012).

2. Se consideră funcția $f_n(x) = e^x (x+1)^n$, $f : R \to R$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)dx$.

(5p) b)Să se determine o relație de recurență pentru funcțiile f_n.

(5p) c) Să se calculeze limita : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \left[e^{\frac{1}{n}}(1+n) + e^{\frac{2}{n}}(2+n) + ... + e^{\frac{n}{n}}(n+n) \right]$.

Varianta 70

Prof. RAT CRISTINA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^9$.

(5p) 2. Fie $f:R\to R$, $f(x)=x^2+(3m-1)x+m, m\in R$. Determinați $m\in R$ cu graficul funcției f este tangent axei Ox.

(5p) 3. Fie $a=\log_3 5, b=\log_3 2$, să se arate că $\log_{30} 200=\frac{2a+3b}{1+a+b}$.

(5p) 4. Probabilitatea ca alegând un număr de două cifre , acesta să conțină 7.

(5p) 5. Să se determine aria $\triangle ABC$ unde A(1,3), B(2,-5) și C(0,-3).

(5p) 6. Să se calculeze cos $\sphericalangle B$ dacă AB=6, BC=9 și AC=13.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul liniar $\begin{cases}(m+1)x-y+4z=12\\ x+y-mz=0\\ 3x+y-2z=m-2\end{cases}$, să se indeplinească următoarele cerințe:

(5p) a) Aflați $m\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricii sistemului este -9.

(5p) b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel ca soluția sistemului să fie (1,2,3).

(5p) c) Pentru m=2 să se rezolve sistemul.

2. Fie inelul $(Z_8,\oplus,\otimes)$, să se indeplinească urmatoarele cerințe:

(5p) a) Să se rezolve ecuația : $\hat{4}x+\hat{2}=\hat{6}, x\in Z_8$.

(5p) b) Să se demonstreze că $(\forall)\hat{a},\hat{b}\in Z_8$ are loc relația $\hat{3}(2\hat{a}+4\hat{b})+2(5\hat{a}+2\hat{b})=\hat{0}$

(5p) c) Să se calculeze A^2 în inelul $(Z_8,\oplus,\otimes)$ unde :

$$A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{2}\\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{5}\end{pmatrix}.\ A^2=A\cdot A$$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f(x)=\ln(2x+4)-\ln(x+3)$, $f(x):(-2;+\infty)\to\mathbb{R}$:

(5p) a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}[f'(1)+f'(2)+f'(3)+....+f'(n)]$.

(5p) c) Să se demonstreze că $f(x)\le\ln 2\forall x\in(-2;+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}2x+\ln(1-x)+1, x\in(-\infty;0)\\ 3a, x=0\\ \sqrt{x}+e^x, x\in(0;+\infty)\end{cases}$

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ când funcția admite primitive.

(5p) b) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{2}{n^2}\sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}+....+\frac{n}{n^2}\sqrt{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right)\cdot n$.

Varianta 71

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Pentru ce valori $a\in\mathbb{R}$ există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele *m,n,p*,unde $m=5^{1+x}+5^{1-x}$, $n=\frac{a}{2}$ şi $p=25^x+25^{-x}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\frac{mx^2+2(m+1)x+m-2}{x^2+1}$ .Să se determine mulţimea $A=\{m\in\mathbb{R}/\ f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\}$

(5p) 3. Se ia la întamplare un număr *x* din mulţimea $M=\{x/x\in\mathbb{Z},|x|\le 7\}$. Să se scrie evenimentul contrar lui A, unde A= *x* verifică ecuaţia $x^2-5|x|+4=0$.

(5p) 4.Să se calculeze suma coeficienţilor pentru binomul $(17x^5-18y)^{2012}$.

(5p) 5. Considerăm vectorii $\vec{m}=2\vec{i}-3\vec{j}$; $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}$; $\vec{p}=4\vec{j}$ .Calculaţi $|\vec{a}+\vec{b}|$ ştiind că $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}+\vec{p}$ şi $\vec{b}=-2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$

(5p) 6. Să se calculeze $tg\left(\arcsin\frac{4}{5}+arctg\frac{7}{24}\right)$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{5}\\ \hat{x} & \hat{1} & \hat{2}\\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z}_{12})$

(5p) a) Calculaţi suma elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_{12}$

(5p) b)Arătaţi că matricea A este inversabilă $\forall x\in\mathbb{Z}_{12}$.

(5p) c)Pentru $x=\hat{0}$, rezolvaţi în $M_3(\mathbb{Z}_{12})$ ecuaţia $YA=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0} & \hat{2}\\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}$

2.Fie $f\in\mathbb{R}[X],\ f=(X^2+X+1)^n=\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k$

(5p) a) Să se afle $a_1+a_3+....+a_{2n-1}$

(5p) b) Să se afle restul împărţirii lui f la $(X+2)^2$.

(5p) c) Să se rezolve în C acuaţia f(x)=f(-x).

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln(1+x)$

(5p) a) Arătaţi că *f* este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie.

(5p) b) Arătaţi că,pentru $\alpha\in(-1,0)$, avem $A(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$, unde $A(\alpha)$ reprezintă aria suprafeţei cuprinsă între graficul lui *f*,axa *Ox*,şi dreptele $x=\alpha$ şi $x=0$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{\alpha\to-1}A(\alpha)$

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq0}$ dat de $I_0=\int_1^e xdx$,iar $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$.

(5p) a)Calculaţi I_0 şi I_1.

(5p) b) Pentru $n\in\mathbb{N}^*$,arătaţi că $2I_n+nI_{n-1}=e^2$

(5p) c) Ştiind că şirul $(I_n)_{n\geq0}$ este descrescător, arătaţi că $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$

Varianta 72

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât numerele $2C_{x-3}^{0};C_{x-1}^{2};C_{x}^{x-2}$ să fie în progresie aritmetică.

(5p) 2. Fie ecuaţia $x^2+2(m-1)x+8(m^2-1)=0, m\in\mathbb{R}$ .Pentru ce valori ale lui m suma pătratelor rădăcinilor are valoarea maximă?

(5p) 3. Fie mulţimea $M=\{x\,/\,x\,este\,un\,divizor\,pozitiv\,al\,lui\,60\}$. Să se scrie evenimentul A, unde

A= expresia $\sqrt[x!]{\dfrac{2x^2+x-21}{5-4x-x^2}}$ dă un număr real dacă $x\in M$.

(5p) 4.Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

(5p) 5. Să se determine termenul al patrulea al dezvoltării $(2x^2-5y)^n$ ştiind că suma coeficienţilor binomiali este 32.

(5p) 6. Determinaţi valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2a;a), B(4;0)$ şi $C(0;2)$ sunt coliniare.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ -\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\middle|\, \hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3\right\}$

(5p) a)Să se arate că ,dacă $\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_3$,atunci $\hat{a}^2+\hat{b}^2=\hat{0}\Leftrightarrow\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$.

(5p) b) Să se determine $A\in M$ astfel încât $A^2+I_2=O_2$.

(5p) c)Stabiliţi câte elemente ale lui M sunt matrice inversabile.

2.În mulţimea permutărilor cu 3 elemente S_3 se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se verifice dacă $\sigma\tau=\tau\sigma$

(5p) b) Să se studieze paritatea celor două permutări.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\sigma x=\tau$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$,unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

(5p) a)Stabiliţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei f şi determinaţi ecuaţiile asimptotelor lui f.

(5p) b) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe domeniul său.

(5p) c) Să se calculeze limita şirului cu termenul general $x_n = \dfrac{f(1)+f(2)+f(3)+......+f(n)}{n}$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\, dx$, $n \in \mathbf{N}$.

(5p) a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

(5p) b) Să se arate că $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}, (\forall)\ n\in \mathbf{N}, n\geq 2$.

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f:\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\to[0;1],\ f(x)=\cos x$,în jurul axei *Ox*.

Varianta 73

Prof: RICU ILEANA

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete**.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se afle cele 4 unghiuri ale unui patrulater ştiind că aceste unghiuri sunt în progresie geometrică şi că ultimul este de 9 ori mai mare decât al doilea.

(5p) 2. Fie funcţia de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2-(2m-1)x+m-1$,$m\neq 0$. Să se determine *m* astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcţii să se găsească pe prima bisectoare.

(5p) 3. Să se rezolve ecuaţia $\left[\dfrac{x+3}{4}\right]=\dfrac{x-2}{3}$

(5p) 4. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ ştiind că se verifică egalitatea $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n=2^n$

(5p) 5. Să se determine suma termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

(5p) 6.Să se determine cosinusul celui mai mare unghi al $\triangle ABC$,unde A(2,3),B(-1,2),C(1,-3).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a}\end{vmatrix}, a\in\mathbb{R}$

(5p) a) Arătaţi că $\Delta(x)=e^{2(x^2+x+a)}+2e^{-(x^2+x+a)}-3$.

(5p) b) Să se determine valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $\Delta(x)=0$ are rădăcini reale strict negative.

(5p) c) Arătaţi că pentru a=1 avem $\Delta(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

2. Pe mulţimea Z se consideră legile de compoziţie $x\perp y=x+y+1,\quad x\circ y=ax+by-1,$ cu $a,b\in Z$ şi funcţia $f:Z\to Z$ definită prin $f(x)=x+2.$

(5p) a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x,\ \ \forall x\in Z$.

(5p) b) Să se determine $a,b\in Z$ pentru care legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă

(5p) c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcţia f este morfism între grupurile $(Z;\perp)$ şi $(Z,\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{mx}{x-|x|+m}$, unde $m>0$ este un număr real fixat.

(5p) a)Determinaţi asimptotele funcţiei *f*.

(5p) b)Demonstraţi că *f* este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}$

(5p) c) Arătaţi că *f* admite o singură soluţie reală .

2. Se consideră şirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^n\,dx, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

(5p) a)Să se demonstreze că $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi să se calculeze apoi I_2.

(5p) b)Să se arate că $I_n\geq 0$,să se stabilească monotonia şi să se precizeze dacă şirul este convergent.

(5p) c)Demonstraţi că $I_{n+2}\leq\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ şi calculaţi limita şirului $(I_n)_{n\geq 2}$.

Varianta 74

Prof : Şerban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Dacă a=1+i , i=$\sqrt{-1}$, arătaţi că numărul $a^2 - 2a + 1$ este un număr real .

(5p) 2.Fie funcţia $f : R \to R$, f(x)=2x-1 . Calculaţi $f(f(1)) - f^{-1}(f(1))$.

(5p) 3.Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x - 27 = 0$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr oarecare de două cifre acesta să fie cub perfect.

(5p) 5. Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$.

(5p) 6. Fie ΔABC cu AB= 7 cm , BC= 8 cm şi AC= 9 cm . Calculaţi raza cercului circumscris ΔABC .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in R$.

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A^3 .

(5p) b) Calculaţi $A^2 - 2 \cdot A + (a^2 + 1) \cdot I_2$.

(5p) c) Calculaţi $(a^2 + 1) \cdot A^{-1} - 2 \cdot I_2$.

2. Fie polinomul $f = x^3 - x^2 - x - 5$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=x+2 .

(5p) b) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f , calculaţi $(2 + x_1) \cdot (2 + x_2) \cdot (2 + x_3)$.

(5p) c) Arătaţi că polinomul f nu are rădăcini întregi .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

(5p) a) Calculaţi $f'(x)$.

(5p) b) Aflaţi ecuaţia asimtotei oblice la ∞ a funcţiei f .

(5p) c) Calculaţi limita la ∞ a şirului $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^2 (x-1)^n \cdot e^x dx$.

(5p) a) Calculaţi I_1 .

(5p) b) Arătaţi că $I_n = e^2 - n \cdot I_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

(5p) c) Arătaţi că $I_n \leq e$, pentru orice $n \in N^*$.

Varianta 75

Prof. : Şerban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1.Dacă şirul $a_1, a_2, ..., a_n$ este o progresie aritmetică cu $a_3 = 10$ şi $a_5 = 16$ .Calculaţi a_{50} .

(5p) 2. Fie funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$. Calculaţi minimul funcţiei f .

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^{x+2} = 81$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr oarecare de două cifre , produsul cifrelor să fie un număr prim .

(5p) 5. În reperul cartezian xoy se consideră punctele A (1 ,-1) şi B (-2 ,3) . Aflaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM} = 5 \cdot \overrightarrow{MB}$.

(5p) 6. Dacă $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, rezolvaţi ecuaţia $\sin^3 x = \cos^3 x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

(5p) a) Aflaţi $x \in R$ pentru care matricea A(x) este singulară .

(5p) b) Calculaţi $A(x) \cdot A(-x)$.

(5p) c) Calculaţi $A^{-1}(2)$.

2. Fie legea de compoziţie $x \circ y = \sqrt{x^2 \cdot y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, $\forall x, y \in (1, \infty)$.

(5p) a) Calculaţi $2 \circ 3$.

(5p) b) Studiaţi dacă legea $\circ$ admite element neutru .

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 2$, $x \in (1, \infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=e^x-x-1$.
(5p) a) Calculaţi derivata funcţiei f.
(5p) b) Aflaţi punctul de extrem al funcţiei f.
(5p) c) Arătaţi că $e^{\sqrt{2}}>\frac{12}{5}$.

2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(5p) a) Aflaţi o primitivă a funcţiei f, notată $F:R\to R$, cu $F(\sqrt{e-1})=\frac{3}{2}$, unde e este baza logaritmului natural.

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot f(x)dx$.

(5p) c) Calculaţi $\int(x^4+1)\cdot e^x\cdot f(x^2)dx$.

Varianta 76

Prof. : Serban George-Florin

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă şirul $a_1,a_2,......,a_n$ este o progresie aritmetică cu $a_3=16$ şi $a_5=26$. Calculaţi suma primilor 10 termeni ai şirului.

(5p) 2. Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=-x^2+1$. Aflaţi coordonatele punctului de maxim al funcţiei f.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x-5)=2$.

(5p) 4.Câte numere de trei cifre distincte $\overline{abc}$ se pot forma ştiind că $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$

(5p) 5. În reperul cartezian xoy se consideră punctele A (2 ,-1) şi B (-2 ,3). Aflaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{MB}$.

(5p) 6. Dacă $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, rezolvaţi ecuaţia $\cos^2 x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

(5p) a) Calculaţi $det(A^{10})$.

(5p) b) Calculaţi $A(x)+A^2(x)+A^3(x)+A^4(x)$.

(5p) c) Calculaţi rangul matricei $A(2)\cdot {}^tA(2)$.

2. Fie polinomul $f=x^4+16$.

(5p) a) Dacă x_1,x_2,x_3,x_4 sunt rădăcinile polinomului f, calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

(5p) b) Aflaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul g=x-i-1 , i=$\sqrt{-1}$.

(5p) c) Arătaţi că polinomul f este reductibil in R[x] .

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:R\to R$, f(x)=x –arctgx .

(5p) a) Calculaţi derivata a doua a funcţiei f .

(5p) b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

(5p) c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul O (0,0).

2. Fie funcţia $f_n:R\to R$, $f_n(x)=x^n\cdot arctg(x)$, unde $n\in N$ şi $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

(5p) a) Calculaţi I_0 .

(5p) b)Calculaţi I_1 .

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 77

Prof. Soare Roxana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

Subiectul I (30 puncte)

(5p) 1.Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}i\right)^{2012}$.

(5p) 2.Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia $3x^2+5x-2\le 0$.

(5p) 3.Să se rezolve în mulţimea $[0,2\pi)$ ecuaţia $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

(5p) 4.Câte numere de la 1 la 200 nu sunt divizibile nici cu 3 , nici cu 5?

(5p) 5.Să se determine $a\epsilon IR$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}-(2a-1)\vec{j}$ şi $\vec{u}=(2a+1)\vec{i}+(3a+1)\vec{j}$ să fie perpendiculari.

(5p) 6.Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului de laturi 6,8,12.

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră mulţimea de matrice $G=A(a)=\left\{\begin{pmatrix}1+a & 2a\\ -2a & 1-4a\end{pmatrix} / a\in\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}\right\}$

(5p) a) Să se arate că $I_2\in G$ şi $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & -7\end{pmatrix}\in G$

(5p) b) Să se arate că $(G,\cdot)$ este subgrup al grupului $(GL_2(\mathbb{R}),\cdot)$.

(5p) c) Să se rezolve în G ecuaţia $(A(a))^3=A(21a)$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^4+4X^3+4X+4\in\mathbb{Z}_5[X]$

(5p) a) Să se arate că dacă $a\in\mathbb{Z}_5-\{\hat{0}\}$, atunci $\hat{a}^5=\hat{1}$

(5p) b) Să se determine rădăcinile din Z_5 ale polinomului f.

(5p) c) Să se descompună f în produs de factori ireductibili în $Z_5[X]$.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

(5p) a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\ln f(x)$. .

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}((f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n))$. .

2.Se consideră şirul $(a_n)_{n\ge 1}, a_n=\int_n^{n+!}\dfrac{1}{x(x+1)}dx$.

(5p) a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_n)$.

Varianta 78

Prof. Soare Roxana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

Subiectul I (30 puncte)

(5p) 1.Într-o progresie aritmetică se cunosc $a_3=5$ *şi* $a_6=11$ Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei.

(5p) 2.Să se arate că vârfurile asociate familiei de parabole $y=x^2-(m+1)x+m+2$ se găsesc pe o parabolă.

(5p) 3.Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x^2-2x+8}+\sqrt{3x^2-2x+3}=5$.

(5p) 4.Câte funcţii $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$ f au proprietatea f(-2)=f(2)?

(5p) 5.Pe latura [BC] a triunghiului ABC se consideră punctul M astfel încât $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{2}{5}$ Să se arate că $\overrightarrow{AM}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

(5p) 6.Ştiind că $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\dfrac{5}{13}$ să se calculeze $tg\,\dfrac{x}{2}$

Subiectul al II-lea (30 puncte)

1.Se consideră sistemul :

$$\begin{cases}2x-3y+4z=1\\ x+y+2z=3\\ 3x-2y+6z=4\end{cases}$$

. Se notează cu A matricea sistemului.

(5p) ab) Să se determine rangul matricei sistemului.

(5p) b) Să se rezolve sistemul.

(5p) c) Câte soluţii întregi (x_0,y_0,z_0) are sistemul cu proprietatea $|x_0+y_0+z_0|\leq 3$?

2.Pe mulţimea IR se defineşte legea de compoziţie: $x*y=2xy-6x-6y+21,\forall x,y\in\mathbb{R}$

(5p) a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se arate că legea „*" este asociativă.

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia: $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\,2012\,ori}=2^{2011}+3$

.

Subiectul al III-lea (30 puncte)

1.Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$,se consideră funcţia $f_n:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ $f_n(x)=(1+x)^n-1-nx.$

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_2^{'}(x)}{f_2(x)}$. .

(5p) b) Să se arate că $f_n(x)\geq 0, \forall x\in(-1,+\infty), n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. .

(5p) c) Să se arate că funcţia f_n este convexă , pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2, \forall x\in(-1;\infty)$

2.Se consideră funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x (t^3-3t+2)e^{3t}dt$. .

(5p) a) Să se calculeze F'(x).
(5p) b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei F.
(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei F.

Varianta 79

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul a=$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}-\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}$ este intreg.

(5p) 2. Determină $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere $x^2-6, 3x, 4x+3$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+(m+3)x-(m+1)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât maximul lui f să fie egal cu 1.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^3+3x+5}=x+2$.

(5p) 5. Să se determine valoarea parametrului real " a " pentru care vectorii $\vec{v_1}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=-3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Se consideră punctele $A(-1;2)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la dreapta AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -10 & -4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **şi** $M=\left\{X(a) \mid a\in\mathbb{R}, X(a)=I_2-a\cdot A\right\}$.

(5p) a) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b-ab)$ şi să se calculeze $X(0)\cdot X(1)\cdot X(2)\cdot\ldots\cdot X(2014)$;

(5p) b))Să se arate că o singură matrice X(a) este neinversabilă;

(5p) c) Dacă X(a) e inversabilă, să se calculeze $(X(a))^{-1}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X],\ f(X)=(X^2+X+1)^{10}+(X^2+1)^{10}+1$ şi $g(X)=X^2+1$.

(5p) a) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

(5p) b) Să se arate că f este divizibil cu g ;

(5p) c) Dacă $f(X)=a_{20}X^{20}+a_{19}X^{19}+\ldots+a_1X+a_0,\ a_i\in\mathbb{R}$, să se determine a_{19}.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2-4x+2}$;

(5p) a) Să se calculeze $f'(x),\ f'(0)$;

(5p) b) Să se studieze monotonia lui f şi să se determine punctele de extrem local ale lui f;

(5p) c) Să se arate că $\frac{1}{e}\le f(x)\le e^2,\ \forall x\in[0;1]$;

2. Fie $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3-1}{x+2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$;

(5p) b) Să se determine volumul corpului de rotație determinat de graficul funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{x^2+x+1}$.

(5p) c) Să se arate că $0\le\int_1^2\frac{f(x)}{x^2+x+1}dx\le\frac{1}{4}$

Varianta 80

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Dacă $a=\sqrt{9+6\sqrt{2}}-\sqrt{9-6\sqrt{2}}$, să se calculeze $\left(a-2\sqrt{3}\right)^2$.

(5p) 2. Să se calculeze suma 3 + 10 + 17 +….+ 192 ;

(5p) 3. Ştiind că x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+4x+1=0$ să se calculeze $\frac{x_1-1}{x_1+2}+\frac{x_2-1}{x_2+2}$.

(5p) 4. Să se rezolve ecuaţia $\lg(x-3)+2\lg(x-1)=3\lg(x-2)$.

(5p) 5. Să se calculeze $\sin(90^0+x)+\cos(180^0-x)+\sin(180^0-x)+\cos(90^0+x)$.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc AB=8, BC=5 şi $\cos B=\frac{4}{5}$. Se cere să se determine sin A.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -1 & 2 \\ 2 & x+3 & -1 \\ 2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze $A(3)\cdot A(-3)$;

(5p) b) Să se arate că $\det(A(x)+A(-x))=0$;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia $\det(A(x))=0$.

2. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X],\ f(X)=X^3+mX^2+nX+p,\ g(X)=X^2+X-2$.

(5p) a) Să se determine $p\in\mathbb{R}$ astfel încât f(2) = 2(2m+n+9).

(5p) b) Pentru p=10, să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă prin g ;

(5p) c) Pentru m= - 4, n= -7, şi p = 10, să se calculeze produsul $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2010)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. 1. Fie funcţia $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2(1+\ln x)$;

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$;

(5p) b) Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcţiei f;

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x_0=1$;

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x\langle 1 \\ \ln(x^2-4x+4), & x\geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f(x) să admită primitive pe $\mathbb{R}$;

(5p) b) Să se arate că orice primitivă a lui f este convexă pe $(2;\infty)$.

(5p) c) Pentru $a=-4, b=6$ să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$.

Varianta 81

Prof. Stan Adrian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x^2+3x-2$. Să se calculeze suma $S=f(1)+f(2)+.....+f(n)$.

(5p) 2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_n$ cu $a_{18}=122$, $a_{26}=178$. Să se calculeze S_{26}.

(5p) 3. Să se rezolve ecuația $3^{x+2}+3^x+3^{x-2}=273$.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-xy+y^2=39 \end{cases}.$$

(5p) 5. În plan se consideră punctele A(1;5), B(-2;-4), C(4;-6). Să se determine ecuația dreptei care trece prin mijlocul laturii $[BC]$ și este paralelă cu dreapta AB.

(5p) 6. În triunghiul ABC se cunosc AB=8, BC = 12, AC =10. Se cere să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A+I_3$;

(5p) b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A+mI_3$ să fie inversabilă;

(5p) c) Să se rezolve ecuaţia matriceală $X\cdot(A+I_3)=I_3$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^2 + (a + \hat{3})X + \hat{a} + \hat{2}$ şi $g(X) = X + \hat{1}$

(5p) a) Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{1}) = \hat{2}$;

(5p) b) Pentru $a = \hat{3}$ rezolvaţi ecuaţia $f(x) = \hat{2}$;

(5p) c) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul g.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - x}{e^x}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(0)$;

(5p) b) Să se determine ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției;

(5p) c) Să se arate că f(x) este convexă pe $(-\infty; 1] \cup [4; \infty)$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \langle 1 \\ x^3 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$;

(5p) a) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$;

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$;

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de graficul funcţiei

$g : [1 : 2] \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + x + 1}$ în jurul axei OX între dreptele de ecuaţii x=1 şi x=2;

Varianta 82

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Sa se rezolve in $\mathbb{R}$ ecuatia $2^{x^2+5} = 4^{x+2}$.

(5p) 2. Să se găsească o relaţie independentă de m între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$.

(5p) 3. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x^2 - 3} - x = -1$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \dfrac{15}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\}$ acesta să fie divizibil cu 3.

(5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele M(2,−1), N(-1,1) şi P(1,3). Găsiţi ecuaţia dreptei care trece prin P şi este paralelă cu mediatoarea lui MN.

(5p) 6. Ştiind că $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ şi $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ calculaţi $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2, m\in\mathbb{R} \\ x+4y+mz=8 \end{cases}$.

(5p) a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului;

(5p) b) Să se rezolve sistemul în cazul în care m=5;

(5p) c) Să se arate că pentru $\forall m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie internă $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(5p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ x = 11$

(5p) c) Ştiind că legea "$\circ$" este asociativă , calculaţi $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{2014}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0;\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(5p) a) Găsiţi asimptotele la graficul funcţiei f ;

(5p) b) Găsiţi punctele de extrem local ale graficului funcţiei f ;

(5p) c) Să se arate că $e^{\pi} > \pi^{e}$

2. Fie $I_n = \int x^n \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Să se calculeze I_1 ;

(5p) b) Să se determine o relaţie de recurenţă pentru I_n ;

(5p) c) Să se demonstreze că dacă $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, atunci $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Varianta 83

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $\log_2 5-\log_2 3+\log_2\frac{12}{5}$.

(5p) 2. Câţi termeni iraţionali conţine dezvoltarea $\left(1+\sqrt{2}\right)^8$?

(5p) 3. Aflaţi numărul complex z care are proprietatea $z+2\bar{z}=6+i$.

(5p) 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre , acesta să conţină cifra 6 ?

(5p) 5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că distanţa de la $A(4-m;4+m)$ la $B(-1;2)$ este egală cu 5.

(5p) 6. Aflaţi perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=4$, $AC=6$ şi $m(\measuredangle BAC)=60^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}2014^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Verificaţi dacă $I_3\in G$.

(5p) b) Arătaţi că $A(x)A(y)\in G$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $\det A^2(x)=2014$ în $\mathbb{R}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie internă $x\circ y=xy-3x-3y+12$, $x,y\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Arătaţi că $x\circ y\in(3;+\infty),\forall x,y\in(3;+\infty)$

(5p) b) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $x\circ x=x$

(5p) c) Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to(3;+\infty), f(x)=e^x+3$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R};+)$ la grupul $((3;+\infty);\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ şi $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$

(5p) a) Să se studieze continuitatea funcţiei f

(5p) b) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f în $x=0$.

(5p) c) Să se calculeze limita şirului $a_n = g\left(\frac{1}{n^3}\right)+g\left(\frac{2}{n^3}\right)+...+g\left(\frac{n}{n^3}\right), n\geq 1$

2. Fie funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x - x$

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă F a lui f este concavă pe $(1;+\infty)$

(5p) b) Să se calculeze $\int (x-f(x)+\ln x)^2 dx$

(5p) c) Să se determine primitiva G a funcţiei $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ cu proprietatea că $G(1)=\frac{1}{2}$

Varianta 84

Prof. Stoica Alina Codruţa

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$ ştiind că $z\in\mathbb{C}$ şi $z^2+z+1=0$

(5p) 2. Ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax-2a$ intersectează axa OX în două puncte situate la distanţa 3, să se afle valorile parametrului $a\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg(x+1)+\lg x=\lg 9+1$.

(5p) 4. Să se determine $\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2014}}\right\}$ unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

(5p) 5. Calculaţi $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$ ştiind că $ABCDEF$ este un hexagon cu lungimea laturii de 10.

(5p) 6. Arătaţi că unghiul vectorilor $a=5\vec{i}-4\vec{j}$ şi $b=2\vec{i}+3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră permutările $e,\sigma\in S_3, e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

(5p) a) Să se calculeze σ^3 ;

(5p) b) Să se rezolve ecuaţia $\sigma^{2014}\cdot x=e, x\in S_3$

(5p) c) Demonstraţi că, indiferent de ordinea factorilor, produsul permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + m \in \mathbb{Z}_3[X]$ şi $m \in \mathbb{Z}_3$

(5p) a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$

(5p) b) Pentru $m = 2$ să se determine rădăcinile polinomului f

(5p) c) Să se determine $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x^2$

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

(5p) b) Să se arate că f este convexă pe $\mathbb{R}$

(5p) c) Să se arate că funcţia f nu are asimptote spre $+\infty$

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \ge 1}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(5p) a) Să se calculeze I_1 ;

(5p) b) Să se arate că $I_n \le \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Varianta 85

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{2 + 3i}{1 + i}$.

(5p) 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.

(5p) 3. Să se determine partea întreagă a numărului $\log_3 534$.

(5p) 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a - b = 2$.

(5p) 5. Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 2)$ și $B(0, 3)$ să aparțină dreptei de ecuație

$y = ax + b$.

(5p) 6. Să se calculeze $\cos^2(2013\pi)+\sin(2014\pi)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\in S_4$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\in S_4$.

(5p) a) Să se verifice că permutarea σ este pară.

(5p) b) Să se determine numărul elementelor mulţimii $A=\left\{\tau^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

(5p) c) Să se determine $x\in S_4$ pentru care $x\sigma=\tau$.

2. Fie mulţimea $H=\left\{\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{Q},\, a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

(5p) a) Să se verifice că $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\in H$.

(5p) b) Să se demonstreze că H este parte stabilă a mulţimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

(5p) c) Să se arate că $(\mathrm{H},\cdot)$ este grup abelian.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\mathrm{x})=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

(5p) a) Să se calculeze $f'(\mathrm{x})$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Stabiliţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

(5p) c) Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

2. Se consideră funcţia bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\mathrm{x})=\dfrac{-x^3+3x^2-10x+27}{x^2+9}$.

(5p) a) Să se verifice că $f(\mathrm{x})=-x+3-\dfrac{x}{x^2+9}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_1^9\left(x-3+f(\mathrm{x})\right)^2\mathrm{d}x$.

(5p) c) Să se calculeze $\int_{\frac{19}{10}}^{3} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

Varianta 86

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $(2x-3)^2=-9$.

(5p) 2. Arătați că vârful parabolei $y=x^2-2(3m+1)x+m$ se află sub axa Ox pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\sqrt{x+3}=1$.

(5p) 4. Să se determine termenul care conține pe x^3 în dezvoltarea $\left(x+\frac{2}{x}\right)^7$, unde $x>0$.

(5p) 5. Fie hexagonul regulat $ABCDEFG$. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{AD}$ după vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AF}$.

(5p) 6. Știind că $a\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ și $\sin a=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg} a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ și punctele $A(m,2)$, $B(m-1,3)$ și $C(2m,2-m)$. Considerăm matricea

$$M=\begin{pmatrix} m & 2 & 1\\ m-1 & 3 & 1\\ 2+m & 2-m & 1\end{pmatrix}.$$

(5p) a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea M este inversabilă.

(5p) b) Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare.

(5p) c) Să se arate că $\operatorname{rang}(M)\geq 2$, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

2. Fie $\mathbb{Z}_{15}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{14}\}$ inelul claselor de resturi modulo 15.

(5p) a) Să se arate că suma elementelor inelului este egală cu $\hat{0}$.

(5p) b) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{15}$ ecuația $\hat{2}\cdot x=\hat{6}$.

(5p) c) Să se determine numărul elementelor neinversabile ale inelului.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-7x^2+11x-5}$.

(5p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}$.

(5p) b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

(5p) c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 2}$ dat prin termenul general $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(5p) a) Să se calculeze I_2.

(5p) b) Să se demonstreze că $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$, $(\forall) x \in [1,2]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 87

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică în care $b_2 = \sqrt{27}$ şi $b_4 = \sqrt{243}$. Calculaţi b_{10}.

(5p) 2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = 2^{x^2-4x+3}$ nu este injectivă.

(5p) 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x - 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} = 32$.

(5p) 4. Să se determine numărul de funcţii $f : \{1,2,3\} \to \{4,5\}$ pentru care $f(1) \leq f(2)$.

(5p) 5. În sistemul cartezian de axe xOy se consider punctele $A(2,3)$, $B(-1,4)$ şi $C(1,-2)$. Să se scrie

ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu $\overrightarrow{AB}$.

(5p) 6. Să se rezolve în intervalul $[0, 3\pi]$ ecuaţia $tg(x+\pi) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z=a-1 \\ x+y+bz=-1 \end{cases}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi notăm cu A matricea corespunzătoare sistemului.

(5p) a) Să se arate că $\det(A) = (1-a)(b-1)$.

(5p) b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii pentru $a = 0$ şi $b = 2$.

(5p) c) Arătați că, dacă $b=1$, atunci sistemul de ecuații este incompatibil.

2. Se consideră polinomul $f=8X^4+2X^3-13X^2+7X-1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{C}$.

(5p) a) Să se arate că polinomul f se divide cu X^2+X-1.

(5p) b) Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

(5p) c) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $a_1=\frac{1}{2}$ și $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) b) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

(5p) c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\le 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Să se determine o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f.

(5p) c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ în jurul axei Ox.

Varianta 88

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că numărul complex $2-i\sqrt{3}$ este o soluție a ecuației $z^2-4z+7=0$.

(5p) 2. Calculați suma dintre valoarea maximă și valoarea minimă a funcției $f:[3;9]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=|x-3|+|x-5|$.

(5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+x+4}=8-x$.

(5p) 4. Notăm cu S mulțimea tuturor funcțiilor $f:\{1;3;5;7\}\to\{8;9;10\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea S, aceasta să fie surjectivă.

(5p) 5. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2m+1,2)$ și $B(2,2m)$ să fie egală cu

$\sqrt{5}$.

(5p) 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1 & m & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^m\end{pmatrix} \middle| m\in\mathbb{R}\right\}$.

(5p) a) Să se verifice că $I_3\in M$.

(5p) b) Să se arate că $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$, pentru orice m, $n\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Să se calculeze $A(1)+A(2)+\cdots+A(2014)$.

2. Fie inelul comutativ $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ în care legile de compoziție sunt definite astfel:

$x\star y=x+y-2$ și $x\circ y=xy-2x-2y+6$, pentru orice x, $y\in\mathbb{Z}$.

(5p) a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.

(5p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2\star(x-1)=0$.

(5p) c) Să se determine a, $b\in\mathbb{Z}$ pentru care între inelele $(\mathbb{Z},\star,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism

de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}+x+2$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(5p) b) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(5p) c) Arătați că punctul $A\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ este centru de simetrie al graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{6}e^{-\frac{x}{3}}$.

(5p) a) Arătați că funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

(5p) b) Arătați că $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(3-xe^{-\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

(5p) c) Demonstrați că ecuația $F(x)=k$ are soluție unică în intervalul $[0,+\infty)$, pentru orice $k\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right)$.

Varianta 89

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $\sqrt{2}\in\left(\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{3}\right)$.

(5p) 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+7x+10$ cu axa Ox.

(5p) 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(4^x-6\right)=x$.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând o pereche $(a,b)\in\{1;3;6;8\}\times\{1;3;6;8\}$, produsul $a\cdot b$ să fie par.

(5p) 5. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+(3a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(3-a)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Calculați $\cos\left(2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

2. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+\ \ y+2z=-1 \\ x-2y+\ \ z=n \\ mx-\ \ y-\ \ z=1 \end{cases}$, unde m, $n\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

(5p) b) Să se determine valorile parametrilor m, $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

(5p) c) Să se arate că, dacă sistemul admite soluția (x_0, y_0, z_0) cu proprietatea că x_0, y_0 și z_0 sunt în progresie aritmetică (în această ordine), atunci $n=0$.

2. Fie f, $g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=X^3+X^2+aX+\hat{1}$ și $g=X+\hat{3}$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ pentru care polinomul g divide polinomul f.

(5p) b) Pentru $a=\hat{1}$, să se arate că $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)$.

(5p) c) Pentru $a=\hat{1}$, să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-xe^2$.

(5p) a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

(5p) b) Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație

$y=1$.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{f'(x)}{(x-2)e^2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ definim șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ cu termenii generali $x_n=\int_0^1 t^n\cos t\,dt$ și

$y_n=\int_0^1 t^n\sin t\,dt$.

(5p) a) Arătați că $x_n\geq 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) b) Folosind metoda integrării prin părți, demonstrați că $x_{n+1}=-(n+1)y_n+\sin 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Admițând că $y_{n+1}=(n+1)x_n-\cos 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Varianta 90

Prof. Szép Gyuszi

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătați că $\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)=2$.

(5p) 2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2-2x+m=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=10$.

(5p) 3. Notăm cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(6,+\infty)$, $f(x)=5^x+1$. Calculați $g(26)$
.

(5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1;2;3;4;5\}$, aceasta să aibă două elemente.

(5p) 5. Fie $MNPQ$ un paralelogram în care $MQ=8$, $MN=3$ și $m(\sphericalangle MQP)=150^\circ$. Calculați $\left|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}\right|$.

(5p) 6. Calculați $\sin\dfrac{\pi}{36}-\cos\dfrac{17\pi}{36}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

(5p) a) Să se calculeze rangul matricei A.

(5p) b) Să se demonstreze că $\det\left(A\cdot {}^tA\right)$ este pătrat perfect.

(5p) c) Să se calculeze $\det\left({}^tA\cdot A\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+X^2+2X+2$ și $g=X^2+1$. Notăm cu x_1, x_2
,
$x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f.

(5p) a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

(5p) b) Să se calculeze $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$.

(5p) c) Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{4x+3}{3x+2}$.

(5p) a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{x}{3x+2}\right)^x$.

(5p) c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f\left(5^x\right)$.

2. Fie $m,\ n\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2^x+m, & x\le 0\\ 2nx+\sin x, & x>0\end{cases}$.

(5p) a) Să se determine $m,\ n\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Pentru $m=-1$ și $n=1$, calculați $\int_{-1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

(5p) c) Să se determine $n\in\mathbb{R}$ pentru care aria suprafeței delimitate de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$g(x)=f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{\pi}{3}$ și $x=\pi$ este egală cu 5.

Varianta 91

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați: $\log_2\frac{1}{8}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$.

(5p) 2. Determinaţi $a,b\in R$, ştiind că parabolele asociate funcţiilor $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-2x^2+bx+1$ au acelaşi vârf.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9(x+1)+\log_3(x+1)=\frac{3}{2}$.

(5p) 4. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{7,8,9,....,70\}$, acesta să fie pătrat perfect sau cub perfect.

(5p) **5.** Se dau punctele $A(1,-2), B(3,0)$. Să se determine coordonatele punctului M, ştiind că B este mijlocul segmentului (AM).

(5p) **6.** Calculaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=10, AC=24, BC=26$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ şi $X(\mathrm{p})=I_3+pA$, $p\in R$

(5p) **a)** Să se calculeze A^2-2A,

(5p) **b)** Demonstraţi că $X(\mathrm{p})X(\mathrm{q})=X(\mathrm{p}+q+2pq), \forall p,q\in R$,

(5p) **c)** Calculaţi: i) $X(2)X\left(-\frac{2}{5}\right)$

ii) Determinaţi inversa matricei $X(2)$

2. În $R[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+aX-1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in C$.

(5p) **a)** Determinaţi $a\in R$ ştiind că polinomul f se divide prin $X-1$.

(5p) **b)** Pentru $a=-3$, calculaţi $\frac{x_1+1}{x_1}+\frac{x_2+1}{x_2}+\frac{x_3+1}{x_3}$.

(5p) **c)** Pentru $a=0$, verificaţi dacă $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=3$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:R-\{1\}\to R, f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$

(5p) **a)** Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

(5p) **b)** Verificaţi dacă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x}=4$

(5p) **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(0,f(0))$.

2. Pentru fiecare $n\in N^*$ se consideră funcţia $f_n:[0,1]\to R$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x+1}$ şi fie $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

(5p) **a)** Calculaţi I_1 şi I_2

(5p) **b)** Verificaţi dacă $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in N^*$ şi determinaţi apoi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(5p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Varianta 92

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 100 se divid cu 2 sau cu 5.

(5p) 2. Determinaţi $a \in R$ astfel încât numărul $\frac{5}{2+i}+\frac{a}{2-i}$ să fie întreg.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 5\cdot 2^x + 6 = 0$.

(5p) 4. Rezolvaţi ecuaţia: $A_x^2 + C_x^{x-2} = 18$.

(5p) 5. Să se determine $m \in R$ astfel încât punctele $A(1,-2), B(3,m), C(2,6)$ să fie coliniare.

(5p) 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6, m \in R$ şi fie $x_1, x_2, x_3 \in C$ rădăcinile sale.

(5p) a) Calculaţi $f\left(x_1+x_2+x_3\right) - f\left(x_1x_2x_3\right)$.

(5p) b) Să se determine m astfel încât $x_1 + x_3 = 2x_2$

(5p) c) Pentru $m = 11$, să se calculeze $C_{x_1+x_2}^{x_3} + C_{x_2+x_3}^{x_1} + C_{x_3+x_1}^{x_2}$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = I_3 + A$, $C = I_3 - A$.

(5p) a) Calculaţi A^2,

(5p) b) Verificaţi dacă $BC = CB$,

(5p) c) Demontraţi că matricea B este inversabilă şi determinaţi inversa sa.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : R \to R, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Se notează cu $f^{(n)}$ derivata de ordinul n a funcţiei f.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f are un punct de minim.

(5p) b) Demonstraţi că graficul funcţiei f nu are puncte de inflexiune.

(5p) c) Demonstraţi că funcţiile $g_n : R \to R, g_n(x) = f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x) - e^x, n \in N$ sunt constante.

2. Se consideră funcţia $f:(-2,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

(5p) a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(-2,\infty)$

(5p) b) Calculaţi $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x}$

Varianta 93

Prof. Teler Marian

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinaţi produsul primelor 5 zecimale ale numărului real $\sqrt{50}$

(5p) 2. Rezolvaţi ecuaţia: $2^3=4^{2x-1}$

(5p) 3. Calculaţi modulul numărului complex: $z=\left(\sqrt{2}-i\right)^6$

(5p) 4. Rezolvaţi în R ecuaţia: $\log_2(2-x)-\log_2(2+x)=-1$

(5p) 5. Să se calculeze lungimea înălţimii din A a triunghiului ABC, $A(1,2), B(-1,3), C(0,4)$

(5p) 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\3x+2y+5z=0\\x+3y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in R$

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei sistemului.
(5p) b) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluţie unică.
(5p) c) În cazul $m=4$, determinaţi soluţiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului, cu toate componentele numere

întregi,care verifică relaţia: $x_0^2+y_0^2+z_0^2\le 3$.

2. Pe R se dau legile de compoziţie $x\perp y=x+y-3$, $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

(5p) a) Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} x \perp y = 7 \\ x \circ y = 7 \end{cases}$

(5p) b) Calculaţi $(e_1 \perp e_2) \circ e_1$, unde e_1 şi e_2 sunt elementele neutre ale operațiilor „ $\perp$ ‘‘, respectiv „ $\circ$ ‘‘.

(5p) c) Determinaţi $x, y \in Z$ astfel încât: $x \circ x \circ y = 11$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se dau funcţiile $f, g : R \to R,\ \ f(x) = x^2(a - x) + 2014,\ \ g(x) = x^3(x - a) + 2014$

(5p) a) Să se determine $a \in R$ astfel încât tangentele la graficele celor două funcţii în punctul $A(a, f(a))$ să fie perpendiculare.

(5p) b) Să se demonstreze că graficul funcţiei f are puncte de inflexiune pentru orice $a \in R$

(5p) c) Să se determine $a \in R$ astfel încât graficul funcţiei g să nu admită puncte de inflexiune.

2. Se dă funcţia $f : (0, \infty) \to R,\ \ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x}$

(5p) a) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f are un punct de inflexiune.

(5p) b) Calculaţi $\int f(x)dx$ şi $\int f\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x^2}$

Varianta 94

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se rezolve ecuația $2 \cdot [x]^2 - 3 \cdot [x] + 1 = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .

(5p) 2. Determinați forma trigonometrică a numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.

(5p) 3. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{a}\right)^{100}$. Să se determine termenul care conține pe x^5 .

(5p) 4. Știind că $\operatorname{tg} a = \dfrac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ să se calculeze $\cos a$.

(5p) 5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$ și $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ formează un unghi obtuz.

(5p) 6. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3;5)$, $B(-1;4)$ și $C(2;-2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu BC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se dau permutările $\alpha,\beta \in S_5$; $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&1&3\end{pmatrix}$; $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătați că $\alpha\beta\neq\beta\alpha$.

(5p) b) Rezolvați ecuația $x\alpha=\beta; x\in S_5$.

(5p) c) Determinați permutările $x\in S_5$ care verifică relația $x^2=\beta^2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX-1$, unde a este un număr real.

(5p) a) Pentru $a=1$, calculați $f(-1)$.

(5p) b) Pentru $a=1$, determinați rădăcinile complexe ale polinomului f.

(5p) c) Determinați numărul real a știind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=10$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+mx+n,\ \ m,n\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Pentru $m=n=1$, calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) b) Determinați soluțiile ecuației $f''(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

(5p) c) Arătați că punctele de inflexiune la graficul funcției sunt coliniare.

2. Fie șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq1}$, definit prin $\mathcal{I}_n=\int_0^1(1+x)^n 2^x dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculați $\mathcal{I}_1$.

(5p) b) Studiați monotonia șirului $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(5p) c) Arătați că $\mathcal{I}_n\cdot\ln2=2^{n+1}-1-n\mathcal{I}_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 95

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se scrie al 50-lea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 3$ și $r = -3$.

(5p) 2. Să se scrie termenul al optulea al dezvoltării $(2x - y)^{20}$.

(5p) 3. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $\sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{6};\ \sqrt[12]{280}$.

(5p) 4. Calculați $\sin 105^{\circ}$.

(5p) 5. Se dau vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$. Să se determine parametrul real m pentru care unghiul format de cei doi vectori este de 45°.

(5p) 6. Să se determine aria triunghiului ABC, știind că $a = 3,\ b = 5,\ c = 6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + 2my + z = 4 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$, unde m este parametru real.

(5p) a) Arătați că $\det A \vdots 2, (\forall) m \in \mathbb{Z}$, unde A este matricea coeficienților sistemului.

(5p) b) Rezolvați sistemul pentru $m = 1$.

(5p) c) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

2. Se consideră mulțimea $G = (-2, \infty)$ și legea de compoziție $"*"$ definită prin $x * y = xy + 2x + 2y + 2$.

(5p) a) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu cu $"*"$.

(5p) b) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

(5p) c) Demonstrați că grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

(5p) a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x_0 = 1$.

(5p) b) Să se determine asimptotele la graficul funcției .

(5p) c) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalul $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ funcției $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq1}$, cu termenul general $\mathcal{I}_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+4}dx$

(5p) a) Arătați că $4\mathcal{I}_n+\mathcal{I}_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in N^*$.

(5p) b) Calculați $\mathcal{I}_2$.

(5p) c) Demonstrați că șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq1}$ este convergent și apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{I}_n$.

Varianta 96

Prof. Tomiță Liliana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculați $\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}$.

(5p) 2. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $z^4-81=0$.

(5p) 3. Determinați punctele în care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ intersectează axele .

(5p) 4. Determinați aria unui triunghi echilateral cu latura de 3 cm .

(5p) 5. Dintre funcțiile surjective $f:\{1,2,3,...,10\}\to\{1,2,3,...,10\}$ se alege una la întâmplare. Care este probabilitatea ca funcția aleasă să fie injectivă?

(5p) 6. Se consideră punctele $A(2,3)$; $B(-1,1)$ și $C(0;-2)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$

(5p) a) Calculați $\det A$ și $\operatorname{rang} A$.

(5p) b) Determinați A^{2014} .

(5p) c) Fie $B=\mathcal{I}_3+A$. Arătați că B este inversabilă și determinați B^{-1}.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+4X^3-4aX+4b\in\mathbb{Q}[x]$

(5p) a) Pentru $a=b=0$ determinați rădăcinile lui f.

(5p) b) Știind că f admite o rădăcină dublă de forma $m+n\sqrt{3},\ m,n\in\mathbb{Q}^*$ determinați a și b.

(5p) c) Determinați a și b știind că $x=1$ este rădăcină dublă pentru f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

(5p) a) Să se studieze derivabilitatea funcției f.

(5p) b) Să se afle punctele de extrem ale funcției f.

(5p) c) Arătați că f este o funcție concavă pe $[0,2]$.

2. Fie $x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ și $\mathcal{I}_n=\int\sin^n x\,dx$

(5p) a) Calculați $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3$.

(5p) b) Arătați că $n\mathcal{I}_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\mathcal{I}_{n-2},\ n\geq 2$.

(5p) c) Calculați $24\mathcal{I}_6$.

Varianta 97

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați mulțimea de adevăr a următorului predicat: *p*(*x*): „$x\in\mathbb{Z},\dfrac{2x+3}{x-1}\in\mathbb{Z}$".

(5p) 2. Termenul al *n*-lea al unei progresii aritmetice este $a_n=\dfrac{3n-1}{6},n\geq 1$. Să se calculeze suma primilor patru termeni.

(5p) 3. Determinați $m\in\mathbb{R}$, pentru care funcția $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2(m-2)x+m\right)$ este definită pe mulțimea numerelor reale.

(5p) 4. Într-o sală de conferințe sunt 12 fotolii la masa prezidiului. În câte moduri se pot așeza pe aceste fotolii 7 membrii ai prezidiului.

(5p) 5. Determinați ecuația înălțimii din A, a unui triunghi ABC, unde A(2,5), B(1,3), C(7,0).

(5p) 6. Calculați $\cos a+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-a\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+a\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătați că $A\cdot B=B\cdot A=O_2$.

(5p) b) Arătați că $(A+B)^n=A^n+B^n$.

(5p) c) Calculați $\det\left(A^{2012}+B^{2012}\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(1,\infty)$ se defineşte legea „*" $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}\in M$.

(5p) a) Arătați că legea este asociativă pe M.

(5p) b) Calculați elementul neutru al acestei legi și determinați elementele inversabile din mulțimea M.

(5p) c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\ \ 2012\ \ ori}=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie $f,g,h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

(5p) a) Calculați $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

(5p) b) Dacă $g(x)=e^{x+1}$, calculați $h(x)=(g\circ f)(x)$.

(5p) c) Determinați punctul $c\in(1,2)$ pentru care teorema lui Lagrange este adevărată pe intervalul $[1,2]$ pentru funcția h.

2. Fie funcția $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

(5p) a) Să se calculeze $\int\limits_0^4 f^2(x)dx$.

(5p) b) Să se calculeze $\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\dfrac{x}{f(x)}dx$.

(5p) c) Să se demonstreze că $0\le\int\limits_{-4}^{4}f(x)dx\le 32$.

Varianta 98

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{2x^3-3x^2+4x+9}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$.

(5p) 2. Rezolvați sistemul: $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=6\\ y=5+|x-1|\end{cases}$.

(5p) 3. Fie binomul $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$. Determinați *n*, astfel încât raportul dintre coeficientul termenului al cincilea și coeficientul termenului al treilea este $\frac{7}{2}$.

(5p) 4. Cercetați dacă funcția $f:(1,\infty)\to(-2,\infty)$, $f(x)=x^3-3x$ este bijectivă.

(5p) 5. Fie *ABC* un triunghi cu $A(3,2)$, $B(5,4)$. Dacă punctul $G(3,4)$ este centrul de greutate al triunghiului *ABC*, să se determine coordonatele vârfului *C*.

(5p) 6. Arătați că valoarea expresiei $E=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\cos^4 x+\sin^4 x)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricei $A_x=\begin{pmatrix}-x & -1 & x & 1\\ 1 & x & 1 & -x\\ x & 1 & x & 1\\ 1 & -x & -1 & x\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$.

(5p) a) Calculați determinantul asociat matricei A_x.

(5p) b) Determinați valorile lui *x* pentru care $rangA_x=3$.

(5p) c) Calculați suma modulelor valorilor lui *x* pentru care rangul matricei A_x este 3.

2. Fie G mulțimea matricelor de forma $M(a)=\begin{pmatrix}2-a & a-1\\ 2(1-a) & 2a-1\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}^*$.

(5p) a) Să se exprime $M(a)$ sub forma $M(a)=A+aB$, unde *A* și *B* sunt matrice care un depind de parametrul *a*.

(5p) b) Să se arate că *G* este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

(5p) c) Arătați că grupul $(G,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+rx-p}{x-1}, & x<0\\ \ln(qx^2-3x+1), & x\geq 0\end{cases}$.

(5p) a) Studiați continuitatea funcției funcției f în punctul $x=0$.

(5p) b) În cazul când funcția este continuă în punctul $x=0$, studiați derivabilitatea funcției în acest punct.

(5p) c) Calculați $S=p^2+q^2+r^2$ pentru care este valabilă teorema lui Rolle pe intervalul $[-1,1]$.

2. Fie șirul $I_n=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^n\,dx$.

(5p) a) Calculați I_0 și I_1.

(5p) b) Găsiți o formulă de recurență pentru șirul $(I_n)_{n\geq 0}$.

(5p) c) Studiați convergența șirului $(I_n)_{n\geq 0}$.

Varianta 99

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Determinați mulțimea $M=\{m\in\mathbb{Z}\ /\ x^2-mx+6=0$ are cel puțin o rădăcină întreagă$\}$.

(5p) 2. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ cu $x+y+z=1$. Demonstrați că $x^2+y^2+z^2\geq 4(xy+yz+zx)-1$. În ce caz are loc egalitatea?

(5p) 3. Rezolvați ecuația $3^x+4^x=8-x, x\in\mathbb{R}$.

(5p) 4. Pentru a forma o echipă de baschet (5 jucători) un antrenor are la dispoziție 8 jucători albi și 15 jucători de culoare. În câte moduri poate alcătui antrenorul echipa?

(5p) 5. Se dă vectorul $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Care este mulțimea punctelor *M* din plan care verifică relația $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OM}=3$?

(5p) 6. Fie α și β numere reale astfel încât $\sin\alpha+\sin\beta=1$ și $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$. Calculați $\cos(\alpha-\beta)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-y+z-t=1\\ x+y+mz+t=-1\\ x-y+z+nt=p\end{cases}, m,n,p\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați *m, n* reali astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

(5p) b) În cazul în care rangul matricei sistemului este doi, determinați *p* pentru care sistemul este compatibil.

(5p) c) Dacă rangul matricei sistemului este doi şi sistemul este compatibil, determinaţi soluţiile sistemului.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + c$,

$g = X^3 + (a+p)X^2 + (b+p)X + c + p$, unde $p \neq 0$.

(5p) a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^3 - 1 = 0$.

(5p) b) Arătaţi că polinoamele au cel puţin o rădăcină comună.

(5p) c) Ce relaţie există între a, b, c, pentru ca cele două polinoame să aibă o rădăcină comună.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + nx - p}{x-1}, & x < 0 \\ \ln(rx^2 - 3x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$.

(5p) a) Să se determine *n* şi *p* astfel încât funcţia *f* să fie continuă şi derivabilă în $x = 0$.

(5p) b) Să se verifice pe intervalul $[-1,1]$ condiţiile teoremei lui Rolle.

(5p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei în origine la graficul funcţiei determinate.

2. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \inf(t^2 - 2t), & t \leq 3 \\ \sup(8 - 3t), & t > 3 \end{cases}$.

(5p) a) Să se arate că $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1 \\ -1, & x \in (1,3] \\ 8 - 3x, & x > 3 \end{cases}$.

(5p) b) Să se calculeze $\int_0^4 f(x)dx$.

(5p) c) Pe intervalul $[0,4]$ construiţi graficul funcţiei şi calculaţi: aria suprafeţei plane limitată de graficul funcţiei şi axa *Ox* şi volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei în jurul axei *Ox*.

Varianta 100

Prof: Viorica Lungana

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2(a-1)x - 2a + 1 = 0$ să existe relaţia $\dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1^2} \geq \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

(5p) 2. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2; g(x) = x^2 + 2x$. Ecuaţia $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ are soluţii reale?

(5p) 3. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,...,10\}$. În câte submulțimi ale mulțimii A se află elementul 1 ?

(5p) 4. Să se rezolve ecuația: $\log_7\left(4\cdot 2^x-2^{x-1}\right)=1+\log_7 4$.

(5p) 5. Să se arate că expresia $E(x)=\sin^2 x+2\cos x\cos a\cos(a+x)-\cos^2(a+x)$ nu depinde de x.

(5p) 6. Știind că imaginea punctului $P(2,3)$ prin simetrie de centru $P_0(x_0,y_0)$ este punctul $P'(4,-5)$, determinați coordonatele centrului P_0.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cu $a\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) b) Pentru $a=1$, să se calculeze matricea $B=\dfrac{1}{\det A}\left(A^2-3A-5I_3\right)$.

(5p) c) Calculați A^{-1}, pentru $a=1$.

2. Pe mulțimea $G=(1,\infty)-\{2\}$ se definește legea de compoziție „*" astfel

$$x*y=1+(x-1)^{\ln(y-1)},(\forall)x,y\in G.$$

(5p) a) Studiați comutativitatea acestei legi de compoziție.

(5p) b) Studiați asociativitășii legii „*".

(5p) c) Rezolvați ecuația $x*x*x=e^{27}+1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie șirul dat de termenul general $x_n=\dfrac{8n-3}{8n+1}$. Formăm șirul $a_n=x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n$.

(5p) a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este strict monoton.

(5p) b) Să se arate că $a_n<\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}},(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) c) Calculați limita șirului $(a_n)_{n\ge 1}$.

2. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x^3+3x^2+8x+6}{\left(x^2+2x+4\right)^n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Descompuneți în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}$ expresia x^3+3x^2+8x+6.

(5p) b) Calculați I_1 și I_2.

(5p) c) Calculați $I_n=\int f_n(x)dx$.

ALTE VARIANTE PROPUSE

*****

Varianta propusă 1

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi partea întreagă a numărului $a=\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

(5p) 2. Determinaţi valorile parametrului real m pentru care $(m-1)x^2+(m-1)x-m+2\geq 0,(x)\in\mathbb{R}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2.$.

(5p) 4. Determinaţi $n\in\mathbb{N}$ dacă în dezvoltarea $(1+x)^n$ coeficienţii lui x^4 şi x^{13} sunt egali.

(5p) 5. Fie familia de drepte $d_m:(2m-1)x+(m+1)y+5-m=0,\ m\in\mathbb{R}.$ Demonstraţi că dreptele trec printr-un punct fix şi determinaţi coordonatele acestuia.

(5p) 6. Calculaţi $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=B+I_3$.

(5p) a) Arătaţi că $A^2=3A$;

(5p) b) Calculaţi $A^n, n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) calculaţi $A+A^2+A^3+....+A^{2012}$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{Z}\right\}$.

(5p) a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor;

(5p) b) Demonstraţi că $(G,\cdot)$ este grup abelian;

(5p) c) Arătaţi că $(G,\cdot)\simeq(\mathbb{Z},+)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie familia de funcţii de gradul al treilea $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_m(x)=x^3+mx^2+x-1;\ m\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Aflaţi punctele de extrem local ale funcţiei f_2;

(5p) b) Arătaţi că f_1 este inversabilă şi calculaţi $\left(f_1^{-1}\right)'(2)$;

(5p) c) Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât ecuaţia $f_m(x)=2x-2$ are trei soluţii reale.

2. Fie funcţiile

$$f_n:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\mathrm{tg}^n x;\ n\in\mathbb{N}^* \text{ şi şirul } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+f_n(x)\right)dx.$$

(5p) a) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x)dx$;

(5p) b) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent;

(5p) c) Arătaţi că $\max\left\{I_n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Varianta propusă 2

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Aflaţi suma primilor 40 de termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ştiind că $a_6+a_{12}+a_{22}+a_{42}=40$.

(5p) 2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-3x+1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f([x])=0$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

(5p) 3. Determinaţi funcţia de gradul al doilea care are valoarea maximă $\frac{3}{4}$ şi al cărei grafic conţine punctul $A(0,-1)$ şi are ca axă de simetrie dreapta $d:2x-1=0$.

(5p) 4. Fie binomul $\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*$ şi $x>0$. Aflaţi n ştiind că suma tuturor coeficienţilor dezvoltării este cu 992 mai mare decât suma coeficienţilor binomiali.

(5p) 5. Fie punctele A, B, C de afixe $z_1=3+i,\ z_2=1-3i,\ z_3=i$. Demonstraţi că triunghiul ABC este obtuzunghic.

(5p) 6. Calculaţi $E=\frac{3+\sin x+5\cos x}{2+3\sin x-\cos x}$ ştiind că $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricele $A_x=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\x&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Arătaţi că matricea A_1 este inversabilă şi calculaţi inversa ei;

(5p) b) Calculaţi $A_x^{\ n}; n \in \mathbb{N}^*$;

(5p) c) Determinaţi valorile lui x pentru care matricele $B_n = A_x^{\ n} + A_x^{\ n+1} + A_x^{\ n+2}, n \in \mathbb{N}^*$ sunt inversabile;

2. Fie polinoamele $f = \left(X^2 - X - 1\right)^{2012} + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii lui *f* la *g*;
(5p) b) Aflaţi restul împărţirii lui *f* (3) la 13;
(5p) c) Calculaţi $s = \sum_{k=3}^{n} g(k)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

(5p) a) Aflaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$;
(5p) b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei *f*;
(5p) c) Stabiliţi natura punctelor $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = e^x \left(x^2 - 2\right)$.

(5p) a) Arătaţi că aria domeniului cuprins între graficul funcţiei *f*, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ are valoarea *e*;

(5p) b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;

(5p) c) Calculaţi $L = \lim_{x \to \pi} \frac{\int_0^{\sin x} f(t)\,dt}{\sin x}$.

Varianta propusă 3

Prof: Badea Daniela

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$ şi $r = 4$. Calculaţi suma $S = \sum_{k=1}^{2012} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$.

(5p) 2. Aflaţi valorile parametrului real m astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2\left(|m| - 1\right) = 0$ să verifice relaţia $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

(5p) 3.Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $x + \log_2\left(9 - 2^x\right) > 9^{\log_3 \sqrt{3}}$.

(5p) 4. Câte numere naturale de trei cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5? Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un astfel de număr, acesta să aibă toate cifrele pare?

(5p) 5. Fie punctele $\mathrm{A}(3,1), \mathrm{B}(1,-3)$. Aflaţi coordonatele unui punct C situat pe axa Oy astfel încât aria triunghiului ABC este 3.

(5p) 6. Fie $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Demonstraţi că $\sin\alpha+\sin\beta\le\sqrt{4-(\cos\alpha+\cos\beta)^2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}\alpha x+\beta y+2z=1\\ \alpha x+(2\beta-1)y+3z=1\\ \alpha x+\beta y+(\beta+3)z=2\beta-1\end{cases}$ $;\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Determinaţi valorile parametrilor complecşi α,β astfel încât sistemul este compatibil determinat;

(5p) b) Stabiliţi natura sistemului pentru $\beta=-1$

(5p) c) Dacă $\beta=1$ aflaţi soluţia sistemului (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0^{\ 2}+y_0=(z_0-1)^{2012}$.

2. Fie mulţimea de matrice $G=\left\{A=\begin{pmatrix}\hat{1}&a&b\\ \hat{0}&\hat{1}&c\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}/\,a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

(5p) a) Rezolvaţi ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{1}&\hat{2}\\ \hat{0}&\hat{1}&\hat{1}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0}\\ \hat{1}\\ \hat{2}\end{pmatrix}$; $x,y,z\in\mathbb{Z}_3$;

(5p) b) Arătaţi că $(G,\cdot)$ are o structură de grup abelian;

(5p) c) Aflaţi cardinalul mulţimii G.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^2(1+x)^n;\ n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f_n(x)-f(1)}{x-1}=12$;

(5p) b) Calculaţi $\sum f_2(x_k)$ unde x_k sunt punctele de extrem local ale funcţiei f_2;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2+.....+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n}{n\cdot2^n}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$.

(5p) a) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{f^2(x)}dx=\frac{\pi}{12}$;

(5p) b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$;

(5p) c) Aflaţi limita şirului $a_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+2kn+2n^2}$.

Varianta propusă 4

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că numărul $z=(1+i)^{2012}+(1-i)^{2012}$ este real.

(5p) 2.Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{2}x-1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este injectivă.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x-1}+x=7$.

(5p) 4. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ cu $a>0$, suma coeficienţilor binomiali ai termenilorde rang par este 128. Aflaţi termenul care conţine pe a^2.

(5p) 5. Determinaţi parametrul real m astfel încât punctul de intersecţie al dreptelor $d_1:2x-y+5=0,\ \ d_2:mx-y-2=0$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiurilor formate de axele de coordonate.

(5p) 6. Calculaţi $\sin 2\alpha$ ştiind că $3\sin\alpha+2\cos\alpha+3=0;\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul $\begin{cases}x+ay+2z=1\\ 2x+2y+z=-1\\ x+y-z=b\end{cases}$ unde $a,b\in\mathbb{C}$.

(5p) a) Determinaţi $a\in\mathbb{C}$ astfel încât matricea sistemului are rangul 2.

(5p) b) Aflaţi valorile parametrilor complecşi a şi b astfel încât sistemul este compatibil simplu nedeterminat

(5p) c) Pentru a=1, b=-2 aflaţi soluţia sistemului (α,β,γ) astfel încât α,β,γ să fie în progresie aritmetică.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2xy+3x+3y-3,(\forall)x,y\in\mathbb{Z}.$

(5p) a) Determinaţi elementul neutru e al legii de compoziţie;

(5p) b) Determinaţi $\mathrm{U}(\mathbb{Z})$, mulţimea elementelor simetrizabile în raport cu legea „$*$”;

(5p) c) Calculaţi $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{de\ 2012\ ori}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f_n:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

(5p) a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$;

(5p) b) Aflaţi imaginea funcţiei f_3;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}$.

2. Fie şirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x+a^2+2a+2}$,

$I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+2x+a^2+2a+2}$ $(\forall)n\geq 1$, unde $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(5p) a) Calculaţi I_0;

(5p) b) Demonstraţi că $I_{n+1}\leq I_n$ $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot I_n$.

Varianta propusă 5

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Arătaţi că dacă $z+\frac{1}{z}=2\sin\frac{\pi}{12}$ atunci $z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}=1$.

(5p) 2. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+2, & x\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{3x-1}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este surjectivă.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x=0$.

(5p) 4. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4 , dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată?

(5p) 5. Fie punctele $A(3,1)$ şi $B(1,-3)$. Aflaţi coordonatele unui punct C ştiind că triunghiul ABC are aria 3, iar centrul de greutate al triunghiului se află pe axa Ox.

(5p) 6. Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2\cos x\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-3$ este periodică şi aflaţi perioada principală.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M=\left\{A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} / a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$.

(5p) a) Demonstraţi că $(\forall)A,B\in M\Rightarrow A\cdot B\in M$;

(5p) b) Arătaţi că orice matrice $A\in M$ este inversabilă în M;

(5p) c) Pentru $a=3, b=2, c=1$ calculaţi $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul

$f=X^4+aX^2+aX+1\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4 şi

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4\\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4\\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4\end{vmatrix}.$$

(5p) a) Pentru $a=0$ descompuneţi polinomul *f* în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$;

(5p) b) Calculaţi Δ;

(5p) c) Arătaţi că dacă $a>0$ atunci *f* nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

(5p) a) Stabiliţi monotonia funcţiei *f* ;

(5p) b) Determinaţi punctul $\mathrm{M}(\alpha,\beta),\alpha\in\mathbb{N}^*$ situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $3x-16y=0$;

(5p) c) Calculaţi $f^{(n)}(x),n\in\mathbb{N}^*$, derivata de ordin *n* a funcţiei *f* .

2. Se consideră şirul de integrale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^n)dx$.

(5p) a) Calculaţi I_2 ;

(5p) b) Demonstraţi că $0\le I_n\le\frac{1}{2n+1}(\forall)n\in\mathbb{N}^*$;

(5p) c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Varianta propusă 6

Prof: Badea Ion

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Fie ecuaţia $z^2+2mz+m=0,\ m\in\mathbb{R}$. Dacă z_1,z_2 sunt soluţiile complexe ale ecuaţiei date, determinaţi valorile parametrului real *m* pentru care $|z_1|+|z_2|=1$.

(5p) 2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-6$ şi $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2-x-6$. Aflaţi valorile minime ale celor două funcţii.

(5p) 3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\log_2(x^2-3)>\log_2(x+3)$.

(5p) 4. Aflaţi numărul funcţiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ care nu sunt injective.

(5p) 5. Fie dreptele de ecuaţii $d_1: y=x+1$; $d_2: y=2x$ şi punctul $\mathrm{A}(0,\text{-}1)$. Aflaţi coordonatele punctelor $\mathrm{B}\in d_1$ şi $\mathrm{C}\in d_2$ astfel încât dreptele d_1 şi d_2 să fie mediane în triunghiul ABC.

(5p) 6. Calculaţi $S=\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)+\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $\mathrm{G_n}=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid X^n=A\}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

(5p) a) Demonstraţi că $X\cdot A=A\cdot X,\ (\forall)X\in\mathrm{G_n}$;

(5p) b) Aflaţi cardinalul mulţimii $\mathrm{G_n}, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$;

(5p) c) Demonstraţi că $(\forall)n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq 2$ şi $(\forall)X\in\mathrm{G_n}, Y\in\mathrm{G_m}\ (\exists)\,p\in\mathbb{N}, p\geq 2$ astfel încât $XY\in\mathrm{G_p}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^{2012}-X^{1003}+X+1\in\mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Aflaţi restul împărţirii lui f la $g=(X-1)^2$;

(5p) b) Calculaţi $\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{x_k}$ unde $x_k,\ k\in\{1,2,....,2012\}$ sunt rădăcinile polinomului f;

(5p) c) Arătaţi că polinomul $h=f-X$ este divizibil cu X^2-X+1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continuă pe $[0,\infty)$, derivabilă pe $(0,\infty)$, $f(0)=1$ şi $g(x)=e^{-x^2}$.

(5p) a) Stabiliţi intervalele de convexitate ale funcţiei g;

(5p) b) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}g^{(n)}(x)$, unde $g^{(n)}(x), n\in\mathbb{N}$ este derivata de ordin n a funcţiei g;

(5p) c) Ştiind că $|f(x)|\leq g(x)\ (\forall)x\geq 0$ arătaţi că există $c\in(0,\infty)$ astfel încât $f^{`}(c)=-2c\cdot e^{-c^2}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}$.

(5p) a) Calculaţi aria domeniului plan cuprins între graficul funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x\cdot f(x)$, axa absciselor şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$;

(5p) b) Aflaţi valoarea limitei $L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_0^{\cos x}f(t)dt}{\int_0^{\mathrm{ctg}x}f(t)dt}$

(5p) c) Dacă $h:[-1,0]\to\mathbb{R},\ \mathrm{h}(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$ arătaţi că $2\sqrt{e}\leq\int_{-1}^{0}h(x)dx\leq 1+e$.

Varianta propusă 7

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- .Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi a,b$\in R$ astfel încât să se verifice egalitatea de numere complexe $\left(\frac{2}{1-i}\right)^{10}$=a+bi.

(5p) 2. Determinaţi cel mai mic număr real m, astfel încât funcţia f: $R \to R$, f(x)=x^2+6x+12 să fie strict crescătoare pe intervalul [m;∞).

(5p) 3. Arătaţi că $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+....\frac{1}{5^{12}}<\frac{5}{4}$.

(5p) 4. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$,$x\neq 0$.Calculaţi rangul termenului dezvoltării binomului care îl conţine pe x^4.

(5p) 5. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii A=$\left\{\cos\frac{n\pi}{6} / n\in Z\right\}$.

(5p) 6. Dacă A(2;3),B(4 ;7) şi C(- 6 ;7) sunt coordonatele vârfurilor triunghiului ABC,calculaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}x+y+z+t=1\\ y+z+t=0\\ z+t=0\end{cases} ;\ (x,y,z,t)\in C\text{x}C\text{x}C\text{x}C.$$

(5p) a) Calculaţi rangul matricei sistemului.
(5p) b) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii.
(5p) c) Arătaţi că ecuaţia AX=I_3 , unde X$\in M_{4;3}(C)$ are o infinitate de soluţii ,iar ecuaţia YA= I_4 ,unde Y$\in M_{4;3}(C)$ nu are soluţie.

2. Se consideră polinoamele f=x^6+x^3+1 cu rădăcinile $x_1;x_2;...x_6$ si g=x^2+x+1 cu rădăcinile $y_1;y_2$.

(5p) a) Calculaţi câtul si restul imparţirii lui f la g.

(5p) b) Calculaţi sumele $S_1 =$ f(y_1)+f(y_2) şi $S_2 = g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_6)$.

(5p) c) Determinaţi numărul de rădăcini reale ale polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f :$(0 ;\infty) \to R$,f(x)=2$\sqrt{x}$ şi şirurile $(a_n)_{n\in N^*}$ şi $(b_n)_{n\in N^*}$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},\ b_n = a_n - f(n),\ \forall n \in N^*.$$

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f ' este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$.

(5p) b) Utilizând teorema lui Lagrange,arătaţi că, pentru orice k>0 există c$\in (k;k+1)$ astfel încât f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{\sqrt{c}}$.

(5p) c) Demonstraţi că şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Se consideră funcţiile f ;g **:** $(0;\infty) \to R$,definite prin f(x)=sinx şi g(x)=$\frac{1}{x}$.

(5p) a) Calculaţi $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(f^2(x) + g^2(x)\right)dx$

(5p) b) Calculaţi $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2011} x dx$ şi $\int_{-\pi}^{\pi} g^{(2012)}(x)dx$, unde g$^{(n)}(x), n \in N$,reprezintă derivata de ordin n a funcţiei g.

(5p) c) Arătaţi că $t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \forall t \in R$.

Varianta propusă 8

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Calculaţi modulul numărului complex $(2+i)^{10}$.

(5p) 2. Determinaţi produsul primelor zece zecimale ale numărului $\sqrt{50}$.

(5p) 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $4^{x^2}=2^{6x}$.

(5p) 4. Calculaţi numărul funcţiilor surjective $f:\{a;b;c\}\to\{1;2\}$ care au proprietatea f(a)=2.

(5p) 5. Determinaţi $\cos A$, dacă cosB=$\frac{1}{3}$ şi cosC=$\frac{1}{2}$,iar A,B,C sunt unghiurile unui triunghi ABC.

(5p) 6. Dacă A(1;2),B(3;1) şi C(2;3), calculaţi coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G(A)=\{X\in M_3(C)/AX=XA\}$.

(5p) a) Calculaţi A^3 şi A^{-1}.

(5p) b) Dacă X,Y$\in G(A)$,atunci $X\cdot Y\in G(A)$.

(5p) c) Rezolvaţi ecuaţia $X^2=I_3$ în mulţimea G(A).

2. Pe mulţimea numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+ix+iy-1-i$.

(5p) a) Arătaţi că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$; $\forall x,y,z\in C$.

(5p) b) Calculaţi $(-100i)\circ(-99i)\circ....\circ(-i)\circ 0\circ i\circ(2i)\circ...\circ(99i)\circ(100i)$.

(5p) c) Rezolvaţi în mulţimea C ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=1-i$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f : $R\to R$,f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).

(5p) a) Determinaţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei f(x)=0 şi ale ecuaţiei f '(x)=0.

(5p) b) Calculaţi numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f.

(5p) c) Determinaţi valoarea minimă a funcţiei f pe R.

2. Se consideră funcţiile $f_n : R \to R$,definite prin $f_0(x) = e^x$ şi $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n \in N$ şi $\forall x \in R$.

(5p) a) Calculaţi $f_1(x)$ şi $f_2(x)$, $x \in R$.

(5p)b)Utilizând metoda inducţiei matematice,arătaţi că: $f_{n+1}(x) = e^x - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!} - 1, \forall n \in N$ * şi $\forall x \in R$.

(5p) c) Arătaţi că $0 \le f_n(x) \le e^x \cdot \frac{x^n}{n!}, \forall n \in N$ şi calculaţi $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x > 0$.

Varianta propusă 9

Prof. Isofache Cătălina Anca,C.N.Al.I.Cuza Ploieşti

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Rezolvaţi in mulţimea numerelor reale ecuaţia $[x] = \frac{x+1}{3}$,unde [x] reprezintă partea întreagă a
lui x.

(5p) 2. Determinaţi valoarea maximă a funcţiei f: $R \to R$, f(x)= - x ^{2} +6x.

(5p) 3. Se consideră funcţia $f : Z \to Z$,f(x)=2x-1.Calculaţi suma S=f(1)+f(3)+...+f(2013).

(5p) 4. Calculaţi partea reală a numărului complex $\frac{1}{3+2i}$.

(5p) 5. Determinaţi numărul de soluţii ale ecuaţiei $\cos 2x - 3\sin x + 4 = 0$,ştiind că $x \in [0;\pi]$.

(5p) 6. Calculaţi $a \in R$ ştiind că vectorii $\vec{v_1} = (2+a)\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v_2} = 2\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ sunt coliniari.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$şi mulţimea $M_3(N)$.

(5p) a) Verificaţi dacă $A \in M_3(N)$ şi dacă $I_3 \in M_3(N)$.

(5p) b) Găsiţi o matrice $X \in M_3(N)$,astfel încât rangX=1 şi o matrice $Y \in M_3(N)$ cu proprietatea că rangY=2.

(5p) c) Arătaţi că dacă matricea $X \in M_3(N)$ şi $X^{-1} \in M_3(N)$,suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este egală cu 1.

2. Se consideră polinomul $f = X^n - 1 \in R[X], n \in N^*$ şi $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k = \overline{0; n-1}$.

(5p) a) Calculaţi f (x_k).

(5p) b) Demonstraţi că $\prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$

(5p) c) Arătaţi că $\prod_{k=1}^{n}(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}) = i^{n-1}$ şi că $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia f $:(0;\infty) \to R$,f(x)=lnx şi şirurile $(a_n)_{n\in N^*}$ şi $(b_n)_{n\in N^*}$, $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$,

$b_n = a_n - f(n), \forall n \in N^*$.

(5p) a) Demonstraţi că funcţia f ’ este strict descrescătoare pe $(0;\infty)$.

(5p) b) Utilizând teorema lui Lagrange arătaţi că,pentru orice k>0 există $c \in (k; k+1)$ astfel încât f(k+1)-f(k)=$\frac{1}{c}$.

(5p) c) Demostraţi că şirul $(b_n)_{n\in N^*}$ este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Se consideră funcţia f :[a;b]$\to$[a;b], $f(x) = \frac{x^2 + ab}{a+b}$,unde 0<a<b.

(5p) a) Calculaţi aria delimitată de reprezentarea grafică a funcţiei f,axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b.

(5p) b) Arătaţi că $\int_a^b f^{-1}(x)dx \geq \frac{b^2 - a^2}{2}$.

(5p) c) Arătaţi că,dacă a,b$\in Q$,atunci $\int_a^b f^{-1}(x)dx \in Q$.