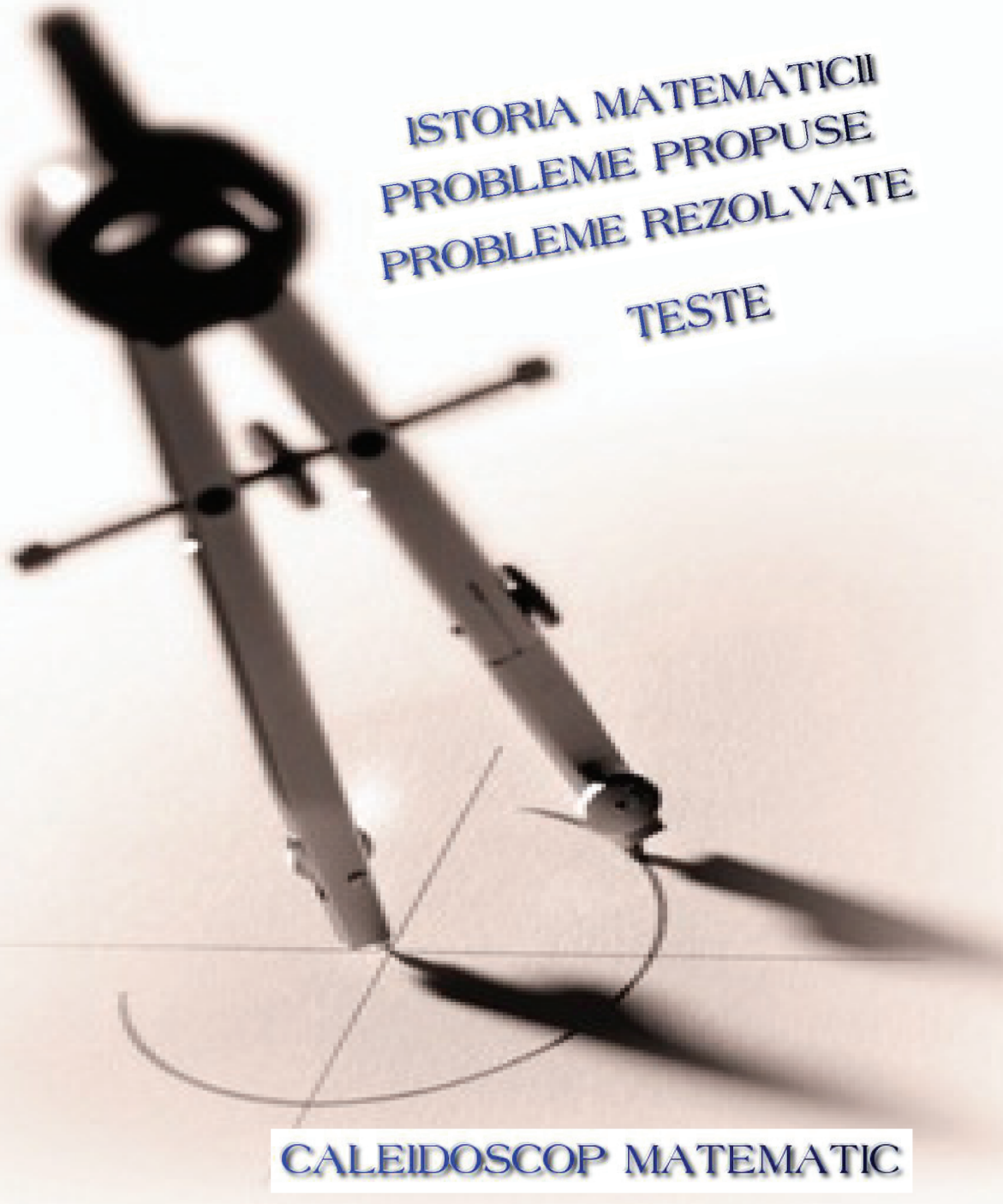
SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN VIII, NR XV, 2015

SM



ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

CALEIDOSCOP MATEMATIC

SM

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 15

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An VIII, Nr. XV, APRILIE 2015, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- **Membrii onorifici:**

Constantin Apostol – Președinte de onoare
Iorgu Mînzală – Inspector matematică, ISJ Buzău
Constantin Rusu – Președinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Costică Ambrinoc – Președinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Științe Matematice
Lenuța Pîrlog – Președinte Filiala Buzău a Societății de Științe Matematice
D. M . Bătinețu – Giurgiu **Titu Zvonaru**
Nicolae Ivăşchescu **Mihály Bencze**

- **Director:**
  Neculai Stanciu

- **Redactor şef:**
  Adrian Stan

- **Redactori principali:**
  Nicoleta Gabriela Lupşan **Constantin Dinu**
  Andrei Octavian Dobre **Iuliana Traşcă**
  Gabriel Tica **Ion Stănescu** **Lăcrimioara Năstase**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1
ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 3
PROBLEME REZOLVATE..... 16
PROBLEME PROPUSE 38
QUICKIES 45
CALEIDOSCOP MATEMATIC 48
POŞTA REDACTIEI..... 51

GÂNDEŞTE CORECT

- **Membri :**

Alexandru **Elena-Marcela,** Maria **Anton,** Jose Luis Diaz – **Barrero,** Liviu **Bordianu,** Nicoleta **Bran,** Dana **Camelia,** Elena **Ciobîcă,** Constantin **Ciobîcă,** Ovidiu **Cioponea,** Ana **Cismaru,** Nicoleta **Clinciu,** Ciprian **Cheşcă,** Marcel **Chiriță,** Aurel **Chiriță,** Nela **Ciceu,** Eliza **Chile,** Ileana **Didu,** Camelia **Dana,** Marian **Cucoaneş,** Gheorghe **Dârstaru,** Viorica **Dogaru,** Marius **Drăgan,** Alexia **Drăgan**,Otilia **Drăgan**, Jamel **Ghanouchi,** Gheorghe **Ghiță,** Dorina **Goiceanu,** Cornelia **Gurău,** Martin **Hriňák**, Laura **Ilie**, Ionuț **Ivănescu,** Vasile **Jiglău,** Nencu **Karina,** Cornelia Mihaela **Luca,** Ion **Lupşan,** Cristian Cosmin **Lupşan,** Mirela **Lupşan,** Nicuşor Octavian **Lupşan,** Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Gabriela **Marinescu,** Mariana **Mărculescu,** Mariana **Mitea,** Ion **Nedelcu,** Delia **Naidin**, Andrei Florin **Nicolaescu**, Ana **Panaitescu,** Stelian **Piscan,** Valerica **Pometescu,** Claudia **Popa,** Florentina **Popescu**, Petre **Păunescu,** Ramona **Puchiu,** Ion **Radu,** Teodora **Rădulescu,** Viorel **Rotărescu**, Viorica **Rotărescu**, Dumitru **Săvulescu,** Roxana **Stanciu**, Babis **Stergiou**, Liviu **Smarandache,** Horațiu **Stoian,** Andrei **Spătaru,** Florin **Stănescu**, Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Gabriela **Stoienescu,** Daniela **Ticea,** Roxana-Violeta **Toader,** Ionel **Tudor,** Lucian **Tuțescu,** Ovidiu **Țâțan,** Marioara **Vrabie,** Daniel **Văcaru,** Sorina **Văcărean**

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu”,
Buzău, Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
E_mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect: Adrian Stan

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

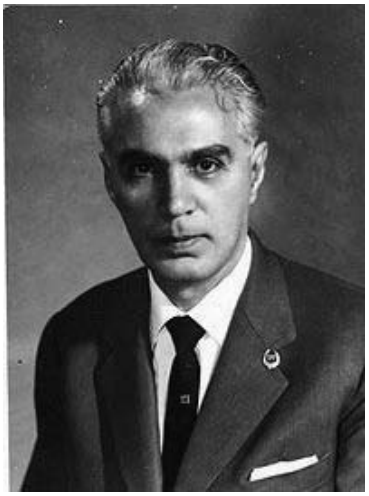
” Timpul este cel mai bun profesor. Din păcate, el îşi omoară toţi elevii”.
Hector Berlioz

1. Istoria Matematicii

MIRON NICOLESCU

- o scurtă evocare –
(la 40 de ani de la trecerea sa în nefiinţă)

de D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu



Nu credem că despre profesorul ***Miron Nicolescu*** a scris (până în prezent) cineva mai frumos şi mai documentat decât profesorul doctor docent, academician, *Solomon Marcus*. De aceea, pentru a nu diminua din modul de prezentare a vieţii şi activităţii acestui preşedinte de Academie - care îşi amintea cu plăcere despre reprezentativitatea uniformei liceului *Matei Basarab*, ne vom mulţumi să reproducem unele fragmente din articolele *’’Academician profesor Miron Nicolescu* 1903-1975’’ şi *’’Analiza epsilon şi analiza aproape peste tot (la cinci ani de la pierderea academicianului Miron Nicolescu’’* scrise în Gazeta Matematică de profesorul *Solomon Marcus*.

Nu a fost profesorul vostru, ci a fost profesorul profesorilor voştri. Despre opera sa ştiinţifică vom spune doar că este unul din cei mai mari creatori români în domeniul Analizei matematice, numele său fiind legat indisolubil de un capitol important al acestui domeniu *Teoria funcţiilor poliarmonice*. Ne vom opri însă ceva mai mult asupra drumului pe care l-a urmat în viaţă şi asupra modului în care a devenit unul din marii şefi de şcoală ai ştiinţei româneşti.

S-a născut la 27 august 1903, în oraşul Giurgiu, unde a urmat clasele primare (tatăl său era învăţător). Când era în clasa a 3-a primară, învăţătorul i-a dictat, odată, o problemă la tablă dar nici nu sfârşise bine enunţul problemei şi aceasta era rezolvată. De atunci, până la sfârşitul celor patru clase primare, a rămas, pentru învăţătorul său, ’’micul inginer’’. Dar el nu avea să devină inginer, ci un mare dascăl şi un mare învăţat. În vacanţa mare, după clasa a 3-a, a găsit în biblioteca tatălui său o culegere de probleme pentru examenul de absolvire a patru clase primare. Aceasta a fost cartea sa de căpătâi în tot timpul vacanţei, alături de basmele lui *Ispirescu* şi de ’’*Cuore*’’ a lui *Edmondo de Amicis.* Ca elev al liceului *’’Matei Basarab’’* din Bucureşti, marea revelaţie a constituit-o, pentru elevul *Nicolescu Miron*, descoperirea geometriei, cu raţionamentele sale impecabile, de structură axiomatic-deductivă.

Însă, cu toată pasiunea sa pentru geometrie (în fiecare clasă cunoştea deja manualele clasei următoare), simţea tot timpul nevoia unei culture multilaterale. Era foarte atras de fizică, îşi înjghebase un mic laborator de chimie, a rămas toată viaţa pasionat de limbă şi literatură. Acurateţea în exprimare îi era organică iar sensibilitatea pentru poezie nu mai puţin. Activitatea matematică a elevului ***Nicolescu Miron*** alterna cu lectura marilor noştri sciitori (*Eminescu*, *Creangă*, *Alecsandri*, *Slavici*, *Caragiale*, iar mai târziu *Sadoveanu*, *Arghezi*, *Blaga*). Avea o deosebită atracţie pentru limba latină, la aceasta contribuind foarte mult excepţionalul profesor pe care l-a avut la această disciplină. A stat mult în cumpănă dacă să urmeze secţia reală sau cea modernă; a ales-o pe prima, dar, după cum singur mărturisea, a păstra totdeauna regretul de a nu fi putut aprofunda fenomenul lingvistic.

La îndemnul profesorului său de matematică, s-a abonat la *Gazeta Matematică*. Iată ce spune în această privinţă: *’’Primul contact cu această revistă nu a fost uşor. Mi se părea că nu voi înţelege niciodată nimic. Gheaţa s-a spart numai atunci când am văzut că pot rezolva şi eu o problemă din cele propuse de alţii.*

A urmat apoi un moment pe care nu-l voi uita niciodată: momentul în care mi-am văzut o notă matematică, tipărită în revistă. A urmat apoi un articol, apoi alte articole. Drumul fusese trasat. De la început am ştiut că nu voi putea urca mai sus în cercetarea adevărurilor matematice decât muncind necontenit''.
Muncind necontenit, a trăit elevul de atunci până la sfârşitul vieţii sale, la 30 iunie 1975.

În 1924 îşi trece licenţa în matematici la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti. În perioada 1925-1928 este elev al Şcolii Superioare de la Paris; în 1926 devine licenţiat în ştiinţe al Sorbonei iar la 5 mai 1928 susţine, la aceeaşi instituţie, teza de doctorat cu titlul *''Fonctions complexes dans le plan et dans l' espace''*.

În 1928 îşi începe cariera didactică, în calitate de conferenţiar de Analiză matematică la Universitatea din Cernăuţi. În 1933 devine profesor de Geometrie analitică şi superioară la aceeaşi universitate. Format la şcoala unor străluciţi profesori ca *David Emmanuel, Gheorghe Ţiţeica* şi *Dimitrie Pompeiu*, la Bucureşti, *Emile Picard* şi *Paul Montel* la Paris, *Miron Nicolescu* trece, în 1940, la Bucureşti unde ca urmare a pensionării profesorului *Anton Davidoglu*, este chemat să ocupe postul de profesor de Analiză matematică la facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Bucureşti. Aici realizează, într-un răstimp de câţiva ani, o adevărată revoluţie în domeniul predării analizei matematice. Spiritul exclusiv algoritmic, lipsit de rigoare, dominator până atunci, este înlocuit cu o fundare teoretic ansamblistă, care permite introducerea punctelor de vedere din teoria modernă a funcţiilor reale, disciplină introdusă, în învăţământul nostru universitar, de către profesorul *Miron Nicolescu*.

După reforma învăţământului din 1948, odată cu înfiinţarea catedrei de calcul diferenţial şi integral, profesorul *Miron Nicolescu* devine şeful acestei catedre. În 1936, Academia de Ştiinţe din România îl alege membru corespondent. În 1948, este ales din nou membru corespondent iar în 1955 devine membru titular al Academiei. În 1963, Prezidiul Academiei îl numeşte director al Institutului de Matematică al Academiei, post care rămăsese vacant în aprilie 1961, prin moartea academicianului *Simion Stoilow*. În 1966, academicianul *Miron Nicolescu* devine preşedinte al Academiei Române, funcţie pe care a păstrat-o până la moarte.
Academicianul *Miron Nicolescu* a fost de asemenea onorat cu alegerea ca membru al mai multor academii şi societăţi ştiinţifice de peste hotare iar la ultimul Congres Internaţional al Matematicienilor, de la Vancouver (Canada), a fost ales în înalta funcţie de vicepreşedinte al Uniunii Internaţionale a Matematicienilor.

Activitatea de profesor a academicianului *Miron Nicolescu* s-a caracterizat de la început printr-o ţinută ştiinţifică şi pedagogică exemplară, care se păstrează vie în memoria celor ce i-au fost studenţi. Cursurile sale au constituit o cotitură în predarea analizei matematice la Universitatea din Bucureşti. Lecţiile sale constituiau pentru noi o adevărată descoperire; descopeream că o oră de curs nu trebuie să fie o copie a cursului tipărit, ci un mijloc specific de comunicare între profesor şi studenţi, în care se dezvăluie partea vie, am putea spune umană, a ştiinţei, mai descopeream cum pe nesimţite, o oră de predare a matematicii devine şi o oră de educaţie a gândirii şi a inimii. Manualele sale de Analiză şi, în special, tratatul în trei volume, publicat în jurul anilor 1960, au contribuit esenţial la formarea ştiinţifică a tinerilor noştri matematicieni. Acest tratat îl conduce pe cititor pînă la stadiul actual al problemelor expuse, constituind astfel un mijloc de iniţiere în munca de cercetare în domeniul Analizei matematice.

Prin activitatea desfăşurată în ultimile trei decenii de viaţă şi, în special, prin contactul direct, natural şi omenesc, de fiecare zi şi, cu tinerii matematicieni, atât în cei 25 de ani de conducere a Catedrei de Analiză Matematică a Universităţii cât şi în cei 10 ani de conducere a Institutului de Matematică al Academiei, academicianul *Miron Nicolescu* a devenit unul dintre marii şefi de şcoală ai ştiinţei româneşti.
Prezent mereu în arena socială; echilibrat şi constant în relaţiile umane; cu o aură de blândeţe şi cu un calm generator de bună dispoziţie, care dădeau oricărui interlocutor curajul de a se destăinui; radiind bunătatea, căldura, generozitatea şi seninătatea pe care numai oamenii cu conştiinţa împăcată a rectitudinii lor în viaţă le pot avea; ferm ori de câte ori era necesar; lipsit de discontinuităţile şi capriciile care înoureză contactele dintre oameni, profesorul *Miron Nicolescu* găsea o adevărată satisfacţie în posibilitatea de a-şi ajuta colaboratorii. *''Până la proba contrarie, pentru mine orice om este bun şi îi accord încredere''*, spunea de multe ori.
''De la toţi am învăţat'' – mărturisea undeva academicianul *Miron Nicolescu*. *''Mă surprind uneori vorbind olimpian ca Pompei, apăsat ca Ţiţeica, senin şi simplu ca David Emmanuel. Căci noi nu suntem numai fii părinţilor noştri, ci şi fii profesorilor noştri''*.

Prin profesorul *Miron Nicolescu* şi prin elevii săi, o tradiţie glorioasă a ştiinţei şi învăţământului românesc este transmisă noilor generaţii; să le ajutăm pe acestea ca ele să onoreze cum se cuvine această tradiţie, dezvoltând-o şi depăşind-o pe măsura marilor exigenţe ale prezentului.

„ Gândirea constituie măreția omului. ”
Pascal

2. Articole si note matematice

Trei inegalități din Gazeta Matematică nr. 5/2014

de Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi Nela Ciceu, Bacău

În această notă dorim să prezentăm soluții, altele decât cele din nr. 11/2014, pentru trei probleme propuse în nr. 5/2014.

E:14666. *Se consideră numerele reale pozitive* a,b,c *şi* d *astfel încât* $a+b+c+d=4$.

Arătați că $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$.

Vasile Scurtu

Soluție. Aplicând inegalitatea lui *Bergström*, obținem

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{3(a+b+c+d)}=\frac{4}{3}.$$

26917. *Fie numerele reale strict pozitive* a,b,c *cu* $a+b+c=1$. *Să se arate că*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{3}{2(ab+bc+ca)}.$$

Brojbeanu Andi Gabriel

Soluție. Obținem succesiv

$$\frac{3}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=$$

$$=\sum_{ciclic}\left(\frac{3a}{2(ab+bc+ca)}-\frac{1}{b+c}\right)=\sum_{ciclic}\frac{ab+ac-2bc}{2(ab+bc+ca)(b+c)}=\sum_{ciclic}\frac{c(a-b)+b(a-c)}{2(ab+bc+ca)(b+c)}=$$

$$=\sum_{ciclic}\frac{c(a-b)}{2(ab+bc+ca)(b+c)}+\sum_{ciclic}\frac{c(b-a)}{2(ab+bc+ca)(c+a)}=\sum_{ciclic}\frac{c(a-b)(c+a-b-c)}{2(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\sum_{ciclic}\frac{c(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)}\geq 0.$$ Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{3}$. Deoarece $a+b+c=1$, putem scrie $\frac{1}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$, din care se obține şi

$$\frac{3}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{3}{2}\sum_{ciclic}\frac{a(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}.$$

26919. *Să se arate că în orice triunghi* ABC *avem* $36S^2\leq(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)$. *C. Rusu*

Soluție. Din $16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$, inegalitatea din enunț se scrie succesiv

$$18a^2b^2+18b^2c^2+18c^2a^2-9a^4-9b^4-9c^4\leq 16a^4-8b^4-8c^4+8a^2b^2+8a^2c^2+20b^2c^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25a^4-10a^2(b^2+c^2)+b^4+c^4+2b^2c^2\geq 0\Leftrightarrow\left(5a^2-(b^2+c^2)\right)^2\geq 0$$, adevărat.

Avem egalitate dacă şi numai dacă $5a^2=b^2+c^2$ (adică dacă medianele din B şi C sunt perpendiculare).

Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul " formulei de integrare prin părți" II

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Lucrarea continuă materialul publicat în numărul trecut privind metode de calcul al primitevelor utilizând integrarea prin părți.

În cadrul modelului II) avem câteva tipuri de integrale:

a) $\int P(x)\cdot a^{x}dx,\quad x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$ **b)** $\int P(x)\cdot a^{bx}dx\quad ,x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1, b\in\mathbb{R}^{*}$

c) $\int u'(x)\cdot h(x)\cdot a^{u(x)}dx\quad ,h(x)=u(x)+w, w\in\mathbb{R}; x\in D_u\cap D_u'; a>0, a\neq 1$

u(x) – funcție derivabilă cu derivata continuă

d) $\int P(x)\cdot\left(a^{q_1x}+a^{q_2x}+...+a^{q_nx}\right)dx\ , x\in R; a>0; a\neq 1;\ q_i\in R^{*}; i=\overline{1,n}$

unde $P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+s_1\cdot x+s_0\ , s_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}, s_n\neq 0, x\in\mathbb{R}$

Exemple: Să se calculeze integralele:

a) $\int x^2\cdot 7^{rx}dx,\ x\in\mathbb{R}; r\in\mathbb{R}^{*}.$

Rezolvare: $f'(x)=7^{rx}\Rightarrow f(x)=\int 7^{rx}dx=\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}.$

$g(x)=x^2\Rightarrow g'(x)=2x$, şi aplicăm formula de integrare prin părți.

$I=x^2\cdot\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}-\frac{2}{r\cdot\ln 7}\cdot\int x\cdot 7^{rx}dx=$ (*) Pentru integrala $\int x\cdot 7^{rx}dx$, aplicăm din nou integrarae prin părți: $f'(x)=7^{rx}\Rightarrow f(x)=\int 7^{rx}dx=\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}\quad ,g(x)=x\Rightarrow g'(x)=1.$

(*) $I=x^2\cdot\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}-\frac{2}{r\cdot\ln 7}\cdot\int x\cdot 7^{rx}dx=x^2\cdot\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}-\frac{2}{r\cdot\ln 7}\cdot\left(x\cdot\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}-\frac{1}{r\ln 7}\cdot\int 7^{rx}dx\right)$

$I=x^2\cdot\frac{7^{rx}}{r\cdot\ln 7}-\frac{2}{r^2\cdot\ln^2 7}\cdot x\cdot 7^{rx}+\frac{2}{r^3\cdot\ln^3 7}\cdot 7^{rx}+c$

b) $\int\left(e^x+1\right)\cdot\left(e^x+x\right)\cdot 2^{e^x+x}dx\ , x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $f'(x)=\left(e^x+1\right)\cdot 2^{e^x+x}\Rightarrow f(x)=\int\left(e^x+1\right)\cdot 2^{e^x+x}dx=\int\left(e^x+x\right)'\cdot 2^{e^x+x}dx=$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\left(2^{e^x+x}\right)'dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{e^x+x}.$

$g(x)=e^x+x\Rightarrow g'(x)=e^x+1$. Aplicăm formula de integrare prin părți:

$I=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(e^x+x\right)\cdot 2^{e^x+x}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\left(e^x+1\right)\cdot 2^{e^x+x}dx$ (1).

Dar $\int\left(e^x+1\right)\cdot 2^{e^x+x}dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\int\left(2^{e^x+x}\right)'dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{e^x+x}$. Înlocuind în (1), obținem :

$I=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(e^x+x\right)\cdot 2^{e^x+x}-\frac{1}{\ln^2 2}\cdot 2^{e^x+x}+c$

c) $\int(\cos 2x)\cdot 3^{\sin x+\cos x}dx\ , x\in\mathbb{R}.$

Rezolvare: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$

$I=\int(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)\cdot 3^{\sin x+\cos x}dx=$

$f'(x)=(\cos x-\sin x)\cdot 3^{\sin x+\cos x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\ln 3}\cdot\int\left(3^{\sin x+\cos x}\right)'dx=\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\sin x+\cos x}$

$g(x)=\cos x+\sin x\Rightarrow g'(x)=(\cos x+\sin x)'$. Aplicăm formula de integrare prin părți:

$I=(\cos x+\sin x)\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\sin x+\cos x}-\frac{1}{\ln 3}\cdot\int(\cos x+\sin x)'\cdot 3^{\sin x+\cos x}dx$

$=(\cos x+\sin x)\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\sin x+\cos x}-\frac{1}{\ln^2 3}\cdot\int\left(3^{\sin x+\cos x}\right)'dx=$

$=(\cos x+\sin x)\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{\sin x+\cos x}-\frac{1}{\ln^2 3}\cdot 3^{\sin x+\cos x}+c$

d) $\int\left[q'(x)\cdot h(x)+q(x)\cdot h'(x)\right]\cdot q(x)\cdot h(x)\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}dx;\ a>0,a\neq 1$, iar funcțiile $q,h:D\to\mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivatele continue $x\in D_u\cap D'_u$.

Rezolvare:

$f'(x)=[q'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)]\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}\Rightarrow f(x)=\int\left[q'(x)\cdot h(x)+q(x)\cdot h'(x)\right]\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}dx=$

$=\int\left[q(x)\cdot h(x)\right]'\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}dx=\frac{1}{\ln a}\int\left[a^{q(x)\cdot h(x)}\right]'dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}$

$g(x)=q(x)\cdot h(x)\Rightarrow g'(x)=\left[g(x)\cdot h(x)\right]'$. Aplicăm formula de integrare prin părți:

$I=\frac{1}{\ln a}\cdot q(x)\cdot h(x)\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}-\frac{1}{\ln a}\cdot\int\left[q(x)\cdot h(x)\right]'\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}dx=$

$=\frac{1}{\ln a}\cdot q(x)\cdot h(x)\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot\int\left[a^{q(x)\cdot h(x)}\right]'dx==\frac{1}{\ln a}\cdot q(x)\cdot h(x)\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot a^{q(x)\cdot h(x)}+c$.

e) $\int P(x)\cdot P'(x)\cdot a^{P(x)}dx$, $x\in R,a>0,a\neq 1$, unde

$P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+s_1\cdot x+s_0$, $s_i\in\mathbb{R},i=\overline{0,n},s_n\neq 0,x\in\mathbb{R}$

Rezolvare: $f'(x)=P'(x)\cdot a^{P(x)}\Rightarrow f(x)=\int P'(x)\cdot a^{P(x)}dx=\frac{1}{\ln a}\int\left(a^{P(x)}\right)'dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{P(x)}$

$g(x)=P(x)\Rightarrow g'(x)=P'(x)$. Aplicăm (f.i.p.):

$I=\frac{1}{\ln a}\cdot P(x)\cdot a^{P(x)}-\frac{1}{\ln a}\cdot\int P'(x)\cdot a^{P(x)}dx=\frac{1}{\ln a}\cdot P(x)\cdot a^{P(x)}-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot\int\left(a^{P(x)}\right)'dx=$

$=\frac{1}{\ln a}\cdot P(x)\cdot a^{P(x)}-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot a^{P(x)}+c$

f) $\int P(x)\cdot P'(x)\cdot a^{Q(x)}dx$, $a>0,a\neq 1;Q(x)=P(x)+d,d\in\mathbb{R};x\in\mathbb{R}$ unde:

$P(x)=s_n\cdot x^n+s_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+s_1\cdot x+s_0$, $s_i\in\mathbb{R},i=\overline{0,n},s_n\neq 0,x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: $f'(x)=P'(x)\cdot a^{Q(x)}=\left(P(x)+d\right)'\cdot a^{Q(x)}=Q'(x)\cdot a^{Q(x)}=\frac{1}{\ln a}\cdot\left[a^{Q(x)}\right]'\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\int\left[a^{Q(x)}\right]'dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{Q(x)}$, $g(x)=P(x)\Rightarrow g'(x)=P'(x)$. Aplicăm (f.i.p.):

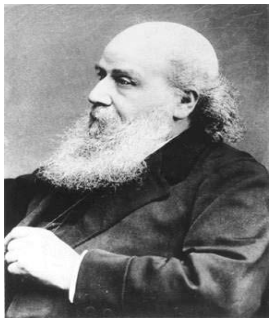
$I=\frac{a^{P(x)+d}}{\ln a}\cdot P(x)-\frac{1}{\ln a}\cdot\int P'(x)\cdot a^{P(x)+d}dx=\frac{a^{P(x)+d}}{\ln a}\cdot P(x)-\frac{1}{\ln a}\cdot\int\left[P(x)+d\right]'\cdot a^{P(x)+d}dx=$

$=\frac{a^{P(x)+d}}{\ln a}\cdot P(x)-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot\int\left[a^{P(x)+d}\right]'dx=\frac{a^{P(x)+d}}{\ln a}\cdot P(x)-\frac{1}{\ln^2 a}\cdot a^{P(x)+d}+c$

Profesori, Colegiul Vasile Lovinescu, Fălticeni

Aplicații practice ale matricelor

de prof. Adrian Stan,Buzău



Termenul de matrice a fost introdus de matematicianul englez **James Joseph Sylvester(1814 - 1897)** în lucrarea „ On a New Class of Theorems" publicată în 1850. Tot el introduce şi noțiunea de rang şi signatură.

Conceptul de matrice este unul utilizat în multe domenii printre care, economie, fizică, biologie, criptologie etc. Pentru a înțelege acest concept este util să-l identificăm în câteva aplicații practice:

1. Două unități comerciale U_1, U_2, produc trei tipuri de produse P_1, P_2, P_3 numărul acestora fiind exprimat în tabelul 1 în mii de unități iar corespunzător fiecărui produs i se asociază conform tabelului 2 suma investită şi venitul net obținut, calculate per 1000 de unități de produs şi exprimate în milioane lei. .

Să se determine suma totală investită şi venitul net realizat din producerea tuturor celor trei tipuri de produse.

	P_1	P_2	P_3
U_1	3	4	5
U_2	2	5	6

Tabel 1.

	INVESTITII	VENIT NET
P_1	5	8
P_2	6	9
P_3	3	4

Tabel 2.

Rezolvare: Să observăm că datele din cele două tabele pot fi reprezentate sub forma $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ respectiv $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ pe care le vom numi matrice. Suma investită şi venitul net realizat se obțin înmulțind cele două matrice asociate tabelelor 1 şi 2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 80 \\ 58 & 85 \end{pmatrix}$. Prima coloană reprezintă investițiile în milioane lei făcute de fiecare unitate comercială pentru producția sa totală iar a doua reprezintă venitul net obținut corespunzător producției sale.

Aşadar la o investiție de 51 de milioane prima unitate obține un venit de 80 de milioane iar cea de a doua, la o investiție de 58 de milioane obține un venit de 85 de milioane.

2. O plantă bienală devine matură la un an după ce sămânța sa este pusă în pământ. În anul următor, planta produce semințe care vor deveni plante în al treilea an. După doi ani, plantele bienale mor. Presupunem că un teren conține 3000 de plante bienale, dintre care 1400 sunt în primul an, iar 1600 sunt în al doilea om.

Presupunem că 80% dintre plantele din anul întâi supraviețuiesc în anul al doilea şi de asemenea, fiecare 100 plante din anul doi produc 150 plante de un an. În aceste condiții să se deterrmine numărul de plante de un an şi de doi ani, după patru ani, respectiv, n ani.

Rezolvare: Se vor pune datele problemei în următoarea matrice: $N_0 = (1400 \quad 1600) = (14 \quad 16) \cdot 10^2$.

Atunci, matricea de trecere de la un an la altul este $T = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 1,5 & 0 \end{pmatrix}$ sau, după ce înmulțim şi împărțim cu 10

se obține

$T=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 15 & 0\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10}$. Distribuția plantelor după un an este $N_1=N_0\bullet T$, după doi ani este $N_2=N_1\bullet T=N_0\bullet T^2$.

După patru ani, distribuția plantelor este $N_4=N_3\bullet T=...=N_0\bullet T^4$.

După n ani distribuția plantelor va fi $N_n=N_{n-1}\bullet T=...=N_0\bullet T^n$.

Mai departe se calculează T^4. Astfel, $T^2=T\bullet T=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 15 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0 & 8\\ 15 & 0\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^2}=\begin{pmatrix}120 & \\ & 120\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^2}$,

$T^4=T^2\bullet T^2=\begin{pmatrix}120 & 0\\ 0 & 120\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}120 & 0\\ 0 & 120\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^4}=\begin{pmatrix}14400 & 0\\ 0 & 14400\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^4}$. Aşadar,

$N_4=N_0\bullet T^4=\begin{pmatrix}14 & 16\end{pmatrix}\bullet 10^2\bullet\begin{pmatrix}14400 & 0\\ 0 & 14400\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^4}=\begin{pmatrix}201600 & 230400\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{10^2}=\begin{pmatrix}2016 & 2304\end{pmatrix}$.

Aceasta înseamnă că după patru ani vom avea 2016 plante de un an şi 2304 plante de doi ani.

3. Un patron are într-un parc de distracție un carusel, un ring cu maşinuțe electrice şi un spațiu cu maşini de carting. La sfârşitul săptămânii el înregistrează următoarele câştiguri în euro.

	Vineri	*Sâmbătă*	*Duminica*
carusel	500	1200	1000
mașinute	750	1400	1200
carting	400	950	800

Primăria solicită o taxă de 2% din câştigurile patronului pentru fiecare joc pe care îl are.
Care este suma pe care o prognozează că trebuie să o plătească pentru fiecare zi şi tip de joc şi de asemenea, cât are de plătit într-o lună în care jocurile sale funcționează 3 zile de vineri, 4 zile de sâmbătă şi 3 zile de duminică ?

Rezolvare: Vom nota cu A matricea câştigurilor pentru fiecare zi şi pentru fiecare tip de joc în parte.

$A=\begin{pmatrix}500 & 1200 & 1000\\ 750 & 1400 & 1200\\ 400 & 950 & 800\end{pmatrix}$. Pentru a calcula taxa de 2% din câştigurile sale, se va înmulți A cu 2%.

Astfel, $T=A\bullet 2\%=\begin{pmatrix}500 & 1200 & 1000\\ 750 & 1400 & 1200\\ 400 & 950 & 800\end{pmatrix}\bullet 0,02=\begin{pmatrix}10 & 24 & 20\\ 15 & 28 & 24\\ 8 & 19 & 16\end{pmatrix}$. S-a înmulțit 0,02 cu fiecare element al matricei.

Pentru a determina cât e taxa pentru fiecare joc în 3 zile de vineri, 4 zile de sîmbătă şi 3 zile de duminică, se va înmulți matricea T cu matricea coloană $B=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$. Astfel, se obține matricea coloană a taxelor

$T^I=A\bullet B=\begin{pmatrix}10 & 24 & 20\\ 15 & 28 & 24\\ 8 & 19 & 16\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}186\\ 214\\ 148\end{pmatrix}$, ceea ce semnifică faptul că patronul are de plătit taxă de 186 de euro pentru carusel, 214 de euro pentru maşinuțe şi 148 de euro pentru carting, toate acestea pentru un număr de 3 zile de vineri şi duminică şi 4 zile de sâmbătă.

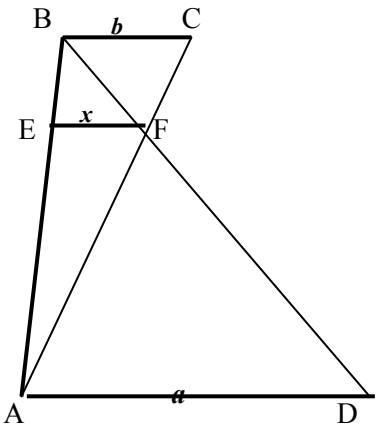
Bibliografie: Colecția de manuale de matematică pentru clasa a XI-a.

Prof. Liceul Tehnologic ” C.Nenitescu” Buzău

Asupra unei clase de probleme

Mariana Mitea,Cugir

În manualul de geometrie se găseşte această problemă , cu ajutorul căreia se pot rezolva apoi o întreagă clasă de probleme, care au fost rezolvate, prin alte metode de către autorii lor.



„ *Prin capetele A şi B,ale unui segment AB şi printr-un punct E situat pe AB, se duc paralele BC, EF, AD, astfel încât AC∩BD={F}. Arătaţi că are loc relaţia* $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{y}$. (cu alte cuvinte are loc relaţia

$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}$, pe care o notăm relaţia (P).

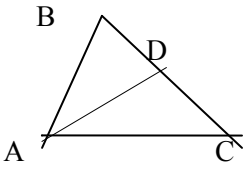
Soluţie: Din ΔEFB~ΔADB rezultă $\frac{EB}{AB}=\frac{EF}{AD}$, iar din ΔEFA~ΔBCA

rezultă $\frac{EA}{AB}=\frac{EF}{BC}$, iar din adunarea acestor două egalităţi rezultă cerinţa.

P.1. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu m($\widehat{BAC}$)=60^0 şi AD bisectoarea unghiului A (D∈BC). Demonstraţi că $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$.

Soluţie:

Ducem BM∥AD∥CN ,unde M∈(CA, N∈(BA şi atunci conform relaţiei (P) avem $\frac{1}{AD}=\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}$. (1)

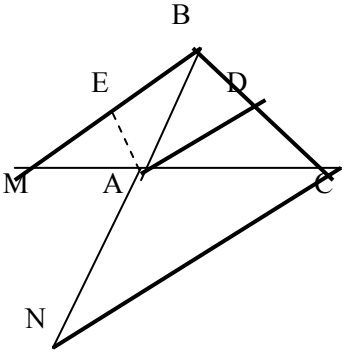


AD fiind bisectoarea unghiului A, rezultă m($\widehat{BAD}$) m($\widehat{DAC}$)=30^0

Însă m($\widehat{DAD}$) = m($\widehat{ADM}$) = 30^0 (ca unghiuri alterne interne),

iar m($\widehat{DAC}$)= m($\widehat{AMB}$) =30^0 (ca unghiuri corespondente) şi prin

urmare ΔBAM este isoscel, cu AB≡AM. Fie AE⊥BM şi prin urmare AE este înălţime, mediană etc. în ΔBAM.



Din ΔAME, avem $\cos\widehat{AME}=\cos 30^0=\frac{ME}{MA}=\frac{MB}{2AB}$ şi cum

$\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{MB}{2AB}$, de unde $MB=AB\sqrt{3}$. Analog

găsim $CN=AC\sqrt{3}$. Înlocuind în relaţia (1), valorile lui BM ,

respectiv CN şi obţinem: $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB\sqrt{3}}+\frac{1}{AC\sqrt{3}}$, iar dacă înmulţim

această egalitate cu $\sqrt{3}$, rezultă

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{AD}$.

P.2. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctul D∈BC, ducem DE∥AB (E∈AC) , respectiv DF∥AC, (F∈AB). Dacă BE∩DF={G} şi DE∩CF={H}, demonstraţi că $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}=\frac{1}{GH}$.

Soluție:

Din DF ∥ AC şi BG secanta lor comună avem $\frac{FG}{GD}=\frac{AE}{EC}$ (teorema segmentelor proporționale) . Dar $\frac{AE}{EC}=\frac{FH}{HC}$ (T.Thales) şi atunci $\frac{FG}{GD}=\frac{FH}{HC}$ de unde prin

R.T.T. avem GH ∥ BC.

Ducem ME ∥ BC , M∈DF, dar DF ∥ AC şi atunci DMEC este paralelogram, de unde ME ≡ DC.

Din BD ∥ GH ∥ ME conform relației (P) obținem $\frac{1}{BD}+\frac{1}{ME}=\frac{1}{GH}$ şi cum ME ≡ DC, rezultă egalitatea căutată,

adică $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}=\frac{1}{GH}$.

P.3. Fie un triunghi AOC cu m($\widehat{AOC}$)=90^0 şi B∈AC, astfel încât m($\widehat{AOB}$)=30^0. Să se arate că $OA\cdot\left(\frac{2}{OB}-\frac{1}{OC}\right)=\sqrt{3}$.

Soluție:

Relația de demonstrat este echivalentă cu $\frac{1}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot OA}+\frac{1}{2\cdot OC}$. (1) Ducem AM ∥ OB ∥ CN, unde M∈CO, N∈AO. Avem $\widehat{MAO}\equiv\widehat{AOB}=30^0$ (unghiuri alterne interne), de unde $\cos\widehat{MAO}=\cos30^0=\frac{AO}{AM}$ de aici $\frac{1}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2\cdot OA}$ (2). $\widehat{BOC}\equiv\widehat{OCN}=60^0$ (unghiuri alterne interne) şi de aici $\cos\widehat{OCN}=\cos60^0=\frac{OC}{CN}$, de unde $\frac{1}{CN}=\frac{\cos60^0}{OC}=\frac{1}{2\cdot OC}$ (3).

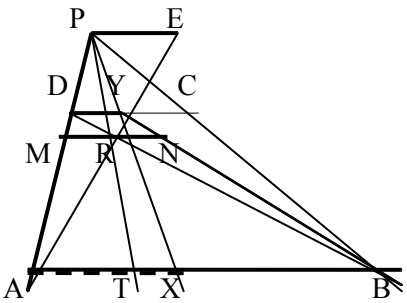
Din AM ∥ OB ∥ CN conform relației (P) obținem $\frac{1}{OB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{CN}$ şi folosind relațiile (2) şi (3) găsim relația (1), ce trebuia demonstrată.

P.4. Fie ABCD un trapez cu AB ∥ CD, iar X un punct pe baza AB. Fie BC∩AD={P}, CD∩PX={Y}, AY∩BD={R} şi PR∩AB={T}. Arătați că $\frac{1}{AT}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{AB}$. (Crux matematichorum 1995).

Soluție:

În trapezul ABYD, prin punctul R de intersecție al diagonalelor BD şi AY, ducem paralela MN ∥ AB ∥ DY; conform lui **P.2.** avem MR≡RN.

Din DY ∥ MN ∥ AB conform relației (P) avem $\frac{1}{RN}=\frac{1}{DY}+\frac{1}{AB}$ (1)



şi

$\frac{1}{MR}=\frac{1}{AT}+\frac{1}{PE}$ (2) , unde PE ∥ MR ∥ AT, E∈AR.

Dar $\frac{1}{DY}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{PE}$ unde AX ∥ DY ∥ PE (3).

Din $\frac{1}{MR}=\frac{1}{RN}$ rezultă conform relațiilor (1) şi (2) că $\frac{1}{AT}+\frac{1}{PE}=\frac{1}{DY}+\frac{1}{AB}$ şi folosind relația (3),

rezultă $\frac{1}{AT}+\frac{1}{PE}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{PE}+\frac{1}{AB}$, de unde $\frac{1}{AT}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{AB}$.

Bibliografie:

1. Colecția Gazetei Matematice;
2. Crux matematichorum 1995.

Prof. , Scoala Gimnazială nr.2, Cugir, Alba

Problema celor douăsprezece monezi

Piț-Rada Marica, Piț-Rada Ionel-Vasile,
Drobeta Turnu - Severin

Enunț: ***Se dau douăsprezece monezi care privite par identice. Una dintre ele este însă contrafăcută (falsă). Toate monezile originale au aceeaşi greutate, în timp ce moneda falsă este mai grea sau mai uşoară decât o monedă originală.***

Din trei cântăriri cu o balanță cu două brațe, negradată, trebuie să se determine moneda falsă şi tipul diferenței acesteia față de o monedă originală, adică dacă moneda este mai uşoară sau mai grea.

Vom rezolva în continuare problema ca un caz particular al unei forme mai generale, în care trebuie determinată moneda falsă şi tipul ei (uşoară sau grea) din cel mult n cântăriri cu balanța negradată, în condițiile în care cunoaştem inițial mulțimile disjuncte de monezi X, LE, GE, E cu semnificațiile următoare:

- X este mulțimea monezilor despre care nu cunoaştem informații despre greutate,
- LE este mulțimea monezilor despre care ştim că au greutatea mai mică sau egală cu cele originale,
- GE este mulțimea monezilor despre care ştim că au greutatea mai mare sau egală cu cele originale,
- E este mulțimea monezilor despre care ştim că sunt originale.

Deoarece după fiecare cântărire se va face o reactualizare şi o reetichetare a monezilor în fiecare dintre mulțimile X, LE, GE şi E, observăm că este suficient să se cunoască doar numărul de elemente ale acestor mulțimi notate prin |X|, |LE|, |GE| şi |E|. În continuare vom nota cu **n≥1** numărul de cântăriri disponibile şi cu **f(n)** numărul $\frac{(3^{n-1}-1)}{2}$. Definim problemele următoare:

P1(n) : |X|=3·f(n), |LE|=0, |GE|=0 şi |E|≥0 .
P2(n) : |X|=3·f(n)+1, |LE|=0, |GE|=0 şi |E|≥1 .
P3(n) : |X|=0, |LE|=3·f(n)+1, |GE|=3·f(n)+2 şi |E|≥0 .
P4(n) : |X|=0, |LE|=3·f(n)+2, |GE|=3·f(n)+1 şi |E|≥0 .
P5(n) : |X|=0, |LE|=3·f(n)+1, |GE|=3·f(n)+1 şi |E|≥1 .

Problemele P2(n) şi P5(n) sunt definite cu ipoteza că mulțimea E este nevidă, adică avem la dispoziție cel puțin o monedă despre care ştim că este originală. Rezultatul unei cântăriri poate fi s<d sau s=d sau s>d, unde prin s şi respectiv d am notat suma greutăților monezilor aşezate pe talerul stâng respectiv pe talerul drept. Fiecare problemă se rezolvă prin specificarea modului cum sunt distribuite monezile pentru cântărire pe cele două talere. Modul cum au fost aşezate monezile pe cele două platane reprezintă ideea de rezolvare. La fiecare cântărire va rezulta din problemele P1(n), P2(n), P3(n), P4(n), P5(n), în funcție de starea balanței , una dintre problemele P2(n-1), P3(n-1), P4(n-1) sau P5(n-1). Este util de observat că are loc relația f(n)=3·f(n-1)+1. Rezolvările celor cinci probleme rezultă din tabelul următor:

Problema	Taler stâng	Taler drept	Rezultat cântărire	Problema rezultată
P1(n)	f(n) monede din X	f(n) monede din X	s<d	P5(n-1)
			s=d	P2(n-1)
			s>d	P5(n-1)
P2(n)	O monedă din E şi f(n) monede din X	f(n)+1 monede din X	s<d	P3(n-1)
			s=d	P2(n-1)
			s>d	P4(n-1)
P3(n)	f(n) monede din LE şi f(n)+1 monede din GE	f(n) monede din LE şi f(n)+1 monede din GE	s<d	P3(n-1)
			s=d	P4(n-1)
			s>d	P3(n-1)
P4(n)	f(n) monede din GE şi f(n)+1 monede din LE	f(n) monede din GE şi f(n)+1 monede din LE	s<d	P4(n-1)
			s=d	P3(n-1)
			s>d	P4(n-1)
P5(n)	O monedă din E , f(n) monede din GE şi f(n) monede din LE	f(n) monede din GE şi f(n)+1 monede din LE	s<d	P5(n-1)
			s=d	P3(n-1)
			s>d	P4(n-1)

Problema P(1) este definită pentru 0 monede şi nefiind nimic de cântărit, atunci 1 cântărire este evident suficientă. Problemele P2(1), P3(1), P4(1), P5(1) sunt uşor de rezolvat şi sunt lăsate în seama cititorului. Concluzia celor scrise până acum este că sunt suficiente n cântăriri pentru rezolvarea oricăreia dintre problemele P1(n), P2(n), P3(n), P4(n), P5(n).

Enunțul inițial este echivalent cu problema P1(3) în care avem de găsit moneda falsă şi tipul diferenței ei dintre 3·f(3)=12 monezi. Rezolvarea problemei P1(3) conduce la rezolvarea uneia din problemele P2(2) sau P5(2), iar rezolvarea acestora implică rezolvarea uneia dintre problemele P2(1), P3(1), P4(1) sau P5(1).

A refinement of Cesaro's inequality

Mihàly Bencze, Braşov, Romania

Abstract. In this paper we present a new refinement for Cesaro's inequality and some applications of this result.

Theorem. If $f_\lambda(x,y)=\left(xy^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+\left(x^{\lambda-1}y\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, when $\lambda\geq 1$ and $a_k>0$, $k=1,2,...,n$, then

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_n+a_1)\geq f_\lambda(a_1,a_2)\cdot f_\lambda(a_2,a_3)\cdot ...\cdot f_\lambda(a_n,a_1)\geq 2^n\prod_{k=1}^{n}a_k\ .$$

Proof. Using the weighted AM-GM inequality we obtain

$f_\lambda(x,y)=\left(xy^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+\left(x^{\lambda-1}y\right)^{\frac{1}{\lambda}}\leq\frac{x+(\lambda-1)y}{\lambda}+\frac{(\lambda-1)x+y}{\lambda}=x+y$, and so we get

$$\prod f_\lambda(a_1,a_2)\leq\prod(a_1+a_2)\ .$$

But $f_\lambda(x,y)=\left(xy^{\lambda-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}+\left(x^{\lambda-1}y\right)^{\frac{1}{\lambda}}\geq 2\left(xy^{\lambda-1}x^{\lambda-1}y\right)^{\frac{1}{2\lambda}}=2\sqrt{xy}$, then

$$\prod f_\lambda(a_1,a_2)\geq\prod 2\sqrt{a_1a_2}=2^n\prod_{k=1}^{n}a_k\ .$$

Applications.

In all triangle ABC holds

1. $2s(s^2+r^2+2Rr)\geq\prod f_\lambda(a,b)\geq 32sRr$.

2. $4sRr\geq\prod f_\lambda(s-a,s-b)\geq 8sr^2$, which offer a new refinement for Euler's inequality, i.e. $R\geq 2r$.

3. $4s^2R\geq\prod f_\lambda(r_a,r_b)\geq 8s^2r$, which also offer a new refinement for $R\geq 2r$.

4. $\dfrac{(2R-r)(s^2+r^2-8Rr)-2Rr^2}{32R^3}\geq\prod f_\lambda\left(\sin^2\dfrac{A}{2},\sin^2\dfrac{B}{2}\right)\geq\dfrac{r^2}{2R^2}$.

5. $\dfrac{(4R+r)^3+s^2(2R+r)-2Rr^2}{32R^3}\geq\prod f_\lambda\left(\cos^2\dfrac{A}{2},\cos^2\dfrac{B}{2}\right)\geq\dfrac{s^2}{2R^2}$.

Reference

[1] Octogon Mathematical Magazine (1993-2014).

" Prin spațiu, universul mă cuprinde şi mă înghite ca pe un punct; prin gândire îl cuprind eu. "

Pascal

„ Sârguința nu ne ajunge, din păcate trebuie ceva mai mult, o idee”.
W. Blasch

3. Examene şi concursuri

Concursul Judetean de Matematica ” Sclipirea Mintii” - 29.11.2014

CLASA a V - a

SUBIECTUL I (30p)

1. Aflați produsul cifrelor numărului $\overline{MINTE}$, dacă
$\overline{MINTE} + \overline{MINT} + \overline{MIN} + \overline{MI} + M = 20378$. **Dârstaru Gheorghe**

SUBIECTUL II (30p)

1. Calculați suma cifrelor numărului $A = 4^{1006} \cdot 5^{2014} + 75$.

2. Mai mulți prieteni participă la un joc. Regula este următoarea: primul trimite în prima zi câte un e-mail la doi prieteni. Cei doi, a doua zi, trimit fiecare la rândul lor câte un e-mail la alți doi prieteni diferiți. A treia zi, cei patru trimit fiecare câte un e-mail la alți doi prieteni, jocul continuând în acest fel.

Să se afle câte e-mailuri s-au trimis după zece zile. **Adrian Stan**

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie n un număr natural nenul. Arătați că 3^{6n+4} se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte şi 3^{6n+3} se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu**

CLASA a VI - a

SUBIECTUL I (30p)

1. Calculați suma cifrelor celui mai mic număr natural divizibil cu 36 care se scrie doar cu cifre de 7 şi de 0.
Dârstaru Gheorghe

SUBIECTUL II (30p)

1. Să se demonstreze că fracția $\frac{2n+3}{3n+4}$ este ireductibila pentru orice $n \in N$. **Marius Stan**

2. Determinați toate numerele naturale n astfel încât numărul $\frac{1+2+...+n}{2}$ să fie prim.

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\sphericalangle XOY$. În semiplanul determinat de *OX* în care nu se află *OY* se construiesc semidreptele *[OA* şi *[OB* astfel încât $m(\sphericalangle XOA) = 90^0$, iar unghiurile $\sphericalangle BOX$ şi $\sphericalangle XOY$ sunt adiacente complementare. Fie *[OM* bisectoarea $\sphericalangle BOX$.

a) Dacă $m(\sphericalangle AOM)$ este cu 15° mai mare decât $m(\sphericalangle XOY)$ să se calculeze $m(\sphericalangle XOY)$

b) Dacă *[OB* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$ atunci *[OX* este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOY$.

Egizia Mocanu

2. În triunghiul ABC se cunoaşte că $m(\hat{A}) = 60^0$ şi că lungimea laturii $[AC]$ este dublul lungimii laturii $[AB]$. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic. **Adrian Stan**

CLASA a VII - a

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați valorile lui x $\in (1, \infty)$ astfel încât numărul $\sqrt{x^2 + 3x - 2}$ să fie rațional.

Dârstaru Gheorghe

2. Să se stabilească dacă există numerele întregi a şi b pentru care să existe egalitatea

$(a-b)(a+b)=3b+2.$ **Florin Stănescu**

SUBIECTUL II (30p)

1. Să se verifice dacă există numerele întregi a, b, c, astfel încât să avem relația $a^{2014}\left(b^{2015}+c^{2015}\right)+b^{2014}\left(c^{2015}+a^{2015}\right)+c^{2014}\left(a^{2015}+b^{2015}\right)=2015^{2014^{2014}}$? **Florin Stănescu**

2. Dacă x, y şi z sunt numere reale nenule astfel încât $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=1$, atunci calculați $(xyz)^n$, $n\in N^*$

Neculai Stanciu

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie ABCD un paralelogram, E simetricul lui C față de D, F simetricul lui D față de A şi G intersecția dreptelor AB şi FC. Dacă aria triunghiului FGB este 12,5 cm^2, calculați raportul dintre ariile patrulaterelor BDEF şi BCDF. **Dârstaru Gheorghe**

CLASA a VIII - a

SUBIECTUL I (30p)

1. a) Fie numerele $a=\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}$ $b=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}$, calculați media aritmetică a numerelor a si b.

b) Fie numerele $a=\left(\frac{10}{\sqrt{11}-1}-\sqrt{11}\right)^{2014}$ $b=\left(\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{3}}+5\sqrt{2}\right)^2$, calculați media geometrică a numerelor a si b . **Iuliana Traşcă**

2. Arătați că numerele $a=(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^{2^2}+1)\cdot....\cdot(2^{2^{2014}}+1)$ şi $b=4^{2^{2014}}$ sunt consecutive.

Florin Stănescu

SUBIECTUL II (30p)

1. Dacă $x,y,$ şi z sunt numere reale care verifică relațiile $x=\sqrt{1-2yz}$, $y=\sqrt{2-2zx}$, $z=\sqrt{1-2xy}$, atunci aflați $x+y+z$. **D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu**

2. a) Să se demonstreze că $\left(\sqrt{1+2013\bullet2015}-\sqrt{1+2012\bullet2014}\right)^{2014}=1$;

b) Să se calculeze numărul $A=\sqrt{1+2010\cdot\sqrt{1+2011\cdot\sqrt{1+2012\cdot\sqrt{1+2013\cdot2015}}}}$. **Adrian Stan**

SUBIECTUL III (30p)

1. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC având cateta AB = 12 cm şi ipotenuza BC = $6\sqrt{13}$ cm , se ridică perpendiculara BM = 10 cm . Calculați :

a) Distanța de la M la AC ;

b) Distanța de la M la centrul de greutate al triunghiului . **Simion Marin**

CLASA a IX - a

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze mediile aritmetică şigeometrică a numerelor $a=(\sqrt{2}+1)^{-1}+\left|2\sqrt{2}-3\right|$ şi $b=\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

2. Să se arate că numărul $A=(1-\sqrt{2})^{2014}\bullet\frac{1}{(3-2\sqrt{2})^{1007}}\in\mathbb{N}$. **Adrian Stan**

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră intervalul $I_n=\left[\frac{7n+1}{n};\frac{9n-1}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât să existe I_n. b) Să se determine $I_n\cap\mathbb{N}$. **Adrian Stan**

SUBIECTUL III (30p)

1. Să se calculeze expresia $E(x)=\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2+8x+16}$ pentru $x\langle-4$.

2. Dacă $|3x+4y| \le 4$ și $|-x-0,5y| \le 3$ arătați că $|x+y| \le 2$. **Gheorghe Dârstaru**

CLASA a X - a

SUBIECTUL I (30p)

1. Dacă $\log_2 5 = a$ şi $\log_2 3 = b$. Aflați în funcție de a şi b, $\log_{45} 120$.

2. Să se arate că $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$; **Constantin Dinu**

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numărul $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$. Să se arate că $A \in \mathbb{N}$.

2. Să se compare numerele $A = 10^{1-\lg 2}$; $B = 25^{\frac{1}{2}\cdot\log_5 \frac{1}{9}}$; $C = 3^{\frac{1}{\log_{16} 81}}$. **Adrian Stan**

SUBIECTUL III (30p)

1. Să se demonstreze că $\ln tg15^0 + \ln tg35^0 + \ln tg55^0 + \ln tg75^0 = 0$. **Adrian Stan**

CLASA a XI - a

SUBIECTUL I (30p)

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{arctg(2x^2-3x+1)}{\arcsin(-x^2-4x+5)}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-4(x-1)-1}{(x-1)^2}$; **Constantin Dinu**

SUBIECTUL II (30p)

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x^2+2x+5}}{\ln(x^2+8x-3)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8\sqrt{x}}}{\sqrt{x+4\sqrt[3]{x}}}$; **Adrian Stan**

SUBIECTUL III (30p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ X(a) \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X(a) = \begin{pmatrix} 3a+1 & 6a \\ -a & 1-2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $X(a) = I_2 + a \cdot A$ şi că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; 15p

b) Să se determine numărul real **t** din relația $X(1)\bullet X(2)\bullet X(3)\bullet.....\bullet X(2013)\bullet X(2014) = X(t-1)$.

Adrian Stan

CLASA a XII - a

SUBIECTUL I (30p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ X(a) \,\middle|\, X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & 3a \\ -2a & 1-2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor;

b) Să se calculeze $X(-10)\bullet X(-9)\bullet.....X(-1)\bullet X(0)\bullet X(1)\bullet.....\bullet X(9)\bullet X(10)$. **Adrian Stan**

SUBIECTUL II (30p)

Fie $f : \mathbb{R} - \{2014\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-2014x-1}{x-2014}$. Să se demonstreze că orice primitivă a lui f este convexă pe $\mathbb{R} - \{2014\}$.

Adrian Stan

SUBIECTUL III (30p)

Să se calculeze integralele: a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin^2 x \bullet \cos^2 x} dx$; b) $\int_1^e \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \ dx$. **Adrian Stan**

Rezultate

Clasa a V-a: Premiul I. Cristea Adina, Şcoala Sfântul Apostol Andrei Buzău, **Premiul II.** Coman Andreea, Şcoala Sfântul Apostol Andrei Buzău; **Premiul III**. Ivan Robert, Şcoala "G. E. Palade" Buzau; **Menţiune**. Bugheciu Ştefan, Scoala "N.Titulescu" Buzau.

Clasa a VI-a: Premiul I. Hoacă Adina, Lic. Teh. Sf. Mc. Sava, Berca; **Premiul II**. Van George, Scoala Gimnaziala "General Gr. Bastan". **Premiul III.** Serban Stefania, Lic. Teh. Sf. Mc. Sava, Berca; **Menţiune**. Birtu Rares, Nicolaie Iulia, Scoala "G. E. Palade" Buzau.

Clasa aVI-a: Premiul I. Apostol Mădălina, Şcoala Sfântul Apostol Andrei Buzău; **Premiul II.** Haralambescu Bianca, Şcoala Sfântul Apostol Andrei Buzău; **Premiul III**. Ionaşcu Bianca, Liceul Tehnologic "D. Filipescu". **Menţiune**. Zotescu Andreea, Şcoala Sfântul Apostol Andrei Buzău.

Clasa a VI-a: Premiul I. Baltag Cosmin, Liceul Tehnologic "D. Filipescu"; **Premiul II.** Vasile Rucsandra, Scoala "G. E. Palade" Buzau; **Premiul III**. Ciocan Cristian, Scoala "G. E. Palade" Buzau; **Menţiune**. Pascu Bogdan, Scoala "N. Titulescu' Buzau, Zota Madalina, Bordei Valentina, Scoala "G. E. Palade" Buzau.

Clasa a IX-a: **Premiul I.** Tarca Catalina, Colegiul Economic . **Premiul II**. Vasile Andreea, Pavelescu Denisa, Colegiul Economic. **Menţiune**. Grigore Daniel, Popa Andreea, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu.

Clasa a X-a: Premiul I. Dinu Cristiana, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu; **Premiul II**. Iacob Catalin, Colegiul Economic; **Premiul III.** Avram Denisa, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu, Ciuparu Silviu, Liceul Tehnologic "D. Filipescu".

Clasa a XI-a: Premiul I. Dodan Marius, Colegiul Economic, Marin Valentina, LiceulTehnologic Costin Nenitescu; **Premiul II.** Zavoianu Corina, Colegiul Economic, **Premiul III.** Buceanu Loredana, Liceul Tehnologic "D. Filipescu"; Ilie Ştefania, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu; **Menţiune**. Crăciun Dragoş, Moise Alexandra, Rusu Alexandru, Liceul Tehnologic Costin Nenițescu.

Clasa a XII-a: Premiul I. Pirnog Georgiana, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu; **Premiul II**. Nicu Alexandra, Pascu Iuliana, Liceul Tehn. Costin Nenitescu; **Premiul III**. Matei Iulian, Liceul Tehnologic "D. Filipescu"; **Menţiune**. Stoian Cristina, Liceul Tehn. Costin Nenitescu, Patache Diana, Dumitrache Ionut, Liceul Tehnologic "D. Filipescu".

Au participat profesorii:

1. Prof. Dinu Constantin, Colegiul Economic Buzău,
2. Prof. Stanciu Neculai, Scoala George Emil Palade, Buzău,;
3. Prof. Mocanu Egizia, Scoala Gimnazială General Gr. Bastan,
4. Prof. Brutaru Laura, Liceul Tehnologic Dimitrie Filipescu;
5. Prof. Porojnicu Aurora , Liceul Tehnologic Sf. Mc. Sava, Berca,;
6. Prof. Dârstaru Gheorghe , Scoala Gimnazială Sf. Apostol Andrei;
7. Prof. Marius Stan , Scoala Gimnazială Nicolae Titulescu Buzău, şi
8. Prof. Adrian Stan şi Prof. Popescu Florentina, Liceul Tehnologic Costin Nenitescu, Buzău,

Paradoxul regelui

Un rege a dat un ordin de a se construi un nou palat dar să se folosească la realizarea lui materialele din vechiul palat regal, acesta din urmă trebuind să rămână în folosința lui şi a curții până la terminarea celui nou. Cum s-a procedat?

Răspuns.

Nu se poate începe construcția noului palat căci nu se poate dărâma cel vechi unde trebuie să stea regele până ar trebui să fie gata cel nou. Aşadar, este un paradox.

„ A-ți cunoaşte neştiința este partea cea mai bună a cunoaşterii ."
Confucius

4. Probleme rezolvate

▪ Învățământ primar

P:313. Să se afle patru numere pare consecutive ştiind că dacă le adunăm cu dublul sumei lor obținem 108. **Anton Maria**,Berca
Rezolvare: Dacă numerele sunt a, a+2, a+4, a+6 atunci a + a + 2 + a + 4 + a + 6 =4a+12
şi 4a+12+ 2(4a+12)=108 rezultă 12a + 36 = 108. Se obține a =6.

P:314. Mama are de 4 ori mai mulți ani decât fiica, iar tata are cu 5 ani mai puțini decât fiica şi mama la un loc. Câți ani are fiecare, dacă împreună au 85 de ani? **Ilie Laura**, Buzău
Rezolvare: Fie " a" vârsta mamei," b" vârsta tatălui şi " c" vârsta fiicei. Atunci, a +b + c = 85, şi cum a=4c, b=(a+c) – 5b=(4c+c)-5b= 5c – 5 şi 4c+5c – 5+c=85 se obține c = 9 ani, a= 36 ani, b=40 ani.

P:315. Corina are de citit o carte. Dacă ar citi câte 8 pagini pe zi, ar termina-o într-un anumit număr de zile. Ea citeşte însă câte 10 pagini pe zi şi o termină cu trei zile mai devreme.
Câte pagini are cartea citită de Corina? **Lupşan Cristian-Cosmin**,Buzău
Rezolvare: Fie " a " numărul de zile în care Corina ar citi câte 8 pagini. 8 x a = 10 x (a – 3), rezultă a=15 atunci, numărul de pagini este 120.

P:316. Să se calculeze peste câți ani, tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor, ştiind că, în prezent, tatăl are 31 de ani, iar copii au 8 ani, 6 ani, respectiv 1 an. **Lupşan Ion**, Berca
Rezolvare: 31 + a = 8 + a + 6 + a + 1 +a de unde rezultă 31 + a = 15 + 3a adică a=8.
Aşadar, peste 8 ani tatăl va avea vârsta egală cu suma vârstelor copiilor.

P:317. La ora de educație fizică elevii unei clase s-au aşezat în ordinea înălțimii. Bogdan este unul dintre primii 4, iar Daria este una dintre ultimii 3. Între cei doi sunt 22 de elevi. Din câți elevi poate fi format şirul? Câte soluții are problema? **Lupşan Mirela** , Buzău
Rezolvare: Avem situațiile: 1+22+1= 24 , 1+22+2= 25 , 1+22+3= 26, 2+22+1=25 , 2+22+2=26, 2+22+3=27, 3+22+1=26, 3+22+2=27, 3+22+3=28, 4+22+1=27 , 4+22+2=28, 4+22+3=29.
Răspuns: 24, 25, 26, 27, 28, 29.

P:318. Câtul a două numere este 4, iar restul 1. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obține câtul 1 şi restul 4. Aflați numerele. **Lupşan Nicoleta-Gabriela**, Berca
Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest se obține a = 4 x b + 1, (a + b) : (a – b) = 1 rest 4 ,
a + b = a – b + 4, b + b = a – a + 4 de unde b = 2 iar a = 9.

P:319. Într-o sală de spectacole, pe fiecare rând numărul locurilor este cu 2 mai mare decât pe rândul precedent. Pe ultimul rând, al zecelea, sunt 67 de locuri. Câte locuri are sala?
Lupşan Nicuşor Octavian, Buzău
Rezolvare*:* 67+65+63+61+59+57+55+53+51+49 = 580.

P:320. La o fermă sunt 860 de porci. Hrana lor este pregătită pentru 110 zile.Fermierul se gândeşte să reducă numărul porcilor la jumătate plus 10. Pentru câte zile ar ajunge hrana?
Marinescu Gabriela, Stănceşti , Vadu Paşii
Rezolvare: Dacă ar fi un singur porc,hrana ar ajunge pentru: 110x860 = 94600(zile).
Dacă rămân 860 : 2 + 10(porci),hrana ar ajunge pentru:94600 : 440 = 215(zile).

P:321. Să se reconstituie înmulțirea: CARx CAR unde produsul este un număr de forma $\overline{XXXCAR}$.
Nencu Karina,Buzău

Rezolvare: Dacă R = 5, atunci vom afla prin încercări că A = 2 şi C = 6 625 x 625 = 390 625
Dacă R = 6, atunci A = 7 şi C = 3 376 x 376 = 141 376

P:322. Pe trei rafturi sunt 434 de cărți. Pe primul şi pe al doilea raft sunt 356 de cărți, iar pe al treilea cu 49 de cărți mai puține decât pe primul. Câte cărți sunt pe fiecare raft? Rotărescu Viorel, Vadu Paşii
Rezolvare: 434-356=78 (cărți pe al treilea raft), 78+49=127 (cărți pe primul raft)**,**
356-127=229 (cărți pe al doilea raft).

P:323. Două autoturisme pleacă unul spre celălalt din două oraşe diferite, întâlnindu-se după 3 ore de mers, la 15 km depărtare de jumătatea distanței dintre cele două oraşe. Cu ce viteză a mers fiecare autoturism, dacă distanța dintre cele două oraşe este de 360 km? ***Rotărescu Viorica,****Vadu Paşii*
Rezolvare*:* 360 : 2 = 180 (km)- jumătatea distanței dintre oraşe, 180 + 15 = 195 (km)- distanța parcursă de autoturismul cu viteză mai mare, 360 – 195 = 165 (km)- distanța parcursă de autoturismul cu viteză mai mică
Atunci, 195 :3 =65(km /h) - viteza primului autoturism, 165 : 3 = 55(km/ h)- viteza celui de-al doilea.

P:324. Bianca, mama şi tatăl au suma vârstelor egală cu cel mai mare număr natural de două cifre. Tatăl are încincitul vârstei fiicei, iar mama este cu 12 ani mai tânără decât tatăl.
Câți ani avea mama la naşterea Biancăi? **Ticea Daniela**,Buzău
Rezolvare: Notăm cu a vârsta fiicei. Problema se va scrie: 5a + a + 5a – 12 = 98, 11 a=98 + 12,
11a= 110a=110:11 a=10. Vârsta tatălui va fi: 10 X 5 = 50 (ani), Vârsta mamei: 50 – 12 = 38 (ani).
Mama avea la naşterea fiicei: 38 – 10 = 28 (ani).

P:325. Maşina A produce 2004 piese în 2 minute. Maşina B produce 2004 piese de acelaşi fel în 3 minute. Câte piese produc împreună cele două maşini în 6 minute? Dar în 5 minute?
Toader Roxana- Violeta, Buzău
Rezolvare: Maşina A produce într-un minut:2004 : 2 = 1002 piese. Maşina B produce într-un minut:2004 : 3 = 668 piese. Amândouă maşinile produc într-un minut:1002 +668 = 1670 piese. În 6 minute, cele două maşini vor produce:1670 x 6 = 10020 piese. În 5 minute, cele două maşini vor produce:1670 x 5 = 8350 piese

P:326. Câtul a două numere este 5, iar restul este 3. Dacă adunăm deîmpărțitul cu împărțitorul, cu câtul şi cu restul, obținem 35. Care sunt numerele? **Vrabie Marioara**, Berca
Rezolvare: Conform teoremei împărțirii cu rest, D = Î x C + r, avem D = Î x 5 + 3 şi cum
D + Î + C + r = 35 , iar C = 5 şi r = 3 rezultă Î x 5 + 3 + Î = 27 adică Î = 4 iar D = 23.

▪ Clasa a V-a

G:462. Determinați numărul natural care admite patru divizori, ştiind că produsul divizorilor săi este 3845521. **Mircea Mario Stoica**, Arad
Rezolvare: Notăm cu n numărul natural şi cu d_1, d_2, d_3, d_4 divizorii lui n. Atunci,
$d_1 = 1,\ d_4 = n \Rightarrow d_1 \bullet d_4 = d_2 \bullet d_3 = n \Rightarrow d_1 \bullet d_2 \bullet d_3 \bullet d_4 = n^2$. Cum $d_1 \bullet d_2 \bullet d_3 \bullet d_4 = 3845521 \Rightarrow$
$n^2 = 3845521 \Rightarrow n = 1961$.

G:463. a) Arătați că există o infinitate de numere naturale, care împărțite la 7, dau restul 5 şi, împărțite la 6, dau restul 4.
b) Ce rest dau aceste numere, dacă le împărțim la 42 ?
Constantin Apostol, Rm. Sărat
Rezolvare : a) Fie, n un număr natural cu proprietatea dată în problemă, adică $n = 7 \cdot c_1 + 5$ şi $n = 6 \cdot c_2 + 4$, unde am notat cu c_1 şi c_2, câturile celor două împărțiri. Rezultă, $6 \cdot c_2 = 7 \cdot c_1 + 1$, sau

$c_2 = c_1 + \frac{c_1+1}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow c_1 \in \{5;11;17;23;.....\}$,adică, $c_1 = 5+6\cdot k_1$, unde $k_1 \in \mathbb{N}$ iar $c_2 \in \{6,13,20,27,\cdots\}$, adică, $c_2 = 6+7\cdot k_2$, unde $k_2 \in \mathbb{N}$. Având o infinitate de valori pentru c_1 şi c_2, se va obține o infinitate de valori şi pentru n, şi anume: $n = 7\cdot(5+6\cdot k_1)+5 = 40+42\cdot k_1$, unde, $k_1 \in \mathbb{N}$ sau

$$n = 6\cdot(6+7\cdot k_2)+4 = 40+42\cdot k_2, \text{ unde, } k_2 \in \mathbb{N}$$

b) Impărțind numărul n la 42, obținem :

$n = 42\cdot c + r$, unde $r < 42 \Leftrightarrow 40+42\cdot k_1 = 42\cdot c + r \Leftrightarrow 42\cdot c - 42\cdot k_1 = 40 - r$,

deci, $42 \mid 40-r \Leftrightarrow 40-r=0 \Leftrightarrow r = 40$.

G:464. Verificați dacă există numerele naturale $\overline{aa}$ şi $\overline{abc}$, astfel încât, $\overline{aa}^{a} = \overline{abc}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Cum $33^3 = 1089\bullet 33 \rangle \overline{abc}$ rezultă $a \in \{1;2\}$. Pentru a = 1 $\Rightarrow 11^1 = 11 \neq \overline{abc}$. Pentru a =2 $\Rightarrow 22^2 = 484$ dar nu convine deoarece $2 \neq 4$.

G:465. Arătați că ecuația $y^2 + y + 5x = 2014$ nu are soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: $u(y^2+y) \in \{0;2;6\}$ şi $u(5x) \in \{0;5\}$ rezultă $u(y^2+y+5x) \in \{0;1;2;5;6;7\}$, dar $u(2014) = 4$ rezultă că ecuația nu are soluții.

G:466. Aflați ultimele cinci cifre ale numărului $a = 3\cdot 5^{2014} - 13\cdot 5^{2013} + 6\cdot 5^{2012}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: $a = 5^{2012}\left(3\cdot 5^2 - 13\cdot 5 + 6\right) = 16\cdot 5^{2012} = 2^4\cdot 5^4\cdot 5^{2008} = 10^4 \bullet 5^{2008}$, aşadar, ultimele cinci cifre ale numărului **a** sunt 5,0,0,0,0.

G:467. Arătați că numărul A, care verifică relația :
$A\cdot 2014^{1008} - 2014 = 2013\cdot\left(2014 + 2014^2 + 2014^3 + ... + 2014^{2012} + 2014^{2013}\right)$, este pătrat perfect.

Iuliana Traşcă, Olt

Rezolvare: $S = 2014 + 2014^2 + 2014^3 + ... + 2014^{2012} + 2014^{2013} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2014\cdot S = 2014^2 + 2014^3 + ... + 2014^{2013} + 2014^{2014}$.

Prin scăderea celor două relații avem: $2013\cdot S = 2014^{2014} - 2014 \Rightarrow S = \frac{2014^{2014}-2014}{2013}$

$A = 2014^{1006} \Leftrightarrow A = \left(2014^{503}\right)^2$.

G:468. Dacă diferența dintre restul si câtul împărțirii a două numere naturale este un pătrat perfect, atunci şi restul împărțirii primului număr la consecutivul celui de-al doilea număr este acelaşi pătrat perfect. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Fie a şi b cele două numere naturale. Din teorema împărțirii cu rest avem că $a=bc+r, 0\le r<b,$ iar din enunț avem că $r=c+k^2, k\in N.$

Avem, $a=bc+c+k^2=(b+1)c+k^2$. Deoarece din $r=c+k^2<b\Rightarrow k^2<b\Rightarrow k^2<b+1,$ rezultă că restul împărțirii lui a la b + 1 este k^2. Exemplu: $31 = 8\cdot 3+7, 7-3=4 \Rightarrow 31 = 9\cdot 3+4.$

G:469. Câți divizori ai numărului 30^{2011} nu sunt divizori ai numărului 20^{2010} ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Avem: $30^{2011} = 2^{2011}\cdot 3^{2011}\cdot 5^{2011}$ şi $20^{2010} = 2^{4020}\cdot 5^{2010}$.

Rezultă că numărul divizorilor lui 30^{2011} care de asemenea divid pe 20^{2010} este egal cu numărul divizorilor lui $2^{2011}\cdot 5^{2010}$, şi anume: $(2011+1)\cdot(2010+1) = 2012\cdot 2011$.

Deoarece numărul 30^{2011} are în total $(2011+1)\cdot(2011+1)\cdot(2011+1)=2012^3$ divizori.

Deci numărul căutat este : $2012^3-2012\cdot 2011=2012^3-2012\cdot(2012-1)=\ =2012^3-2012^2+2012$.□

▪ Clasa a VI-a

G:470. Se dau numerele 18, 12 şi 15.

a) Să se calculeze $d=(18,12,15)$, $m=[18,12,15]$ **şi să se arate că** $\left[\frac{18}{d},\frac{12}{d},\frac{15}{d}\right]=\frac{m}{d}$ **;**

b) Să se demonstreze că oricare ar fi $a_1,a_2,a_3,...a_n\in\mathbb{N}^*$ **, are loc egalitatea :**

$\left[\frac{a_1}{d},\frac{a_2}{d},...,\frac{a_n}{d}\right]=\frac{m}{d}$ **, unde** $d=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ **şi** $m=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. **Constantin Apostol,** Rm. Sărat

Rezolvare: a) Pentru c.m.m.d.c, se obţine $d=3$ (1) şi pentru c.m.m.m.c, se obţine $m=180$ (2);

Ţinând seamă de 1) şi 2), $\Rightarrow\left[\frac{18}{3},\frac{12}{3},\frac{15}{3}\right]=\frac{180}{3}\Leftrightarrow[6,4,5]=60$, ceea ce trebuia arătat.

b) Din $d=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,rezultă $d\,|\,a_1$, $d\,|\,a_2$,....., $d\,|\,a_n$ adică $a_1=d\cdot a_1'$, $a_2=d\cdot a_2'$, ..., $a_n=d\cdot a_n'$,

unde $(a_1',\ a_2',\ .....,a_n')=1$. În plus, din faptul că **m** are următoarea proprietate :

$m=[a_1,a_2,....,a_n]\Leftrightarrow m\cdot d=[a_1\cdot d,a_2\cdot d,....,a_n\cdot d],\forall d\in\mathbb{N}^*$, deduce că

$m=[a_1,a_2,\cdots,a_n]=[d\cdot a_1',d\cdot a_2',\cdots,d\cdot a_n']=d\cdot[a_1',a_2',\cdots,a_n']\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{m}{d}=\left[\frac{a_1}{d},\frac{a_2}{d},\cdots.\frac{a_n}{d}\right]\Leftrightarrow\left[\frac{a_1}{d},\frac{a_2}{d},\cdots,\frac{a_n}{d}\right]=\frac{m}{d}$, ceea ce era de demonstrat.

G:471. Aflaţi ultimele două cifre ale celui mai mic număr natural care are exact 2014 divizori.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

Rezolvare: $2014=2\cdot 19\cdot 53\Rightarrow\ n=p_1^{1}\cdot p_2^{18}\cdot p_3^{52}$ cu p_1,p_2,p_3, cele mai mici numere prime, deci $n=5\cdot 3^{18}\cdot 2^{52}=(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 3)^{18}\cdot 2^{33}=10\cdot 6^{18}\cdot 2^{33}$. Ultima cifră este evident zero iar penultima cifră este ultima de la produsul dintre 6 (ultima cifră de la 6^{18})şi 2(ultima cifră de la 2^{33}) adică 2.

G:472. Împărţiţi numărul 30 în 3 părţi direct proporţionale cu numerele : media aritmetică a ultimelor două, media aritmetică a primului şi al ultimului, media aritmetică a primelor două.

Ion Stănescu, Smeeni

Rezolvare: 30 = a + b + c. (a, b, c) d.p. $\left(\frac{b+c}{2},\frac{a+c}{2},\frac{a+b}{2}\right)\Rightarrow\frac{2a}{b+c}=\frac{2b}{a+c}=\frac{2c}{a+b}=\frac{2(a+b+c)}{2(a+b+c)}=1$

Din b+c=2a rezultă că 30 = 3a adică a = 10 şi mai departe b=c=10.

G:473. Calculaţi $S=1\cdot 1!+2\cdot 2!+....+1960\cdot 1960!+1961\cdot 1961!$, unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot....\cdot n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Cum $n\cdot n!=(n+1-1)\cdot n!=(n+1)\cdot n!-n!=(n+1)n(n-1)\cdot....\cdot 3\cdot 2\cdot 1-n!=(n+1)!-n!$ rezultă că suma este egală cu $S=1962!-1$.

G:474. Arătaţi că : a) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_{2014}}$ **atunci 11 divide** $\overline{a_{2014}a_{2011}...a_1}$ **;**

b) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_{2013}}$ **atunci 11 divide** $\overline{a_{2013}a_{2010}...a_1}$ **;**

c) dacă 11 divide $\overline{a_1a_2...a_n}$ **atunci 11 divide** $\overline{a_na_{n-1}...a_1}$ **;**

Neculai Stanciu, Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare: a)Fie $A=\overline{a_1a_2...a_{2014}}$ şi $B=\overline{a_{2014}a_{2011}...a_1}$.

$A+B=(a_1\cdot 10^{2013}+...+a_{2013}\cdot 10+a_{2014})+(a_{2014}\cdot 10^{2013}+...+a_2\cdot 10+a_1)=$

$=a_1\cdot\left[(11-1)^{2013}+1\right]+a_2\cdot\left[(11-1)^{2012}+(11-1)\right]+...+a_{2013}\cdot\left[(11-1)+(11-1)^{2012}\right]+$

$+a_{2014}\cdot\left[1+(11-1)^{2013}\right]\equiv a_1\cdot(-1+1)+a_2\cdot(1-1)+...+a_{2014}\cdot(1-1)\equiv 0(\mathrm{mod}11)$.

Deci $11\vert A+B$. Din $11\vert A$ şi $11\vert A+B$, rezultă $11\vert B$.□

b)Se consideră $C=\overline{a_1a_2...a_{2013}}$ şi $D=\overline{a_{2013}a_{2010}...a_1}$.

Se procedează ca la punctul a) şi rezultă că $11\vert C-D$. Din $11\vert C$ şi $11\vert C-D$, rezultă $11\vert D$.□

c)Se consideră 2 cazuri:

1) $n=par$ - se procedează ca la punctul a); 2) $n=impar$ - se procedează ca la punctul b).□

G:475. Determinați numerele $a,b\in\mathbb{N}$ știind că $4\cdot[a;b]+5\cdot(a;b)=2009$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Fie $(a;b)=d\Rightarrow a=dx,b=dy$. Relația dată este echivalentă cu

$4\cdot\dfrac{ab}{(a;b)}+5\cdot(a;b)=2009\Leftrightarrow\quad 4\cdot\dfrac{dxdy}{d}+5d=2009\Leftrightarrow d(4xy+5)=41\cdot 7^2\Rightarrow$

$d\in\{1;7;41;49;287;2009\}$. (*) Din (*), perechile (a;b) care verifică relația dată sunt:

$(1;501),(501;1),(3;167),(167;3)$ pentru d=1; $(41;451),(451;41)$ pentru d = 41;

$(49;441),(441;49),(147,147)$ pentru d =49; Celelalte valori ale lui d nu convin.

G:476. Determinați numerele $\overline{abcd}$ formate din cifre prime, pentru care, ad + bd + 2cd + a = 15d + 2.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Egalitatea dată se mai scrie: d(a + b + 2c) + a – 2 = 15d. Din d|(a-2) rezultă posibilitățile:

$a=2\Rightarrow b+2c=13\Rightarrow(c=3,b=7),(c=5,b=3)$ cu $d\in\{2,3,5,7\}$.

$a=5,d=3\Rightarrow b+2c=9\Rightarrow(c=2,b=5),(c=3,b=3)$

$a=7,d=5\Rightarrow b+2c=7\Rightarrow(c=2,b=3)$.

G:477. Fie $2\cdot 8^a=(16^2)^2$. Calculați $A=\dfrac{(a^2\cdot a^n)^3}{a^{n+3}\cdot(a^{n-1})^2},n\in\mathbb{N}^*$. **Eliza Chile,** Craiova

Rezolvare: Din $2\cdot 8^a=(16^2)^2\Rightarrow 2^{3a+1}=2^{16}\Rightarrow a=5$. Atunci, $A=\dfrac{(a^2\cdot a^n)^3}{a^{n+3}\cdot(a^{n-1})^2}=\dfrac{a^{3n+6}}{a^{3n+1}}=a^5=5^5$.

G:478. Fie $A_1,A_2,....,A_n$ puncte pe o dreaptă d, astfel încât, $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=.....=A_{n-1}A_n=1$.

Există un punct $M\notin d$ astfel încât distanțele $MA_1,MA_2,....,MA_n$ să se exprime prin numere naturale?

Lucian Tuțescu, Craiova, Aurel Chiriță, Slatina

Rezolvare: E suficient să se demonstreze că pentru n = 3 nu există punctul M.

Fie $MA_1=a\in\mathbb{N}^*$, $MA_2=m\in\mathbb{N}^*$, $MA_3=b\in\mathbb{N}^*$. Cum $a+1\rangle m$, $m+1\rangle a\Rightarrow a\geq m$, $m\geq a\Rightarrow a=m$.

Analog, b=m de unde rezultă $a=b=m$. Ducând din M perpendiculara pe d în punctul P ar rezulta că există trei puncte A_1,A_2,A_3 egal depărtate de P, ceea ce e fals.

▪ Clasa a VII-a

G:479. Determinați numerele naturale x şi y astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2012}\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{503}\Rightarrow x=y=503$.□

G:480. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\frac{x-2}{2007}+\frac{x-4}{2005}+\frac{x-6}{2003}+\frac{x-8}{2001}+\frac{x-10}{1999}=\frac{x-2007}{2}+\frac{x-2005}{4}+\frac{x-2003}{6}+\frac{x-2001}{8}+\frac{x-1999}{10}.$$

Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:
La numărător, se va înlocui în stânga $-2=-2009+2007$, $-4=-2009+2005$, $-6=-2009+2003$, etc.
iar în dreapta $-2007=-2009+2$, $-2005=-2009+4$, $-2003=-2009+6$, etc.
Ecuația dată este echivalentă cu

$$(x-2009)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{2001}-\frac{1}{2003}-\frac{1}{2005}-\frac{1}{2007}\right)=0\Rightarrow x-2009=0\Rightarrow x=2009$$

este singura soluție căci numărul din paranteză este evident nenul.

G:481. Găsiți numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică egalitatea $b\cdot c=\sqrt{\overline{abc}}+c$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Se obțin soluțiile $\overline{abc}\in\{144,784\}$.

G:482. Scrieți fracția $\frac{2014}{14097}$ ca o sumă de două fracții diferite cu numărătorii 1.

Cornelia Gurău, Moineşti

Rezolvare: $\frac{2014}{14097}\overset{7)}{=}\frac{14098}{7\cdot 14097}=\frac{1}{7}\cdot\frac{14097+1}{14097}=\frac{1}{7}\cdot\left(1+\frac{1}{14097}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{98679}.$

G:483. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD, ştiind că:
$m(\hat{A})=m(\hat{B})\cdot x=m(\hat{C})\cdot x^2=m(\hat{D})\cdot x^3$, $x\in\mathbb{N}^*$ **şi** $m(\hat{A})=4\cdot m(\hat{C})$.

Marin Simion, Rm. Sărat

Rezolvare: Deoarece m$(\hat{A})=m(\hat{C})\cdot x^2$ şi m$(\hat{A})=4\cdot m(\hat{C})\Rightarrow x=2$. Din relațile date obținem :

m$(\hat{B})=\frac{m(\hat{A})}{2}, m(\hat{C})=\frac{m(\hat{A})}{4}$ şi $m(\hat{D})=\frac{m(\hat{A})}{8}$; Cum suma unghiurilor într-un patrulater convex este 360^0 rezultă $m(\hat{A})=192^0, m(\hat{B})=96^0, m(\hat{C})=48^0, m(\hat{D})=24^0$.

G:484. Într-un trapez isoscel ABCD notăm baza mare (AB), cu m, baza mică, cu n, şi înălțimea, cu h.

Arătați că: a) $h=\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$ **, dacă** $tg(ABC)=\frac{3}{2}$ **şi** $tg(ABD)=\frac{3}{4}$ **;**

b) $h=\sqrt{mn}$ **, dacă** $tg(ABC)=\frac{3}{4}$ **şi** $tg(ABD)=\frac{3}{5}$**;** **c)** $h=\frac{m+n}{2}$**, dacă** $tg(ABD)=1$**;**

d) $h=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$**, dacă** $tg(ABC)=\frac{5}{3}$ **şi** $tg(ABD)=\frac{5}{4}$**.**

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare:
Construim din punctele D şi C perpendicularele pe dreapta AB şi notăm picioarele lor, cu E, respectiv, cu F. Din datele problemei deducem :

a) $tg(ABC)=\frac{CF}{FB}=\frac{h}{\frac{m-n}{2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow h=\frac{3(m-n)}{4}$ (1) şi $tg(ABD)=\frac{DE}{EB}=\frac{h}{\frac{m+n}{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow h=\frac{3(m+n)}{8}$ (2)

Din (1) şi (2), rezultă $\frac{3(m-n)}{4}=\frac{3(m+n)}{8}\Leftrightarrow m=3n$ şi, deci, $h=\frac{3n}{2}$.

b) $tg(ABC)=\frac{CF}{FB}=\frac{h}{\frac{m-n}{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow h=\frac{3(m-n)}{8}$ (1) şi $tg(ABD)=\frac{DE}{EB}=\frac{h}{\frac{m+n}{2}}=\frac{3}{5}\Rightarrow h=\frac{3(m+n)}{10}$ (2)

Din (1) şi (2), rezultă $\frac{3(m-n)}{8}=\frac{3(m+n)}{10}\Leftrightarrow m=9n$ şi, deci, $h=3n$.

c) $tg(ABD)=\frac{DE}{EB}=\frac{h}{\frac{m+n}{2}}=1\Rightarrow h=\frac{m+n}{2}$ şi demonstrația se termină.

d) $tg(ABC)=\frac{CF}{FB}=\frac{h}{\frac{m-n}{2}}=\frac{5}{3}\Rightarrow h=\frac{5(m-n)}{6}$ (1) şi $tg(ABD)=\frac{DE}{EB}=\frac{h}{\frac{m+n}{2}}=\frac{5}{4}\Rightarrow h=\frac{5(m+n)}{8}$ (2)

Din (1) şi (2), rezultă $\frac{5(m-n)}{6}=\frac{5(m+n)}{8}\Leftrightarrow m=7n$ şi, deci, $h=5n$.

G:485. Fie ABCD un trapez dreptunghic în A si baza mare AB. Paralela prin D la BC intersectează AB în E; AC∩ DE= ={O}, iar paralela prin O la AB intersectează AD în punctul F. Dacă AD este medie proporțională între AB şi CD, arătați că dreptele BD şi EF sunt paralele.

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: (Soluție dată de dl. Titu Zvonaru) .

Patrulaterul DEBC este paralelogram; Folosind asemănările $\frac{AE}{EB}=\frac{AE}{DC}=\frac{AO}{OC}=\frac{AF}{FD}$ rezultă $FE \parallel BD$.

G:486. În triunghiul ABC, medianele (BB_1) şi (CC_1) sunt perpendiculare şi au lungimile m_1 şi m_2.

a) Calculați lungimea medianei (AA_1); b) Calculați lungimile laturilor triunghiului ABC ;

c) Calculați aria triunghiului ABC ; d) Arătați că raportul $\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$ este constant ;

e) Arătați că triunghiul median al triunghiului ABC este dreptunghic .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare:

a) Fie $\{G\}=BB_1\cap CC_1\Rightarrow GB=\frac{2m_1}{3}$ şi $GC=\frac{2m_2}{3}\Rightarrow BC^2=\left(\frac{2m_1}{3}\right)^2+\left(\frac{2m_2}{3}\right)^2$.

$\Rightarrow BC=\frac{2\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{3}\Rightarrow GA_1=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{3}$, căci, (GA_1) este mediană în triunghiul dreptunghic GBC ;

dar, $AA_1=3\cdot GA_1\Rightarrow AA_1=\sqrt{m_1^2+m_2^2}$.

b) Din $\Delta GBC_1\Rightarrow BC_1^2=\left(\frac{2}{3}\cdot m_1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\cdot m_2\right)^2=\frac{4m_1^2}{9}+\frac{m_2^2}{9}=\frac{4m_1^2+m_2^2}{9}\Rightarrow BC_1=\frac{\sqrt{4m_1^2+m_2^2}}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=\frac{2\sqrt{4m_1^2+m_2^2}}{3}$; din $\Delta GCB_1\Rightarrow CB_1^2=\left(\frac{2}{3}\cdot m_2\right)^2+\left(\frac{1}{3}\cdot m_1\right)^2\Rightarrow CB_1=\frac{\sqrt{4m_2^2+m_1^2}}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow AC=\frac{2\sqrt{4m_2^2+m_1^2}}{3}$;

c) Unind punctele B_1 şi C_1, obținem triunghiul AB_1C_1, care este echivalent cu triunghiul medial (complementar) al triunghiului ABC, adică cu triunghiul $A_1B_1C_1$, care are ca laturi, liniile mijlocii ale triunghiului ABC ; în plus, obținem şi trapezul ortodiagonal BCB_1C_1, care are aria

de trei ori mai mare decât aria triunghiului medial .

$S_{BCB_1C_1}=\frac{BB_1\cdot CC_1}{2}$, adică, $S_{BCB_1C_1}=\frac{m_1\cdot m_2}{2}$. Dar aria Δ ABC este de patru ori mai mare decât aria triunghiului medial, deci, $S_{ABC}=4\cdot\frac{S_{BCB_1C_1}}{3}\Rightarrow\ S_{ABC}=4\cdot\frac{\frac{m_1\cdot m_2}{2}}{3}=\frac{2m_1m_2}{3}$.

d)

$$\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{4m_1^2+m_2^2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{4m_2^2+m_1^2}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{3}\right)^2}=\frac{\frac{4}{9}\left(4m_1^2+m_2^2+4m_2^2+m_1^2\right)}{\frac{4}{9}\left(m_1^2+m_2^2\right)}=\frac{5\left(m_1^2+m_2^2\right)}{m_1^2+m_2^2}=5,$$

rezultat care pune în evidență că raportul este constant .

e) Triunghiul median al triunghiului ABC este dreptunghic deoarece m_1, m_2 şi $\sqrt{m_1^2+m_2^2}$ verifică relația lui Pitagora : $m_1^2+m_2^2=\left(\sqrt{m_1^2+m_2^2}\right)^2$.

▪ Clasa a VIII-a

G:487. Descompuneți în factori numărul $P(a,b,c)=2b^2-2ac-a^2+bc-c^2+ab,\ a,b,c\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Rezolvare: Se va considera ecuația de gradul doi în a, $-a^2+a(b-2c)+2b^2+bc-c^2=0$, şi se găsesc soluțiile $a_1=-b-c,\ a_2=2b-c$. Astfel, descompunerea este $P(a,b,c)=-(a+b+c)(a-2b+c)$.
Altfel, se pot grupa factorii de forma $P=\left(2ab-a^2-ac\right)+\left(2b^2-ab-bc\right)+\left(2bc-ac-c^2\right)$.

G:488. Arătați că oricare ar fi numerele întrgi m şi n, de parități diferite, există numerele întregi nenule a şi b, astfel încât, să aibă loc egalitatea : $a\left(a+m\right)=b\left(b+n\right)$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Rezolvare : Egalitatea se poate scrie, echivalent :

$a^2+am=b^2+bn\ \big|\cdot 4\ \Leftrightarrow\ 4a^2+4am=4b^2+4bn\ \Leftrightarrow\ 4a^2+4am+m^2-m^2=4b^2+4bn+n^2-n^2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \left(2a+m\right)^2-m^2=\left(2b+n\right)^2-n^2\ \Leftrightarrow\ \left(2a+m\right)^2-\left(2b+n\right)^2=m^2-n^2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \left(2a+m-2b-n\right)\left(2a+m+2b+n\right)=m^2-n^2$. De aici, se obțin numerele

$a=\frac{(m-1)^2-n^2}{4},\ b=\frac{m^2-(n+1)^2}{4}$. Ştiind că numerele m şi n au parități diferite, deducem că numerele a şi b sunt întregi. De asemenea, nu sunt unice.

G:489. Este $2011^{2012}+4^{2013}$ număr prim ?

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Observăm că : $2011^{2012}+4^{2013}=2011^{4\cdot 503}+4\cdot 4^{2012}=((2011)^{503})^4+4\cdot(4^{503})^4=a^4+4b^4$.
Dar, $a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=$
$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$ - reprezintă identitatea *Sophiei Germain.*
Aşadar, numărul $2011^{2012}+4^{2013}$ este compus.□

G:490. Fie $a>0$ **şi** $x,y\in[0;a]$**. Arătaţi că** $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2-y^2}\geq\sqrt{a^2-(x+y-a)^2}$ **. În ce caz avem egalitate ?**

Dorina Goiceanu şi Nicoleta Bran, Craiova

Rezolvare: Se ridică la pătrat egalitatea dată rezultând:

$a^2-x^2+a^2-y^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}\geq a^2-(x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay)\Rightarrow$

$2\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}+2a^2+2xy-2ax-2ay\geq 0\Rightarrow\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}+(a-x)(a-y)\geq 0$, adevărată.

Egalitate avem pentru $(a-x)(a-y)=0\Rightarrow x=a,$ sau $y=a$.

G:491. Fie $a=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{12}(\sqrt{4}+\sqrt{3})}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Determinaţi n astfel încât $a=\frac{2013}{2014}$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Se demonstrează mai întâi că $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Atunci, $a=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Cum , $a=\frac{2013}{2014}\Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2013}{2014}\Rightarrow\sqrt{n+1}=2014\,\big|()^2\Rightarrow n=4056195$.

G:492. Arătaţi că dacă $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}=\frac{1}{4}$**, atunci** $\frac{a}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{c}{c+3}=\frac{9}{4}$**.**

Marin Simion , Rm. Sărat

Rezolvare: Din $\frac{1}{a+3}+1+\frac{1}{b+3}+1+\frac{4}{c+3}+1=\frac{1}{4}+3\Rightarrow\frac{a+4}{a+3}+\frac{b+4}{b+3}+\frac{c+4}{c+3}=\frac{13}{4}\Leftrightarrow$

$\frac{a}{a+3}+\frac{4}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{4}{b+3}+\frac{c}{c+3}+\frac{4}{c+3}=\frac{13}{4}\ \Rightarrow\frac{a}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{c}{c+3}=\frac{13}{4}-1=\frac{9}{4}$, deoarece

$\frac{4}{a+3}+\frac{4}{b+3}+\frac{4}{c+3}=4\cdot\frac{1}{4}=1$.

G:493. Determinaţi numerele naturale n pentru care are loc inegalitatea: $(n+1)^{n+3}<n^{n+1}(n+3)^n$.

Gheorghe Ghiţă, Buzău

Rezolvare : Se constată că pentru $n\in\{0,1,2\}$ inegalitatea este falsă. Pentru n = 3 rezultă

$4^6<3^4\cdot 6^3\Leftrightarrow 4096<17496$, iar pentru n = 4, avem $5^7<4^5\cdot 7^4\Leftrightarrow 78125<2458624$, deci, adevărată.

Pentru $n\geq 5$, inegalitatea se rescrie: $\frac{(n+1)^3}{n}<\left(\frac{n^2+3n}{n+1}\right)^n\Leftrightarrow n^2+3n+3+\frac{1}{n}<\left(n+\frac{2n}{n+1}\right)^n$.

Vom demonstra că $n^2+3n+3+\frac{1}{n}<n^5<\left(n+\frac{2n}{n+1}\right)^n$. Pentru prima parte avem:

$n^2+3n+3+\frac{1}{n}<n^5\Leftrightarrow n^3+3n^2+3n+1<n^6\Leftrightarrow(n+1)^3<n^6\Leftrightarrow n+1<n^2\Leftrightarrow\left(n-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{5}{4}$,

iar pentru partea a doua: $\left(n+\frac{2n}{n+1}\right)^n>n^n\geq n^5$.

Din cele de mai sus, rezultă că inegalitatea este adevărată pentru orice număr natural $n\geq 3$.

G:494. Arătați că nu există un număr prim $p>5$ care să reprezinte numărul de diagonale ale unui poligon convex. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare : Presupunen că există un poligon convex $P_1P_2...P_n$ care are n laturi şi $p>5$ diagonale. Din vârful P_1 putem duce $n-3$ diagonale. Analog din celelalte $n-1$ vârfuri. Deoarece ele sunt numărate de două ori obținem $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale. Avem de rezolvat ecuația: $\frac{n(n-3)}{2}=p \Leftrightarrow n(n-3)=2\cdot p \Rightarrow \begin{cases} n-3=2 \\ n=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=5 \\ n=p \end{cases}$, fals. Deci nu există un poligon convex cu $p>5$ diagonale. Soluție avem numai dacă $p=5$ şi rezolvarea se termină.

G:495. Piramida triunghiulară regulată, VABC, are inălțimea 10 cm. La ce distanță de vârf trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încât cele 2 corpuri nou formate să aibă volumele direct proporționale cu 8 şi 19. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Fie V_1, V_2, respectiv V volumul piramidei nou formate, a trunchiului de piramidă şi respectiv a piramidei inițiale. Atunci, din $(V_1;V_2)$ d.p. $(8;19)$ rezultă $\frac{V_1}{V_2}=\frac{8}{19}\Rightarrow \frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{8}{27}$, adică $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$. Dar, $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{h}{10}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow h=\frac{20}{3}$ este distanța până la vârf.

G:496. Se dă cubul ABCDEFGH, M mijlocul laturii [FG] şi O, centrul bazei ABCD. Arătați că triunghiul EOM este isoscel şi $EO\perp OI$, unde I este simetricul punctului H față de G.

Ion Radu, Bozioru, Buzău

Rezolvare: Daca notăm cu P mijlocul muchiei $[BC]$ atunci va rezulta că $\Delta EFM\equiv\Delta MOP\Rightarrow EM=EO$; $[GI]=[EM]$, $GI\parallel EM\Rightarrow EFIG$ este paralelogram şi M este mijlocul lui $[EI]$ şi din $[EM]=[EO]=[MI]\Rightarrow m(\widehat{EOI})=90^0$

G:497. Rezolvați în $\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: $\begin{cases} \frac{x+1}{x^3+1}+x^2+\sqrt{y}=\frac{19}{3} \\ \frac{1}{x^2-x+1}+|x-y+z|=\frac{7}{3} \\ x^2+\sqrt{y}+|x-y+z|=\frac{24}{3} \end{cases}$.

Mariana Mitea, Cugir

Rezolvare: Avem de pus condițiile: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y\geq 0$.

Notând $\frac{1}{x^2-x+1}=a,\ a\neq 0,\qquad x^2+\sqrt{y}=b,\ b\geq 0,\qquad |x-y+z|=c,\ c\geq 0$ obținem

$a+b=\frac{19}{3},\ a+c=\frac{7}{3},\ b+c=8\ \Rightarrow$ a = $\frac{1}{3}$, b = 6, c = 2. Mai departe, din rezolvarea ecuației $x^2-x-2=0$ singura soluție care convine este 2.

Găsim apoi pe y = 4, după care ajungem la $|z-2|=2$ cu $z\in\{0;4\}$. Atunci, $S=\{(2;4;0),(2;4;4)\}$.

G:498. Rezolvați ecuația : $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}\cdot\sqrt{6x}=\sqrt{\sqrt{9n+9}+\sqrt{9n}}$. **Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede

Rezolvare: Partea stângă este $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\sqrt{2x}$ iar partea dreaptă este

$\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$, atunci, $\sqrt{2x}=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

▪ Clasa a IX-a

L:336. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **care verifică relația** $f(x+1)-2f(0)=2x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(0)=-1$; **b) Arătați că** $f(x)=2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) Calculați suma $S=\dfrac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\dfrac{1}{f(2)\cdot f(3)}+.....+\dfrac{1}{f(2013)\cdot f(2014)}+\dfrac{1}{f(2014)\cdot f(2015)}$.

Generalizare; **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare:

a) Pentru x = -1 rezultă f(0) = -1; b) Notăm x+1 = t, atunci, f(t)=2t-1 deci $f(x)=2x-1$;

c) $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+...+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4027}-\dfrac{1}{4029}\right)=\dfrac{2014}{4029}$.

Generalizare, $S=\dfrac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\dfrac{1}{f(2)\cdot f(3)}+.....+\dfrac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=\dfrac{n-1}{2n-1}$.

L:337. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte care sunt simultan şi numere triunghiulare (se numeşte număr triunghiular un număr de forma $\dfrac{t(t+1)}{2}, t\in N^*$**).**

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare:

Trebuie să găsim numerele naturale n astfel încât $n=s^2=\dfrac{t(t+1)}{2}, s\in N^*, t\in N^*$.

Avem $s^2=\dfrac{t(t+1)}{2}\Leftrightarrow t^2+t=2s^2$, care prin înmulțire cu 4 la care adăugăm 1, se ajunge la $(2t+1)^2-2(2s)^2=1$. Substituim $x=2t+1, y=2s$, în ultima ecuație şi ajungem la ecuația *Pell* $x^2-2y^2=1$, care are o infinitate de soluții. Este usor de observat că x este impar si y par.

După ce găsim x şi y, se calculează $t=\dfrac{x-1}{2}$ şi $s=\dfrac{y}{2}$. Deci avem o infinitate de numere pătrate perfecte care sunt şi numere triunghiulare. Exemple:

1) $x=3, y=2, s=1, t=1, n=1$; 2) $x=17, y=12, s=6, t=8, n=36$;

3) $x=99, y=70, s=35, t=49, n=1225$; 4) $x=577, y=408, s=204, t=288, n=41616$; etc.

L:338. Rezolvați ecuația $x+[x]=11\cdot\{x\},\ x\in\mathbb{Q}$, **unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă şi** $\{x\}$ **partea fracționară a lui x.** **Doina şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Cum $x=[x]+\{x\},\ \forall x\in\mathbb{Q}$, ecuația dată este echivalentă cu $5\cdot\{x\}=[x]$. Cum

$\{x\}\in[0;1)\Rightarrow 5\{x\}\in[0;5),\ [x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow 5\{x\}=0\Rightarrow x=0.$

$5\{x\}=1\Leftrightarrow\{x\}=\dfrac{1}{5},\ [x]=1\Rightarrow x=1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}.$ $\quad 5\{x\}=2\Leftrightarrow\{x\}=\dfrac{2}{5},\ [x]=2\Rightarrow x=2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}.$

$5\{x\}=3\Leftrightarrow\{x\}=\dfrac{3}{5},\ [x]=3\Rightarrow x=3+\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}.$ $\quad 5\{x\}=4\Leftrightarrow\{x\}=\dfrac{4}{5},\ [x]=4\Rightarrow x=4+\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{5}.$

$S=\left\{0,\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5},\dfrac{18}{5},\dfrac{24}{5}\right\}$.

L:339. Fie $a,b,c,d\rangle 0$ **astfel încât** $abc+abd+acd+bcd=4$**. Arătați că**
$a^2(bc+cd+db)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)+d^2(ab+bc+ca)\geq 12abcd$**.**

Teodora Rădulescu , Lucian Tuțescu, Craiova

Rezolvare:
Din ipoteză rezultă $a(bc+bd+cd)=4-bcd\,|\bullet a \Rightarrow\ a^2(bc+bd+cd)=4a-abcd \Rightarrow$

$\sum\ a^2(bc+bd+cd)=4\sum\ a-4abcd$, (*). Cum $\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}\geq 16$ (Inegalitatea Cauchy) , rezultă

$\sum a\cdot\frac{\sum abc}{abcd}\geq 16\Rightarrow\sum a\geq 4abcd$, (**). Din (*) şi (**) rezultă $\sum\ a^2(bc+bd+cd)\geq 16abcd-4abcd$,
c.c.t.d, cu egalitate când $a=b=c=d=1$.

L:340. Demonstrați că $\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+...+\frac{1}{n^3}\langle\ \frac{n}{3n+3},\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 5$**.**

Ionuț Ivănescu, Liviu Smarandache, Craiova

Rezolvare: Cum $n^3\geq 5n^2\geq 3n^2+2n^2\geq 3n^2+10n\rangle 3n^2+6n\rangle 3(n+1)^2\rangle 3n(n+1),\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 5,$ rezultă
$\frac{1}{n^3}\langle\ \frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 5$.
Dând valori lui n mai mari decât 5 şi însumând, obținem
$\sum_{k=5}^{n}\ \frac{1}{k^3}\langle\ \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=5}^{n}\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{3n+3}$, c.c.t.d.

L:341. Fie $a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+.....+\frac{1}{1+3+5+...+2n-1},n\in\mathbb{N}^*$**. Să se arate că :**

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2\cdot a_{k+1}\cdot a_k}\ \langle\ \frac{n}{n+4}$.

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

Rezolvare: Evident $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\Rightarrow\ a_{k+1}-a_k=\frac{1}{(k+1)^2}\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2\cdot a_{k+1}\cdot a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}\cdot a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=1-\frac{1}{1+x_n}\langle 1-\frac{4}{n+4}=\frac{n}{n+4}$ unde

$x_n=\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{(n+1)^2}<\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^2}}_{n-ori}=\frac{n}{4}\Rightarrow 1+x_n<\frac{n+4}{4}\Rightarrow\frac{1}{1+x_n}>\frac{4}{n+4}\,|\cdot(-1)$

L:342. Arătați că numărul n = 1016064 este soluție a ecuației $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=2014$**, unde**
$[x]$ **reprezintă partea întreagă a numărului real x.**

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare: Se observă că $n=1016064=(1000+8)^2=1008^2$.

Se arată uşor că $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\ \langle\ \frac{1}{\sqrt{k}}\ \langle\ 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}),\ \forall k\in\mathbb{N}^*$. Rezultă,

$2\sum_{k=2}^{m^2}\ (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\ \langle\ \sum_{k=2}^{m^2}\ \frac{1}{\sqrt{k}}\ \langle\ 2\sum_{n=2}^{m^2}\ (\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$. Însumând după valorile lui k şi adăugând 1 în stânga şi în dreapta, se obține:
$2\sqrt{m^2+1}-2\sqrt{2}+1\ \langle\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{m^2}}\langle 2m-1,\ \forall m\geq 2.$ Pentru $m=1008$, avem

$m^2=1008^2=n$ şi $2\sqrt{1008^2+1}-2\sqrt{2}+1 \langle 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{1008^2}}\langle 2015$. (*)

În continuare se arată că $2014\langle 2\sqrt{1008^2+1}-2\sqrt{2}+1$, (**) adică $(2013+2\sqrt{2})^2\langle 4\cdot 1008^2+4 \Leftrightarrow$ $8052\sqrt{2}\langle 12083$, ceea ce este adevărat.

Din (*) şi (**) rezultă $2014 \langle 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{1008^2}}\langle 2015$ adică $n=1008^2$ este soluție a ecuației date.

L:343. Determinați: $\min(\sqrt{x^2+y^2+4x-4y+8}+\sqrt{x^2+y^2+6x+6y+8}+\sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$**.**

Roxana Mihaela Stanciu, Buzău şi **Nela Ciceu,** Bacău

Rezolvare: Se caută minimul expresiei $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}$.

Considerăm triunghiul ABC de coordonate $A(-3,-3);B(-2,2);C(2,-2)$.

Se realizează minimul conform teoremei *Fermat-Steiner* atunci când punctul $F(x,y)$ este în interiorul triunghiului astfel încât $\widehat{AFB}=\widehat{AFC}=\widehat{BFC}=120^0$.

Deoarece $AB=AC=\sqrt{26}, BC=4\sqrt{2}$ rezultă că ΔABC este isoscel. Mai avem că (BC) este a doua bisectoare a sistemului xOy de unde (AF) este prima bisectoare.

Fie $F(-a,a), a>0$. Rezultă: $FB^2=FC^2=2a^2+8$ şi din teorema cosinusului în triunghiul ΔFBC,

$BC^2=FB^2+FC^2-2FB\cdot FC\cdot\cos 120^0$ rezultă $BC^2=3FC^2$ de unde $\Rightarrow a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi

$FB=FC=\sqrt{2a^2+8}=\frac{4\sqrt{6}}{3}, FA=\sqrt{(a-3)^2+(3-a)^2}=3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ iar minimul este $2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

L:344. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{10r+4R}{\sqrt{3}}\geq\frac{p^2+27r^2}{p}$,

unde r, R, p sunt notațiile consacrate într-un triunghi. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare:

Fiind cunoscute inegalitățile $3r\sqrt{3}\leq p\leq\frac{4R+r}{\sqrt{3}}$, atunci, $3r\sqrt{3}+\frac{4R+r}{\sqrt{3}}\geq 3r\sqrt{3}+p=p+\frac{3pr\sqrt{3}}{p}\geq$

$p+\frac{(3r\sqrt{3})(3r\sqrt{3})}{p}\geq\ p+\frac{27r^2}{p}$.

L:345. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{3+\sin^2 A}+\frac{1}{3+\sin^2 B}+\frac{1}{3+\sin^2 C}\geq\frac{4}{5}.$$

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Aplicând inegalitatea lui Bergstrom precum şi relațiile cunoscute:

$(1)\ \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

$(2)\ \cos A\cos B\cos C\leq\frac{1}{8}$ obținem succesiv:

$$\frac{1}{3+\sin^2 A}+\frac{1}{3+\sin^2 B}+\frac{1}{3+\sin^2 C}\geq\frac{(1+1+1)^2}{9+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}=\frac{9}{9+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{9}{9+2+2\cos A\cos B\cos C}\overset{(2)}{\geq}\frac{9}{11+2\cdot\frac{1}{8}}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}.$$

L:346 **Se consideră** $ABCD$ **un patrulater inscriptibil, iar** $\Omega_i, i=\overline{1,4}$, **sunt centrele cercurilor mediale ale triunghiurlor** $ABC, BCD, CDA,$ **respectiv** DAB. **Arataţi că a)** $\overrightarrow{A\Omega_1}+\overrightarrow{B\Omega_2}+\overrightarrow{C\Omega_3}+\overrightarrow{D\Omega_4}=\vec{0}$ **dacă şi numai dacă** $ABCD$ **este dreptunghi.**

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Într-un triunghi avem următoarele relaţii:

1) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 2) $3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, Rezulta $\overrightarrow{OH}=3\cdot\overrightarrow{OG}$ O centrul cercului circumscris triunghiului; 3) Daca O este un punct în planul patrulaterului $ABCD$, atunci avem $4\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, unde G este centrul de greutate al patrulaterului.

4) Centrul cercului lui Euler, Ω, se afla la mijlocul segmentului $OH \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{2}$.

Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ iar $H_i, i=\overline{1,4}$, ortocentrele triunghiurlor $ABC, BCD, CDA,$ respectiv DAB. Aplicand rezultatele de mai sus,putem scrie: $\overrightarrow{A\Omega_1}+\overrightarrow{B\Omega_2}+\overrightarrow{C\Omega_3}+\overrightarrow{D\Omega_4}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{O\Omega_1}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{O\Omega_2}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{O\Omega_3}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{O\Omega_4}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AO}++\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{O\Omega_1}+\overrightarrow{O\Omega_2}+\overrightarrow{O\Omega_3}+\overrightarrow{O\Omega_4}=\vec{O}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO}+\frac{\overrightarrow{OH_1}}{2}+\frac{\overrightarrow{OH_2}}{2}+\frac{\overrightarrow{OH_3}}{2}+\frac{\overrightarrow{OH_4}}{2}=\vec{O}\Leftrightarrow$$

$$4\cdot\overrightarrow{GO}+\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{4}=\vec{O}\Leftrightarrow$$

$$4\cdot\overrightarrow{GO}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{O}\Leftrightarrow 4\cdot\overrightarrow{GO}+\frac{3}{2}\cdot 4\overrightarrow{OG}=\vec{O}\Leftrightarrow -4\cdot\overrightarrow{OG}+6\overrightarrow{OG}=\vec{O}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG}=\vec{O}\Leftrightarrow G=O$$

$\Leftrightarrow ABCD$ este dreptunghi.

Dacă $G=O$, luând E,F,G,H mijloacele laturilor $AB, BC, CD,$ respectiv DA rezultă $EG\perp AB, EG\perp DC, FH\perp BC, FH\perp AD\Rightarrow AB\,||\,CD, AD\,||\,BC\Rightarrow ABCD$ paralelogram şi cum este şi inscriptibil $\Rightarrow ABCD$ dreptunghi.

▪ Clasa a X-a

L:347. **Rezolvaţi ecuaţia** $161\cdot\lg^2(x^5)-1961\cdot\lg x^2-103=0$.

Doina şi Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare:

Se pune condiţia de existenţă $x\rangle 0\Rightarrow x\in(0;\infty)$. Atunci, din $161\cdot(2\lg x)^2-1961\cdot 2\lg x-103=0\Rightarrow$ $4025\lg^2 x-3922\lg x-103=0\Leftrightarrow\left(4025\lg^2 x-4025\lg x\right)+\left(103\lg x-103\right)=0$. Rezultă,

$(\lg x-1)(4025\lg x+103)=0\Rightarrow\ x_1=10$ şi $x_2=10^{-\frac{103}{4025}}$.

L:348 **Să se demonstreze inegalitatea:** $2^{\sqrt{\log_2 3}}+3^{\sqrt{\log_3 2}}\langle 5$. **Florin Nicolaescu**, Balş, Olt

Rezolvare:

$a^{\sqrt{\log_a b}}\le a^{\frac{1+\log_a b}{2}}=a^{\log_a\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$ deoarece $\sqrt{1\cdot\log_a b}\le\dfrac{1+\log_a}{b}$. Analog, $b^{\sqrt{\log_b a}}\le\sqrt{ab}$. Adunând cele două relaţii se obţine $a^{\sqrt{\log_a b}}+b^{\sqrt{\log_b a}}\le 2\sqrt{ab}\le a+b$. Pentru a =2 şi b=3 se obţine c.c.t.d.

L:349. Să se demonstreze inegalitatea $2\cdot(\log_2 2014)\cdot\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}+13\cdot(\log_{2014}2)\cdot\sum_{k=1}^{10}k>100$.

Ciobîcă Constantin, Fălticeni

Rezolvare: Considerăm inecuația: $2\log_{2^k}2014+13\log_{2014}2^k\rangle 10$, $1\le k\le 10$. Atunci,

$$2\sum_{k=1}^{10}\log_{2^k}2014+13\sum_{k=1}^{10}\log_{2014}2^k>100$$

$$2\left(\log_2 2014+\log_{2^2}2014+...+\log_{2^{10}}2014\right)+13\left(\log_{2014}2+\log_{2014}2^2+...+\log_{2014}2^{10}\right)>100$$

$$2\left(\log_2 2014+\frac{\log_2 2014}{2}+...\frac{\log_2 2014}{10}\right)+13\left(\log_{2014}2+2\log_{2014}2+...+10\log_{2014}2\right)>10$$

$$2(\log_2 2014)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{10}\right)+13(\log_{2014}2)\left(1+2+...+10\right)>100\Rightarrow$$

$$2(\log_2 2014)\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}+13(\log_{2014}2)\sum_{k=1}^{10}k>100.$$

L:350. Demonstrați egalitatea: $\frac{\sqrt[5]{3+2\sqrt[4]{5}}-\sqrt[5]{4-4\sqrt[4]{5}}}{\sqrt[5]{3+2\sqrt[4]{5}}+\sqrt[5]{4-4\sqrt[4]{5}}}=2+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{125}$.

Martin Hriňák, Slovakia

Rezolvare: Dacă notăm $a^4=5$, egalitatea de demonstrat este echivalentă cu:

$\frac{\sqrt[5]{3+2a}-\sqrt[5]{4-4a}}{\sqrt[5]{3+2a}+\sqrt[5]{4-4a}}=2+a+a^2+a^3$.Notăm $A=\sqrt[5]{2a+3}$ şi $B=\sqrt[5]{4a-4}$, apoi ținem cont că : $\frac{A+B}{A-B}=N\Leftrightarrow(N-1)A=(N+1)B$, şi egalitatea de demonstrat devine

(*) $(1+a+a^2+a^3)\sqrt[5]{2a+3}=(3+a+a^2+a^3)\sqrt[5]{4a-4}$ .Deoarece, $a^4=5$, avem:

$1+a+a^2+a^3=\frac{a^4-1}{a-1}=\frac{4}{a-1}$ şi $3+a+a^2+a^3=2+\frac{4}{a-1}=\frac{2a+2}{a-1}$.

Relația (*) devine: $2\sqrt[5]{2a+3}=(a+1)\sqrt[5]{4a-4}\Leftrightarrow 8(2a+3)=(a+1)^5(a-1)$, care se verifică prin calcul ținându-se sema că $a^4=5$.□

L:351. Să se rezolve ecuația $x^{\log_a(\log_a x)}=\left(\log_b x\right)^{2\log_a x}$, $\forall a,b\in(1;\infty)$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

Din condițiile de existență rezultă $x\rangle 1$. Ecuația dată se logaritmează în a, şi cum $a\rangle 1, x\rangle 0\Rightarrow\log_a x\rangle 0$, rezultă : $\log_a(\log_a x)\cdot\log_a x=2\log_a x\cdot\log_a(\log_b x)\ \big|\ :\log_a x$,

$\Rightarrow\log_a x=(\log_b x)^2\Leftrightarrow\frac{\log_b x}{\log_b a}=(\log_b x)^2\Rightarrow\log_b x=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b\Rightarrow\ x=b^{\log_a b}\rangle 1$.

L:352. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=2(x^2+y^2)\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=y^2-x^2\end{cases}$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului:

$\begin{cases}\frac{2}{x}=x^2+3y^2\\ \frac{1}{y}=y^2+3x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3xy^2=2\\ 3x^2y+y^3=1\end{cases}$. Adunăm şi scădem ecuaţiile sistemului precedent şi obţinem

sistemul: $\begin{cases}(x+y)^3=3\\ (x-y)^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\in\left\{\sqrt[3]{3},\varepsilon\sqrt[3]{3},\varepsilon^2\sqrt[3]{3}\right\}\\ x-y\in\left\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\right\}\end{cases}$, unde $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Adunând şi scăzând ecuaţiile ultimului sistem se obţin nouă soluţii corespunzătoare.

L:353. Calculaţi partea întreagă a numărului $E=\sqrt{\frac{7+14\sqrt[3]{n^2+1}+8\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{1+2\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}}$ **.**

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Dovedim că $\sqrt{7}<E<\sqrt{8}$. Într-adevăr, avem succesiv

$$\sqrt{7}<E<\sqrt{8}\Leftrightarrow 7<E^2<8\Leftrightarrow 7+14\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}<$$

$$<7+14\sqrt[3]{n^2+1}+8\sqrt[3]{(n^2+1)^2}<8(1+2\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2})\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0<\sqrt[3]{(n^2+1)^2}<(1+\sqrt[3]{n^2+1})^2$, care este adevărată. Deci, $[E]=2$.

L:354. Dacă $a_1,a_2,...,a_{2k}$ **sunt cifre consecutive în ordine crescătoare într-o bază mai mare ca** a_{2k} **,**

atunci: $\overline{a_{k+1}^{a_k a_{k-1}\ldots a_1}}<\overline{a_k^{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}}$ **, unde** $k\geq 4$ **.** **Gheorghe Ghiţă**, Buzău

Rezolvare: Avem

$$\overline{a_{k+1}^{a_k a_{k-1}\ldots a_1}}<\overline{a_{k+1}^{a_k a_k\ldots a_k}}=\left(a_{k+1}^{a_k}\right)^{\underbrace{11\ldots1}_{k}}=\left((a_k+1)^{a_k}\right)^{\underbrace{11\ldots1}_{k}};$$

$\overline{a_k^{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}}>\overline{a_k^{a_{k+1}a_{k+1}\ldots a_{k+1}}}=\left(a_k^{a_{k+1}}\right)^{\underbrace{11\ldots1}_{k}}=\left(a_k^{a_k+1}\right)^{\underbrace{11\ldots1}_{k}}$. Inegalitatea este adevărată numai dacă

$(a_k+1)^{a_k}<a_k^{a_k+1}$ ceea ce este echivalentă cu $(n+1)^n<n^{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$. (*), unde s-a notat a_k cu

$n\in N^*$. Pentru $n\geq 3$ inegalitatea (*) este evident adevărată. Cum $n=a_k\geq 3$ rezultă că pentru $k\geq 4$ inegalitatea propusă este adevărată.

L:355. a) Fie $a\rangle b\rangle c\rangle d\rangle 0$. **Arătaţi că funcţia** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a^x+b^x}{c^x+d^x}$ **este injectivă .**

b) Rezolvaţi ecuaţia $9^x+25^x=15^x+\frac{19}{225}$. **Marian Cucoaneş,** Mărăşeşti, **Lucian Tuţescu,** Craiova

Rezolvare:

a) Fie $x_1,x_2\in\mathbb{R},\ x_1\rangle x_2$. Cum

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a^{x_1}+b^{x_1}}{c^{x_1}+d^{x_1}}-\frac{a^{x_2}+b^{x_2}}{c^{x_2}+d^{x_2}}=\frac{\left(a^{x_1}+b^{x_1}\right)\cdot\left(c^{x_2}+d^{x_2}\right)-\left(c^{x_1}+d^{x_1}\right)\cdot\left(a^{x_2}+b^{x_2}\right)}{\left(c^{x_1}+d^{x_1}\right)\cdot\left(c^{x_2}+d^{x_2}\right)}\rangle 0$$, deoarece se

desfac parantezele iar $a^{x_1}c^{x_2}\rangle c^{x_1}a^{x_2}$, $a^{x_1}d^{x_2}\rangle d^{x_1}a^{x_2}$, $b^{x_1}c^{x_2}\rangle b^{x_2}c^{x_1}$, $b^{x_1}d^{x_2}\rangle b^{x_2}d^{x_1}$,aşadar, rezultă că f este strict crescătoare , deci injectivă.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}+\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}}$. Cum $\frac{1}{3}\rangle\frac{1}{5}\rangle\frac{1}{3^3}\rangle\frac{1}{5^3}\Rightarrow$(din punctul a) că ecuația $f(x)=\dfrac{925}{19}$ are cel mult o soluție. Cum $f(x)=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{25}\right)^x-\left(\frac{1}{15}\right)^x}$, atunci ecuația $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{25}\right)^x-\left(\frac{1}{15}\right)^x=\frac{19}{225}$ are soluția unică -1.

L:356. Fie $x_1,x_2,.....,x_n\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), n\geq 3$ **astfel încât**

$\sin(x_1+x_2)\cdot\sin(x_2+x_3)\cdot.....\cdot\sin(x_{n-1}+x_n)\cdot\sin(x_n+x_1)\ \rangle\ 2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot....\cdot\sin x_n$ **.**

Aurel Chiriță, Slatina, **Aurel Oporanu,** Craiova

Rezolvare: Se va utiliza lema: Fie $\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\ \alpha+\beta\langle\dfrac{\pi}{2}$. Atunci, $\sin^2(\alpha+\beta)\ \rangle\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta$.

Demonstrația lemei rezultă din $\dfrac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2}\rangle\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}+\dfrac{1-\cos 2\beta}{2}\Leftrightarrow$

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-(\cos(\alpha+\beta)+1)\rangle 0\Leftrightarrow\ 2\cos(\alpha+\beta)\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\rangle 0\Leftrightarrow$

$\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta\rangle 0$.

Din lemă rezultă $\sin^2(\alpha+\beta)\ \rangle\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta\rangle 2\sin\alpha\sin\beta$. Pentru α,β înlocuind cu $x_1,x_2,.....,x_n$ rezultă $\sin^2(x_1+x_2)\ \rangle\ 2\sin x_1\sin x_2$, $\sin^2(x_2+x_3)\ \rangle\ 2\sin x_2\sin x_3$, ..., $\sin^2(x_n+x_1)\ \rangle\ 2\sin x_n\sin x_1$, relații care înmulțite membru cu membru ne vor duce la inegalitatea din enunț.

▪ Clasa a XI-a

L:357. Rezolvați ecuația $X^2=\begin{pmatrix}64 & 84\\ 112 & 148\end{pmatrix},\ X\in M_2(\mathbb{Z})$**.**

Doina și Mircea Mario Stoica, Arad

Rezolvare: Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+yz & xy+yt\\ xz+tz & yz+t^2\end{pmatrix}$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases}x^2+yz=64\\ xy+yt=84\\ xz+tz=112\\ yz+t^2=148\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+yz-yz-t^2=64-148\\ y(x+t)=84\\ z(x+t)=112\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4,y=-6,z=-8,t=-10\\ x=4,y=6,z=8,t=10\end{cases}$.

Soluțiile sunt $X_1=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ -8 & -10\end{pmatrix}$ și $X_2=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 10\end{pmatrix}$.

L:358. Fie familiile de puncte $A_n(4n+3;2n^2+5n),\forall n\in N^*$**,** $B_n(8n+7;4n^2+11n),\forall n\in N^*$**,** $C_n(12n+11;6n^2+17n),\forall n\in N^*$**. Să se demonstreze că punctele** $A_n,B_n,C_n,\forall n\in N^*$ **sunt coliniare.**

Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena, Fălticeni, Suceava

Rezolvare: Punctele $A_n, B_n, C_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sunt coliniare dacă:

$$\begin{vmatrix} 4n+3 & 2n^2+5n & 1 \\ 8n+7 & 4n^2+11n & 1 \\ 12n+11 & 6n^2+17n & 1 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in N^* \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4n+3 & 2n^2+5n & 1 \\ 4n+4 & 2n^2+6n & 0 \\ 8n+8 & 4n^2+12n & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4n+4 & 2n^2+6n \\ 2(4n+4) & 2(2n^2+6n) \end{vmatrix} = 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

L:359. Se consideră matricele $A=(a_{i,j})$ de tip $(m+1,n+1)$ şi $B=(b_{i,j})$ de tip $(n+1,m+1)$ având elementele $a_{ij}=C_n^{ij-1}$, $\forall i=\overline{1,m+1}$, $\forall j=\overline{1,n+1}$, $b_{ij}=C_m^{ij-1}$, $\forall i=\overline{1,n+1}$, $\forall j=\overline{1,m+1}$.

a) Stabiliţi dacă matricea AB este inversabuilă.

b) Calculaţi Tr(AB) şi determinaţi $\sum_{\substack{0\le i\le m \\ 0\le j\le n}} C_m^i C_n^j$. **Ionel Tudor,** Călugăreni, Giurgiu

Rezolvare:

a) Evident, $C=AB=(c_{ij})_{i,j=\overline{1,m+1}}$ unde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n+1} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}C_m^{j-1}=C_m^{j-1}(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n)=$

$=2^n C_m^{j-1}, \forall i,j=\overline{1,m+1}$. Deci, $AB=2^n\begin{pmatrix} C_m^0 & C_m^1 & ... & C_m^m \\ C_m^0 & C_m^1 & ... & C_m^m \\ ... & ... & ... & ... \\ C_m^0 & C_m^1 & ... & C_m^m \end{pmatrix}$. Rezultă, $\det(AB)=0$, adică matricea AB nu este inversabilă.

b) Din a) rezultă că $Tr(AB)=c_{11}+c_{22}+...+c_{m+1m+1}=2^n(C_m^0+C_m^1+...+C_m^m)=2^n\cdot 2^m=2^{m+n}$, respectiv,

$Tr(AB)=\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}C_m^0+\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}C_m^1+...+\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}C_m^n=(C_m^0+C_m^1+...+C_m^m)\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}=$

$=(C_m^0+C_m^1+...+C_m^m)\cdot(C_n^0+C_n^1+...+C_n^n)=2^m\cdot 2^n=2^{m+n}$.

L:360. Fie $(x_n)_{n\ge 1}$ un şir de numere reale cu $x_1=2$ şi $\ln\sqrt{x_{n+1}}=\frac{x_n-1}{x_n+1}, \forall n\ge 1$. Să se arate că $(x_n)_{n\ge 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa. **Ovidiu Ţâţan**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Se arată prin inducţie matematică faptul că şirul este mărginit inferior de 1 şi descrescător.

Mărginirea. P(n): $x_n\rangle 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$; $P(n)\Rightarrow P(n+1)$: $\ln\sqrt{x_{n+1}}=\frac{x_n-1}{x_n+1}\rangle 0\Rightarrow x_{n+1}\rangle 1$.

Monotonia. P(n): $x_{n+1}\langle x_n 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$; $P(n)\Rightarrow P(n+1)$: $\ln\sqrt{x_{n+2}}-\ln\sqrt{x_{n+1}}=\frac{2(x_{n+1}-x_n)}{(x_{n+1}+1)(x_n+1)}\langle 0\Rightarrow x_{n+2}\langle x_{n+1}$..

Aşadar, şirul este convergent. Notăm cu $l=\lim_{n\to\infty} x_n$ şi trecem la limită în relaţia de recurenţă. Obţinem ecuaţia: $\ln\sqrt{l}=\frac{l-1}{l+1}\Rightarrow l=1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=1$. (Ecuaţia are soluţia unică 1, soluţie ce se obţine eventual din studiul funcţiei $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\sqrt{x}-\frac{x-1}{x+1}$. De altfel, dacă se studia de la început funcţia anterioară, rezulta mult mai uşor monotonia şirului.)

L:361. Să se studieze natura şirului precizând limita în caz de convergenţă: $a_{n+1}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$, $a_1=1$.

Camelia Dana, Ileana Didu, Craiova

Rezolvare: Cum

$a_{m+1}-a_m=-\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k^2}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{k^2}\Rightarrow a_{m+1}-a_m=-\frac{a_m}{m^2}\Rightarrow a_{m+1}=a_m(1-\frac{1}{m^2}),m\geq 2\Rightarrow$

$a_n=a_2\prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\frac{n}{2(n-1)}$, aşadar, $(a_n)_{n\geq 1}$ converge către $-\frac{1}{2}$.

L:362. Să se determine funcţia derivabilă $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, **astfel încât** $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=x^2$ **şi** $f(e)=\frac{e^2}{2}$. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=x^2\left|\cdot\frac{1}{x}\right.\Rightarrow\ f'(x)\cdot\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}=x\Rightarrow\left(f(x)\cdot\ln x\right)'=x\Rightarrow$

$f(x)\cdot\ln(x)=\int xdx\Rightarrow\ f(x)=\frac{x^2}{2\ln x}+C$. Cum $f(e)=\frac{e^2}{2}\Rightarrow C=0$, aşadar, $f(x)=\frac{x^2}{2\ln x}$.

L:363. Se consideră funcţia $f_k:\left(-\infty;0\right]\cup\left[1;\infty\right),\ f_k(x)=\sqrt{x^2-x}-kx,$ **k număr real fixat.**

a) Calculaţi $\lim_{x\to\infty}\frac{f_{2014}}{f_{2015}}$; **b) Să se arate că** $\lim_{x\to\infty}f_k(x)=-\frac{1}{2}$; **Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-2014x}{\sqrt{x^2-x}-2015x}=\frac{2013}{2014}$; **b)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-kx\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-k\right)=\begin{cases}+\infty,k\langle 1\\-\infty,k\rangle 1\end{cases}$.

Pentru k =1 rezultă $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=-\frac{1}{2}$;

L:364. Să se determine funcţia derivabilă $f:[0,1]\to R$**, pentru care**

avem: $\sqrt[3]{\left|(x+1)f'(x)-f(x)\right|}\leq x+1\leq\frac{2(f'(x)-f(x))}{(2-x)(x+1)},(\forall)x\in[0,1]$. **si** $f(0)=\frac{1}{2}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Prima inegalitate din enunt se scrie sub forma

$(x+1)f'(x)-f(x)\leq\left|(x+1)f'(x)-f(x)\right|\leq\left(x+1\right)^3\Rightarrow\frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{\left(x+1\right)^2}\leq x+1$

$(\forall)x\in[0,1]$ **(1).**

$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'-\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)'\leq 0,$

În continuare, definim funcţia $g:[0,1]\to R$, $g(x)=\frac{f(x)}{x+1}-\frac{(x+1)^2}{2}$. Din **(1)** rezulta $g'(x)\leq 0\Rightarrow$ g este

descrescatoare pe $[0,1]\Rightarrow g(x)\leq g(0)=0\Rightarrow\frac{f(x)}{x+1}-\frac{(x+1)^2}{2}\leq 0\Rightarrow f(x)\leq\frac{\left(x+1\right)^3}{2},(\forall)x\in[0,1]$ **(2).**

Din a doua inegalitate rezultă $f'(x)-f(x)\geq\frac{(x+1)^2(2-x)}{2}$ **(3).** Acum, definim funcţia

$h:[0,1]\to R,h(x)=e^{-x}\left(f(x)-\frac{(x+1)^3}{2}\right)$ si avem $h'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)-\frac{(x+1)^2(2-x)}{2}\right)\geq 0\Rightarrow h$

este crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow h(x)\geq h(0)=0\Rightarrow f(x)\geq\frac{(x+1)^3}{2}$ **(4).** Astfel, **(2) si (4)** implică

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{2},(\forall)x\in[0,1]$.

L:365. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgxtg2x...tgnx-n!x^n}{x^{n+2}},n\in N^*$. **(In legătură cu problema 25549/GM/11/2006, Sever Pop, Baia Mare)** **Gheorghe Ghiță,** Buzău

Rezolvare: Limita dată se scrie $E_n=\lim\limits_{x\to 0}tgxtg2x..tg(n-1)x\dfrac{tgnx-nx}{x^{n+2}}+\lim\limits_{x\to 0}nx\dfrac{tgxtg2x...tg(n-1)x-(n-1)!x^{n-1}}{x^{n+2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}\cdot\dfrac{tg2x}{x}\cdots\dfrac{tg(n-1)x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgnx-nx}{x^3}+n\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgxtg2x...tg(n-1)x-(n-1)!x^{n-1}}{x^{n+1}}$.

Aplicând regula lui l'Hopital, avem: $E_n=(n-1)!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n+ntg^2nx-n}{3x^2}+nE_{n-1}=(n-1)!n\cdot\dfrac{n^2}{3}+nE_{n-1}=n!\dfrac{n^2}{3}+nE_{n-1}$.

Scriind relația obținută pentru 2, 3, …, n, avem:

$E_2=2E_1+2!\cdot\dfrac{2^2}{3}$, $E_3=3E_2+3!\cdot\dfrac{3^2}{3}$, ..., $E_n=nE_{n-1}+n!\cdot\dfrac{n^2}{3}$. Prin înmulțirea acestora cu $A_n^{n-2},A_n^{n-3},...,A_n^1,A_n^0$ şi adunarea lor, obținem:

$E_n=2E_1A_n^{n-2}+\dfrac{1}{3}\left[n!n^2A_n^0+(n-1)!(n-1)^2A_n^1+...+3!3^2A_n^{n-3}+2!2A_n^{n-2}\right]=$

$=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n!}{2!}+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n-2}(n-k)!(n-k)^2A_n^k=\dfrac{n!}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{(n+1)!(2n^2+n)}{6}$, deoarece

$E_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(tgx-x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

Pentru n = 4 se obține problema 25549/GM/11/2006.

▪ Clasa a XII-a

L:366. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ **se consideră legea de compoziție** $x\circ y=xy-4x-4y+20$. **Fie** $M=(-\infty;3]\cup[5;\infty)$. **Demonstrați că M este parte stabilă a lui** $\mathbb{R}$ **în raport cu legea de compoziție dată şi să se determine elementele inversabile ale monoidului** $(M,\circ)$.

Constantin Dinu, Buzău

Rezolvare: Fie $x\in M\Rightarrow|x-4|\geq 1$, $y\in M\Rightarrow|y-4|\geq 1\Rightarrow|x-4|\cdot|y-4|\geq 1\Leftrightarrow xy-4x-4y+16\geq 1$ sau $xy-4x-4y+16\leq -1$, de unde rezultă $xy-4x-4y+20\geq 5$ sau $xy-4x-4y+20\leq 3\Rightarrow x\circ y\in M$.

Elementul neutru $e=5\Rightarrow x'=4+\dfrac{1}{x-4}$, aşadar, mulțimea elementelor inversabile este $U(M)=\{3;5\}$.

L:367. Calculați restul împărțirii numărului $(2009^{2010})^{2011}$ **la numărul** 2011^2.

Nela Ciceu, Bacău **şi Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Avem:(1) $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m),\forall(a,m)=1$ şi (2) $\varphi(p^k)=p^{k-1}\cdot(p-1)$.

Vom lua $a=2009,m=2011^2,p=2011,k=2$ iar din (1) şi (2) rezultă că:

$(2009^{2010})^{2011}\equiv 1(\mathrm{mod}\,2011^2)$. Deci restul împărțirii numărului $(2009^{2010})^{2011}$ la numărul 2011^2 este egal cu 1.

L:368. Împărțind polinomul $f = X^m - X^n + 8$ la X-3 şi la X-9 se obțin resturile 26, respectiv 656. Determinați câtul şi restul împărțirii lui f la X+5. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: $\begin{cases} f(3)=26 \\ f(9)=656 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m - 3^n + 8 = 26 \\ 9^m - 9^n + 8 = 656 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m - 3^n = 18 \\ \left(3^m\right)^2 - \left(3^n\right)^2 = 648 \end{cases}$, Notăm $3^m = a,\ 3^n = b \Rightarrow$

$a - b = 18,\ a^2 - b^2 = 648 \Rightarrow a = 27, b = 9 \Rightarrow m = 3, n = 2$. Rezultă, $f(X) = X^3 - X^2 + 8$ iar câtul şi restul împărțirii lui f la X + 5 este $c(X) = X^2 - 6X + 30,\ r(X) = -142$.

L:369. Determinați toate funcțiile diferențiabile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, care verifică relația :

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2}{f(x)} - \frac{f'(x)}{x}.$$ **D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

Rezolvare: Eliminăm numitorii în relația dată şi obținem:
$xf(x)f''(x) + f(x)f'(x) - x(f'(x))^2 = 0$,(1). Împărțim relația (1) prin $(f(x))^2$, apoi rearanjăm termenii şi rezultă: $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{xf''(x)}{f(x)} - \frac{x(f'(x))^2}{(f(x))^2} = 0$,(2). Se observă că:

$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{xf''(x)}{f(x)} - \frac{x(f'(x))^2}{(f(x))^2} = \left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)'$, (3). Din (2) şi (3) avem: $\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = 0$,(4).

Deci, $\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right) = k$, unde $k =$ constantă. Prin urmare, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x}$ care, prin integrare conduce la

$\ln f(x) = k \ln x + C$, şi mai departe $\ln(f(x) = k \ln x + \ln a \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln ax^k$.

Aşadar, $f(x) = ax^k$. Din $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x}$, $x > 0, f(x) > 0, f'(x) > 0$, rezultă $k > 0$.

Din $f(x) = ax^k$ şi $f(x) > 0$, rezultă $a > 0$ (aceasta rezultă şi din relațiile de mai sus).

În concluzie funcțiile căutate sunt $f(x) = ax^k$, cu $a > 0$ şi $k > 0$. □

L:370. Fie f:[0;a] → R continuă şi convexă pe [0; a], a>0. Dacă b ∈ [0;a], atunci

$\int_b^a f(x)dx \le \frac{b(a-b)}{a} f(a) + \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 \int_0^a f(x)dx.$ (In legătură cu problema 23733, GM 4-5/1997, pg. 199)

Gheorghe Ghiță, Buzău

Rezolvare: Pentru a = b, inegalitatea este adevărată,
Fie x ∈ [b; a), x = b + t(a – b) = ta +(1-t)b ∈ [b; a], t ∈ [0; 1]. Cum funcția f este convexă, avem:

$$f(x) = f\big(b + t(a-b)\big) = f\left(\frac{b}{a}\cdot a + \frac{a-b}{a}\cdot at\right) \le \frac{b}{a}\cdot f(a) + \frac{a-b}{a}\cdot f(at) \Leftrightarrow f(x) \le \frac{b}{a}\cdot f(a) + \frac{a-b}{a} f\left(a\frac{x-b}{a-b}\right).$$

Prin ipoteză f este convexă şi atunci şi $f\left(a\frac{x-b}{a-b}\right)$ este convexă, şi deci sunt integrabile pe [b; a).

Integrând ultima inegalitate pe [b; a), obținem: $\int_b^a f(x)dx \le \int_b^a \frac{b}{a} f(a)dx + \int_b^a \frac{a-b}{a} f\left(a\frac{x-b}{a-b}\right)dx$.

In ultima integrală facem schimbarea de variabilă: $a\frac{x-b}{a-b} = \varphi(x)$, $\varphi'(x) = \frac{a}{a-b}$, şi atunci inegalitatea devine:

$$\int_b^a f(x)dx \le \frac{b(a-b)}{a} + \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 \cdot \int_0^a f(x)dx.$$

Observație. Pentru a = 1, b = $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ se obține problema 23733, GM 4-5/1997, pg. 199. Soluția este mai simplă decât solutia publicată a problemei amintite.

L:371. Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$**, cu proprietatea** $x^2 f(x) \geq e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. **Să se demonstreze că funcția f nu admite primitive.** **Florin Nicolaescu,** Balş, Olt

Rezolvare: Se face substituția $x \to \frac{1}{x}$ rezultând $\frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) \geq e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) + e^x \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Fie $F:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ o primitivă pentru f. Atunci, $\left(F(\frac{1}{x}) + e^x \right)' \leq 0 \Rightarrow G:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(\frac{1}{x}) + e^x$ este descrescatoare pe $\mathbb{R}^*$, iar $G(1) = F(1) + e \geq \lim\limits_{x \to \infty} G(x) = F(0) + \infty = \infty$, contradicție, deci f nu admite primitive.

L:372. Fie $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ **o funcție derivabilă astfel încat** $\int\limits_0^1 f(x)dx = f(1) = 1$ **. Arătați că există** $c \in (0;1)$ **astfel încât** $f(c) - f'(c) = 1$ **.** **Florin Stănescu,** Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Fie $h:[0;1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-x}(x - \int\limits_0^x f(t)dt)$. Din $h(0) = h(1) = 0 \Rightarrow \exists a \in (0;1)$ astfel încât $h'(a) = 0$ de unde rezultă $-a + 1 - (f(a) - \int\limits_0^a f(t)dt) = 0$, (1). Pentru $a \in (0;1)$ determinat anterior definim funcția $g:[a;1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 1 - (f(x) - \int\limits_0^x f(t)dt)$. Din (1) şi din enunț rezultă că $g(a) = g(1) = 0 \Rightarrow$ $\exists c \in (0;1)$ astfel încât $g'(c) = 0 \Rightarrow -1 - f'(c) + f(c) = 0 \Rightarrow f(c) - f'(c) = 1$.

L:373. Se consideră funcția $f:[-1;1] \to \mathbb{R}$**, f continuă cu proprietatea** $f(x) + f(-x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $\forall x \in [-1;1]$. **Să se calculeze integrala** $I = \int\limits_{-1}^1 f(x)dx$ **.**

Adrian Stan, Buzău

Rezolvare: $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = \int\limits_{-1}^0 f(x)dx + \int\limits_0^1 f(x)dx$. Cum $\int\limits_{-1}^0 f(x)dx = \int\limits_1^0 f(-t)\cdot(-dt) = -\int\limits_0^1 f(-t)\cdot(-dt) = \int\limits_0^1 f(-x)dx$

$$I = \int\limits_{-1}^0 f(x)dx + \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(-x)dx + \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x\Big|_0^1 - arctgx\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

L:374. Calculați $\int\limits_{\log_3 2}^{\log_3 5} \frac{1}{3^x + 2}dx$ **;** **Constantin Dinu,** Buzău

Rezolvare: Se face substituția $3^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{dt}{3^x}$, atunci, $\int \frac{1}{3^x+2}dx = \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{t}{t+2} = C$

$$\int\limits_{\log_3 2}^{\log_3 5} \frac{1}{3^x+2}dx = \frac{1}{\ln 9} \ln \frac{3^x}{3^x+2}\Bigg|_{\log_3 2}^{\log_3 5} = \frac{1}{\ln 9}\left(\ln \frac{5}{7} - \ln \frac{2}{4}\right).$$

„” Explozibilul cel mai puternic nu este toluenul,
nici bomba atomică, ci ideea omenească”.
Grigore C. Moisil

4. Probleme propuse

▪ Învățământ primar

P:327. În trei lăzi sunt 160 kg de mere. După ce s-a vândut un sfert din cantitatea din prima ladă, în cele 3 lăzi au rămas cantități egale. Câte kg de mere au fost la început în fiecare ladă?

Anton Maria, Berca

P:328. Suma a 5 numere este 100. Dacă măresc primul număr cu 2, pe al doilea îl micşorez cu 3, pe al treilea îl măresc de 4 ori, pe al patrulea îl micşorez de 5 ori, obțin de fiecare dată al cincilea număr. Aflați numerele.

Ilie Laura , Buzău

P:329. Suma a trei numere este 1818. Dacă micşorăm cu 100 jumătatea primului număr, cu 200 jumătatea celui de-al doilea număr şi cu 300 jumătatea celui de-al treilea, obținem trei numere consecutive în ordine crescătoare. Află cele trei numere.

Lupşan Cristian-Cosmin,Buzău

P:330. Pentru paginarea unei cărți s-au folosit 1440 de cifre. De câte ori s-a folosit cifra 2?

Lupşan Ion, Berca

P:331. În ograda sa, un țăran avea găini, gâşte şi rațe. Ştiind că 38 nu sunt rațe, 35 nu sunt găini, iar 51 nu sunt gâşte, aflați care este numărul minim de păsări pe care ar trebui să le cumpere țăranul pentru a avea un număr egal de rațe, gâşte şi găini?

Lupşan Mirela, Buzău

P:332. Tatăl, mama, fiul şi fiica au împreună 71 de ani. Câți ani are fiecare dintre ei, dacă tatăl şi fiul au împreună de 6 ori vârsta fiicei, iar mama şi fiica au împreună de 7 ori vârsta fiului; fiul este mezinul familiei, iar vârsta fiului şi vârsta fiicei sunt reprezentate de numere consecutive.

Lupşan Nicoleta-Gabriela, Berca

P:333. O gospodină a cumpărat 6 lădițe cu cireşe. Ştiind că în 8 lădițe sunt cu 42 kg mai puține decât în 15 lădițe de acelaşi fel, ce cantitate de cireşe a cumpărat gospodina?

Dacă din 4 kg de fructe ies 5 borcane de gem, aflați câte borcane cu gem s-au obținut din întreaga cantitate de cireşe.

Lupşan Nicuşor Octavian, Buzău

P:334. Diana vrea sa afle vârstele bunicilor săi.Bunica îi spune că împreună cu bunicul au produsul numerelor 2 , 2, 3 şi 11. Bunicul îi spune că el este mai mare cu 12 ani decât bunica.Diana începe să socotească. Ajutați-o!

Marinescu Gabriela, Vadu Paşii

P:335. Un fermier are de 7 ori mai multe rațe decât gâşte. Dacă ar vinde 15 rațe şi ar cumpăra 3 gâşte, atunci numărul rațelor ar deveni de 4 ori mai mare decât al gâştelor. Câte rațe şi câte gâşte are fermierul?

Nencu Karina,Buzău

P:336. Într-o tabără sunt de 2 ori mai mulți băieți decât fete. După ce au plecat 35 băieți şi au venit 28 fete, numărul băieților a devenit egal cu numărul fetelor. Câte fete şi câți băieți au fost la început în tabără?

Rotărescu Viorel, Vadu Paşii

P:337. Matei, Corina şi Alin au colecționat timbre. Câte timbre a colecționat fiecare copil dacă Matei şi Corina au colecționat 46 timbre, Corina şi Alin 54 timbre, iar Matei şi Alin 64 timbre.

Rotărescu Viorica, Vadu Paşii

P:338. O echipă de muncitori au de reparat o autostradă. Aceasta măsoară întreitul numărului 140. În prima zi s-a reparat un sfert din distanță, a doua zi două treimi din rest, iar a III-a zi, diferența.

Câți kilometri s-au reparat în fiecare din cele trei zile?

Ticea Daniela, Buzău

P:339. Radu are vârsta de 10 ori mai mică decât cea a mamei, iar vârsta tatălui este suma vârstelor celor doi. Ce vârstă are fiecare ştiind că vârsta tatălui este cel mai mare număr natural care împărţit la 9 dă câtul 4?

Toader Roxana- Violeta , Buzău

P:340. Pe un patinoar sunt copii, tineri şi adulţi. Diferenţa dintre copii şi tineri este de 2 ori mai mare decât numărul adulţilor, ea însemnând o treime din numărul copiilor. Câţi patinatori sunt, dacă numărul adulţilor este 23.

Vrabie Marioara ,Berca

P:341. Suma a patru numere naturale este 2408. Aflaţi numerele ştiind că primele trei sunt pare consecutive , iar al patrulea este o treime din suma celorlalte trei.

Marcela Marin , Rm. Sărat

▪ Clasa a V-a

G:499. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Dacă două cincimi din ei participă la concursul de matematică şi cinci şesimi la concursul de română, aflaţi câţi participă la ambele.

Claudia Popa, Berca, Buzău

G:500. Să se afle trei numere ştiind că îndeplinesc următoarele condiţii : primul este cu 11 mai mare decât al doilea , al doilea este de patru ori mai mic decât al treilea , iar al treilea este cu 1 mai mare decât primul .

Marin Simion, Rm . Sărat

G:501. Determinaţi numerele naturale x, diferite de zero, care împărţite la 1986 dau ca rest pătratul câtului.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:502. Fie numărul natural $a=\underbrace{111...1}_{2014\ de\ 1}+\underbrace{222...2}_{2014\ de\ 2}+.....+\underbrace{555...5}_{2014\ de\ 5}$. Determinaţi câte cifre de 6 conţine conţine numărul a.

Cornelia Gurău, Moineşti, Bacău

G:503. Să se calculeze A^{2015}, unde $A=2^{2015}-2^{2014}-2^{2013}-...-2^2-2-1$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:504. Scrieţi numărul 169^n ca sumă de două pătrate perfecte.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:505. După ce se amplifică prin 3, o fracţie subunitară devine simplificabilă cu 6. Aflaţi fracţia,ştiind că termenii ei sunt cuburi cu suma 224. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

G:506. Arătaţi că numerele $a=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{2014}$ şi $b=32^{403}-1$ sunt egale.

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

G:507. Arătaţi că numărul $2013\cdot2014\cdot2015+2014$ este cub perfect.

Radu Ion, Bozioru, Buzău

G:508. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\overline{ab}+\overline{ba}$ şi $\overline{ab}-\overline{ba}$ sunt pătrate perfecte.

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

G:509. Dacă $a,b,c>0$, astfel încât $abc=1$, să se arate că : $\frac{ab}{1+a+ab}+\frac{bc}{1+b+bc}+\frac{ca}{1+c+ca}=1.$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:510. Suma a "**p**" numere naturale consecutive, este 2015. Care sunt aceste numere , dacă "**p**" este un divizor , număr natural prim , al lui 2015 ?

Mariana Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VI-a

G:511. Dacă $\overline{ab}$ este număr prim , aflaţi câţi divizori are numărul n = $\overline{ababab}$.

Marin Simion , Rm. Sărat

G:512. Rezolvați în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația: $|x-2010|+y^2-3y=4$. **Mircea Mario Stoica**, Arad

G:513. Aflați măsura unghiului al cărui suplement este de 91 de ori mai mare decât complementul său.
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:514. Fie mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x=\frac{m}{n},m\in D_8,n\in D_4\right\}$. Calculați produsul elementelor mulțimii A.

Cornelia Gurău, Moineşti, Bacău

G:515. Să se compare numerele raționale pozitive $\frac{x+5^{806}}{x+2^{2015}}$ şi $\frac{y+4^{2013}}{y+7^{1342}}$, $\forall x,y\in\mathbb{N}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:516. Suma şi câtul a 2 fracții au valoarea $n\in\mathbb{N}^*$. Comparați fracțiile şi determinați fracțiile pentru n=2015.

Ion Stănescu, Smeeni, Buzău

G:517. Determinați toate numerele naturale n astfel încât $n(n^2+3n+2)$ să fie pătrat perfect.
D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu, Buzău**

G:518. Găsiți forma ireductibilă a fracției $\frac{\overbrace{290290290...29029}^{3n+2\ cifre}}{\underbrace{140140140...14014}_{3n+2\ cifre}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

G:519. Fie triunghiul ABC, în care I este centrul cercului înscris. Facem notațiile : $x=m(\widehat{BIC})-m(\widehat{A})$, $y=m(\widehat{AIC})-m(\widehat{B})$ şi $z=m(\widehat{AIB})-m(\widehat{C})$. Arătați că numerele x, y, z pot fi măsurile unghiurilor unui triunghi ascuțitunghic.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:520. În triunghiul ABC isoscel fie M mijlocul bazei [BC], $P\in AM$ şi $N\in MB$ astfel încât $[MP]\equiv[MB]$ şi $[MN]\equiv[MA]$. Arătați că $NP\perp AC$.

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

G:521. Pe dreapta d se iau punctele A, B, C, D, E astfel încât AB=1cm, BC=2AB, CD=2BC, DE=2CD. Se construiesc apoi triunghiurile echilaterale ABF, BCG, CHD, DIE (F, H de o parte a lui d ; G, I de cealaltă parte). Demonstrați că : HE=CI, $GI\perp GH$, iar dacă $HE\cap d=\{Q\}$ arătați că punctele Q, G, I sunt coliniare, iar [QA este bisectoarea unghiului $\widehat{GQH}$.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VII-a

G:522. Dacă $\frac{a+2}{a-1}=\frac{b+8}{b+2}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$, atunci, să se determine valoarea maximă a raportului $\frac{a}{b}$.

Adrian Stan, Buzău

G:523. Rezolvați ecuația $\frac{x^2-2014^2}{2}+\frac{x^2-2014^2}{3}+.....+\frac{x^2-2014^2}{2015}=0$. **Claudia Popa**, Berca,Buzău

G:524. Arătați că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{4058210}}{4029}\le 1007$. **Gheorghe Dârstaru,** Buzău

G:525. Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât: $x^2y^2-x^2-xy-x-y^2+y+2=0$.
D.M.Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

G:526. Pentru $a,b\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n \rangle 1+n\cdot\frac{a}{b}$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, şi să se compare numerele 3^{2014} şi $7\cdot 2^{3025}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

G:527. Determinați numărul soluțiilor întregi ale inecuației: $|x|+|y|\langle 2011$.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:528. Arătați că suma $S=\frac{2014}{1\cdot 4}+\frac{2014}{4\cdot 7}+\frac{2014}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{2014}{2011\cdot 2014}$ este un număr natural divizibil cu 11.

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

G:529. Determinați cele mai mici numere naturale nenule a, b şi c, ştiind că a şi b + c sunt proporționale cu 2 şi 14, b şi c + a sunt proporționale cu 5 şi 11, iar c şi a + b sunt proporționale cu 9 şi 7.

Constantin Apostol,Rm. Sărat

G:530. În patrulaterul convex ABCD avem $m(\hat{A})=70^0$, $m(\hat{B})=50^0$, $m(\hat{D})=100^0$, $[BC]=[DC]$. Arătați că: $[BC]=[AD]$.

Radu Ion, Bozioru, Buzău

G:531. Într-un trapez laturile neparalele sunt congruente cu baza mică . Ştiind că unul din unghiuri are măsura de 120^0, iar distanța dintre mijloacele diagonalelor este de 12 cm , determinați perimetrul şi aria trapezului. **Marin Simion** , Rm. Sărat

G:532. Se consideră rombul ABCD de centru O şi fie $E\in AC$, iar $BE\cap AD=\{F\}$, $BE\cap CD=\{M\}$, $BD\cap CF=\{P\}$ şi $MP\cap BC=\{N\}$. Arătați că punctele N,O,F sunt coliniare dacă şi numai dacă 2AE=EC.

Mariana Mitea, Cugir, Alba

▪ Clasa a VIII-a

G:533. Rezolvați ecuația $x+[x]=\{x\}=54$, $x\in\mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Mircea Mario Stoica, Arad

G:534. Să se determine cel mai mic număr natural n, pentru care numărul $\sqrt{n}$ are primele două zecimale 99.

Ionel Tudor, Călugăreni, **Viorica Dogaru**, Giurgiu

G:535. Arătați că pentru orice număr real $x\geq -1$ avem $\sqrt{2x+11-6\sqrt{2(x+1)}}\ \langle\ \frac{x+9}{2}$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

G:536. Calculați A^{2011} ştiind că $A=\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}\cdot(a^2+a+1)$, $a\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G:537. 1) Arătați că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{4(a-1)^2+8(a-1)+13}+\sqrt{5(a-1)^2+10(a-1)+21}+\sqrt{6(a-1)^2+12(a-1)+31}\geq 12.$$

Alexandru Elena-Marcela, Baia , Suceava

G:538. Rezolvați ecuația

$$\sqrt{\left(4\sqrt{7}-1-5-5^2-\ldots-5^n\right)\left(10\sqrt{3}n+4\sqrt{7}-1-5-5^2-\ldots-5^n\right)+75n^2}=\frac{5^{2n-3}-1}{4}-4\sqrt{7}-5\sqrt{3}n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

Sorina Văcărean, Cluj-Napoca

G:539. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5}\\ x^2+y^2=13\end{cases}$. **Claudia Popa**, Berca, Buzău

G:540. Fie $a,m,p\in\mathbb{R}_+^*$, cu $m\neq 1$. Ştiind că $a_1=am+p$, $a_2=a_1m+p,\cdots$, $a_n=a_{n-1}m+p$ şi că $a_1=a_4$, calculaţi suma $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

G:541. Să se arate că : triunghiul ABC este dreptunghic isoscel dacă şi numai dacă $S=\dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{4}$ (notaţiile sunt cele obişnuite).

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

G:542. Arătaţi că într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care o faţă laterală formează cu planul bazei mari un unghi de 30^0, raportul dintre aria secţiunii diagonale şi aria unei feţe laterale este egal cu cos 45^0. **Marin Simion** , Rm. Sărat

G:543. Fie pătratul ABCD de latură AB=28cm, iar E$\in$ CD astfel încât 3DE=EC şi AC$\cap$ BE={P}. Fie PH$\perp$ (ABC), PH=$2\sqrt{6}$ cm. Arătaţi că HB$\equiv$HD. Calculaţi HA, HB, HC şi HD . Aflaţi măsura unghiului diedru plan dintre (HBD)şi (ABC). **Mariana Mitea**, Cugir, Alba

▪ Clasa a IX-a

L:375. Să se determine $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ astfel încât ecuaţia $(m^2-1)\cdot 9^x+(m+1)\cdot 3^x+2=0$ să aibă o singură soluţie reală.

Adrian Stan, Buzău

L:376. Arătaţi că numărul $a=\sqrt{\underbrace{99.....9}_{2014\ cifre}+2\underbrace{00....0}_{1006\ de\ 0}2}$ este natural. **Gheorghe Dârstaru**, Buzău

L:377. Să se rezolve ecuaţia $[2x+2015]-[x+2016]=\{x+2017\}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:378. Să se arate că $\dfrac{\left(\frac{30}{7}\right)^x+\left(\frac{35}{6}\right)^x+\left(\frac{42}{5}\right)^x}{5^x+6^x+7^x}\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **IulianaTraşcă,** Olt

L:379. Aflaţi numerele reale x, astfel încât raportul $\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-x+2}$ să fie număr natural.

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:380. Demonstraţi inegalitatea $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq\dfrac{\sum a^2b+2\sum a^2+2\sum a}{18}$, unde $a,b,c\geq 0$.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:381. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\dfrac{7-x}{4}\right]+\left[\dfrac{7-2x}{4}\right]+\left[\dfrac{7-3x}{4}\right]=\dfrac{5x-3}{8}$, $x\in\mathbb{R}$. **Sorina Văcărean**, Cluj-Napoca

L:382. Se consideră numerele reale pozitive a,b,c , astfel incat $a+b+c+2\leq abc$.

Demonstraţi inegalitatea: $\dfrac{ab}{(2+a^2)(2+b^2)}+\dfrac{bc}{(2+b^2)(2+c^2)}+\dfrac{ca}{(2+c^2)(2+a^2)}\leq\dfrac{1}{3}$.

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmboviţa

L:383. Dacă în paralelogramul $ABCD$, punctele M , N,P,Q sunt mijloacele laturilor BC , CD, MC, CN atunci : $\overline{AM}+\overline{AN}+\overline{AP}+\overline{AQ}=\frac{13}{4}\overline{AC}$.

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

L:384. Fie ABC un triunghi oarecare de laturi a , b , c , A'B'C' un triunghi de laturi $(a',b',c')=(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ şi A"B"C" un triunghi de laturi $(a",b",c")=(\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2},\cos\frac{C}{2})$. Notăm cu R , r razele cercurilor circumscris , respectiv înscris în triughiul ABC şi cu $m_a^{'},m_a^{"}$, respectiv $h_a^{'},h_a^{"}$ medianele , respectiv înălţimile corespunzătoare laturilor a' si a" ale triunghiurilor A'B'C' si A"B"C".

Demonstraţi că : $\frac{R}{2r}\geq\frac{m_a^{'2}}{h_a^{'2}}\frac{m_a^{"2}}{h_a^{"2}}$.

Vasile Jiglău , Arad

▪ Clasa a X-a

L:385. Arătaţi că $\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{1960}}+\frac{1}{\sqrt{1961}}\right]=87$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Mircea Mario Stoica, Arad

L:386. Să se rezolve ecuaţia $243^x+6\cdot 27^x+12+\frac{8}{27^x}=27$.

Adrian Stan, Buzău

L:387. Să se determine $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ pentru care $\sqrt[n]{1+2n\sqrt{n}+n^2}=1+\sqrt{n}$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

L:388. Să se demonstreze inegalitatea $2\cdot\log_2 2014+13\cdot\log_{2014}2>10$

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni

L:389. Rezolvaţi ecuaţia: $\cos 3x-4\sin^2 x+2=0$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

▪ Clasa a XI-a

L:390. Fie matricea $X=\begin{pmatrix}30 & 28\\ 51 & 53\end{pmatrix}$. Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $X^2=x\cdot X+y\cdot I_2$

Doina Stoica, Mircea Mario Stoica, Arad

L:391. Dacă $A,B\in M_3(R)$ a.î. $A+B+AB=0$ şi $AB=\begin{pmatrix}2010 & 2011 & 2012\\ 2013 & 2014 & 2015\\ 2016 & 2017 & 2018\end{pmatrix}$, calculaţi BA .

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

L:392. În sistemul cartezian de coordonate se dau punctele $A(2,0)$, $B(0,3)$ şi $C(\alpha,\beta)$ unde $\alpha,\beta\in R$.

a)Să se arate că punctele $A,\ B$ şi C sunt vârfurile unui triunghi $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2\alpha+1 \\ 1 & 10 & 3\beta+1 \\ 2\alpha+1 & 3\beta+1 & \alpha^2+\beta^2+1 \end{vmatrix} \neq 0$;

b)Dacă punctul C descrie dreapta $(d): x+y=1$, atunci determinați mulțimea de puncta generate de centrul de greutate al ΔABC.

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:393. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{3^k},\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$. Să se studieze convergența şirului dat şi să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\beta(x)}=0,$ unde $\beta(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{kx}(\alpha^x-1)$.

Stelian Piscan, Giurgiu

L:394. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ două matrice, astfel încât $(AB)^2+(BA)^2=2AB^2A.$

a) Arătați că $AB^2A=BA^2B.$

b)Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ sunt doua matrice cu urma nenulă,pentru care avem $AB+BA=O_2$ arătați că $(TrA)^2+(TrB)^2=Tr(A^2+B^2)$

Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița

L:395. Fie familiile de puncte $A_n\left(2n+1;\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right),\ B_n\left(8n+7;\sum_{k=1}^{n}(8k+7)\right),\ C_n\left(14n+13;\sum_{k=1}^{n}(14k+13)\right),$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că punctele $A_n,B_n,C_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ sunt coliniare.

Elena şi Constantin Ciobîcă, Fălticeni, Suceava

▪ Clasa a XII-a

L:396. Calculați $\int_0^3 \max(\ln(x^2+1),2)dx$**;** **Constantin Dinu**, Buzău

L:397. Să se arate că $\int_{2p+1}^{2p+\frac{3}{2}} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x+k-1}{n}\right]}dx < \frac{n+2p}{2n},\ \forall n\in\mathbb{N},n\geq 2,p\in\mathbb{N}^*.$ **Stelian Piscan**, Giurgiu

L:398. Dacă $f:[0,1]\to R^+$ este continuă şi verifică condiția $\int_0^1 (f(x))^2dx=1$, determinați:

$\max\left(\int_0^1 f(x)x^{2014}dx\right)$ şi funcția care realizează acest maxim.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

L:399. Să se demonstreze că $\int_0^1 x^2e^{x^2}dx<\frac{e}{\sqrt{5}}$. De ce semnul egal nu este posibil?

Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

L:400. Să se arate că ecuația $x^4-6x^3+12x^2-12x+6=0$ nu are toate rădăcinile reale şi să se rezolve în $\mathbb{C}$. **Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

" The most difficult thing in life is to know yourself ".
Thales

6. QUICKIES

A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before September 30, 2015.

PROPOSALS - QUICKIES

Q17. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.

Let $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. **Compute** $\lim_{n\to\infty}(e - E_n)\cdot(n+1)!$.

Q18. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that in all triangle ABC **holds** $\sum \frac{\sin A}{\sin B} \le \frac{s^2 - r^2 - 4Rr}{3Rr}$.

Q19. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that if $a,b,c>0$ **and** $x \in R$ **then** $\sum \frac{a^3}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Q20. Proposed by Neculai Stanciu, Buzău, Romania and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Prove that if $a,b,c>0$, **then** $\sum a^2 \ge \sum ab + \frac{1}{8}\sum \left(|a-c|+|b-c|\right)^2$.

SOLUTIONS – QUICKIES

Q13. Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucharest, Romania.
Calculate $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[2(n+1)]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n+1)} - \sqrt[2n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n}\right)\sqrt{n}$.

Solution 1 of Q13 by author. Denoting $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, we have:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \overset{Cauchy-D'Alembert}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right) = e.$$

$$x_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!} - \sqrt[2n]{n!}\right) = \sqrt{n}\cdot\sqrt[2n]{n!}\cdot(u_n - 1) = \frac{\sqrt[2n]{n!}}{\sqrt{n}}\cdot(u_n-1)\cdot n =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\cdot\frac{u_n - 1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n, \forall n \ge 2, \text{ where } u_n = \frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}}{\sqrt[2n]{n!}} = \frac{\sqrt[2(n+1)]{(n+1)!}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[2n]{n!}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

So, $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{e}\cdot\sqrt{\frac{1}{e}}\cdot 1 = 1$, follows $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$. We have:

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}} = \sqrt{e}\cdot$$

Therefore, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\frac{1}{e}}\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty} u_n^n\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.Solution 2 of Q13 by Angel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain and Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania (slightly modified by editor).

Let $a_n = \sqrt[n]{n!}$. We have $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{e}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$. Then

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{\frac{(n+1)a_{n+1}}{n}}+\sqrt{\frac{a_n}{n}}}=\frac{\frac{1}{e}}{\sqrt{1\cdot\frac{1}{e}}+\sqrt{\frac{1}{e}}}=\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Q14. Proposed by Mihály Bencze, Braşov, Romania.

Prove that $\left(1+\frac{8}{\sum\frac{a}{b}}\right)\left(1+\frac{8}{\sum\frac{b}{a}}\right)\geq\frac{121}{\sum\frac{a}{c}\sum\frac{c}{a}}$ for any positive real numbers a,b and c.

Solution 1 of Q14 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. By AM-GM inequality we obtain

$\sum\frac{a}{b}\geq 3$ and $\sum\frac{b}{a}\geq 3$. Yields that $\left(1+\frac{8}{\sum\frac{a}{b}}\right)\left(1+\frac{8}{\sum\frac{b}{a}}\right)=\frac{\sum\frac{a}{b}+8}{\sum\frac{a}{b}}\cdot\frac{\sum\frac{b}{a}+8}{\sum\frac{b}{a}}\geq\frac{121}{\sum\frac{a}{b}\sum\frac{b}{a}}$,

q.e.d.

Solution 2 of Q14 by Angel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
By changing variables $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a},x,y,z>0$, the proposed inequality may be written as

$(x+y+z+8)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+8\right)\geq 121\leftrightarrow$

$\leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+8\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}\right)+64\geq 121$, which yields by well-knowns inequalities $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ and $x+\frac{1}{x}\geq 2$ and other two similar.

Q15. Proposed by Neculai Stanciu, Buzău, Romania.
Prove that in any triangle ABC holds

$$(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)\leq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Solution 1 of Q15 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania. The sum of numbers $3a-b-c,3b-a-c,3c-a-b$ is positive, also the sum of any two of this numbers. If one of the numbers $3a-b-c,3b-a-c,3c-a-b$ are negative, then the given inequality is true. If all of the numbers $3a-b-c,3b-a-c,3c-a-b$ are positive , then by AM-GM inequality, we obtain that $\sqrt{(3a-b-c)(3b-a-c)}\leq\frac{3a-b-c+3b-a-c}{2}=a+b-c$.
Writing other two similar inequalities and adding up yields the desired inequality.

Solution 2 of Q15 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania
Using the identities $\sum ab=p^2+r^2+4Rr,\prod a=4pRr$ and $\sum a=2p$, we get

$\prod(3a-b-c)=\prod(4a-2p)=8\prod(2a-p)=8\left(8\prod a-4p\sum ab+2p^2\sum a-p^3\right)=$

$=8p\left(16Rr-4r^2-p^2\right)$.

Taking account of the $\prod(a+b-c)=8pr^2$ the inequality is equivalent to

$16Rr-4r^2-p^2\leq r^2$ or $p^2\geq 16Rr-5r^2$

which is exactly the Gerretsen Inequality.
Also solved by Angel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

Q16. Proposed by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.

Prove that in a any triangle ABC holds $\sqrt{\frac{a}{p-a}}+\sqrt{\frac{b}{p-b}}+\sqrt{\frac{c}{p-c}}\geq 3\sqrt{2}$.

(related to problem 26737 from G.M-B.–No. 3 / 2013)

Solution 1 of Q16 by author. The given inequality is successively equivalent to

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}+2\left(\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}+\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}+\sqrt{\frac{ca}{(p-c)(p-a)}}\right)\geq 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}+2\left(\cos ec\frac{A}{2}+\cos ec\frac{B}{2}+\cos ec\frac{C}{2}\right)\geq 18$$, which yields by

$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\geq 6$ and $\cos ec\frac{A}{2}+\cos ec\frac{B}{2}+\cos ec\frac{C}{2}\geq 6$ (see for e.g. the item 2.51 from ''Geometric Inequalities'' , by *O. Bottema*, et all, Groningen 1969).

Solution 2 of Q16 by Angel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Spain (slightly modified by editor).

Note that $\frac{a}{p-a}=\frac{2a}{b+c-a}$. Changing variables by doing $x=b+c-a, y=a-b+c$, and $z=a+b-c$, where $x,y,z\geq 0$ the proposed inequality reads

$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\geq 3\sqrt{2}$, which yields by AM-GM inequality. Indeed,

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\geq 3\sqrt[6]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}\geq 3\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}}{xyz}}=3\sqrt[6]{8}=3\sqrt{2}.$$

Solution 3 of Q16 by Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramureş, Romania

Using the identities $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, abc=4pRr, a=2R\sin A$ and $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, we get

$$\sum\sqrt{\frac{a}{p-a}}=\sum\frac{\sqrt{\frac{pa}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\sum\frac{\sqrt{p}a}{\sqrt{abc}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{abc}}\cdot\sum\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=4R\sqrt{\frac{p}{4Rpr}}\sum\sin\frac{A}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{4R}{r}}\sum\sin\frac{A}{2}.$$

Then, using the equality $\prod\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{4R}$ and the AM-GM Inequality, we get

$$\sqrt{\frac{4R}{r}}\sum\sin\frac{A}{2}\geq\sqrt{\frac{4R}{r}}\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sin\frac{A}{2}}=3\sqrt{\frac{4R}{r}}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}=3\sqrt[6]{\frac{4R}{r}}\geq 3\sqrt{2}$$

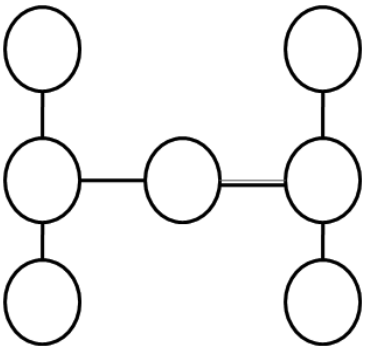
taking account of the Euler Inequality $R\geq 2r$.

“ Matematica se face oriunde, oricând şi oricum “.
Grigore C. Moisil

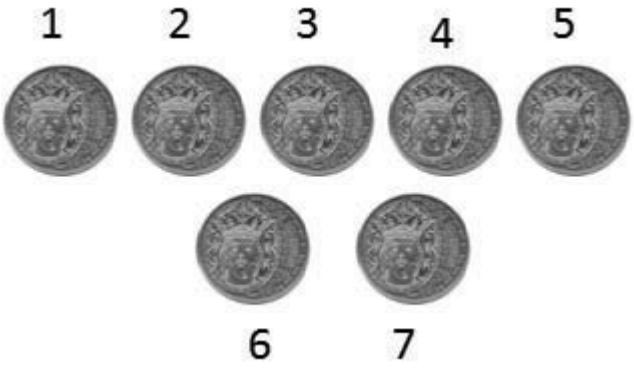
7. Caleidoscop matematic

1. Să se determine numerele cu proprietatea că dacă le scriem pe ele şi descompunerea lor în factori primi, se foloseşte o singură dată toate cifrele de la 0 la 9.

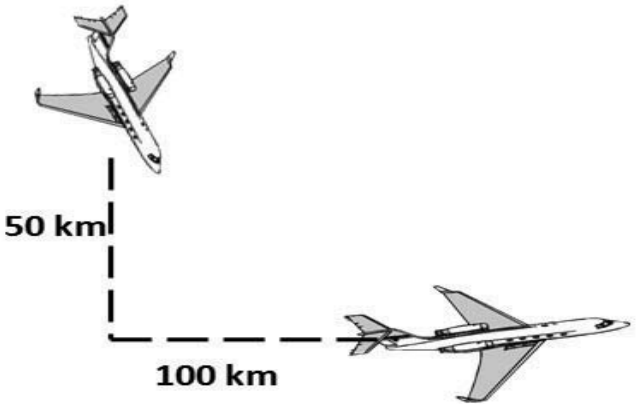
Titu Zvonaru, Comăneşti



2. În cerculețele alăturate, puneți una din cifrele de la 0 la 9, o singură dată, astfel încât produsul pe fiecare linie respectiv coloană să fie acelaşi.

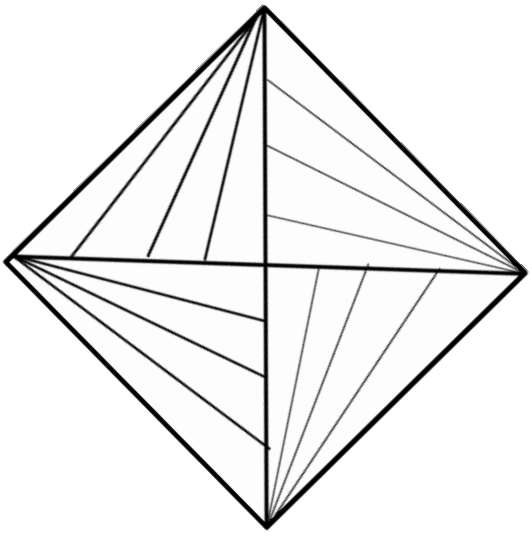


3. Avem alăturat şapte monezi având stema în sus. Este permisă numai întoarcerea simultană a cinci monede. Respectând această regulă, să se spună câte mişcări sunt necesare pentru a le întoarce pe toate cu stema în jos.



4. Un avion decolează de la Polul Nord şi zboară spre polul Sud, 50 km. Apoi zboară spre est încă 100 km. La ce distanță se află avionul de Polul Nord ?

5. Câte triunghiuri se pot identifica în figura alăturată?



(Răspunsuri la pagina 51.)

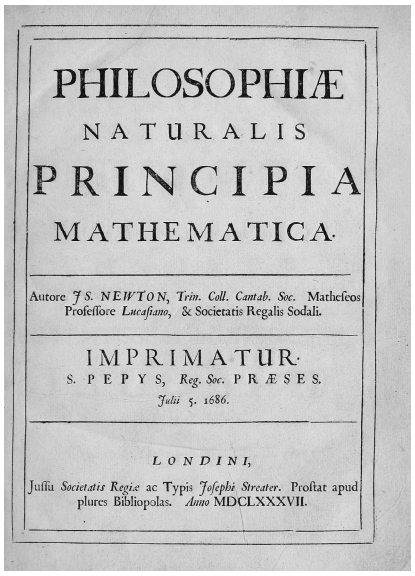
Ştiaţi că ....?

Edmond Halley (08.11.1656 – 14.01.1742 a fost astronom şi matematician englez ce a determinat metoda de măsurare a distanţei dintre două stele.

După numele său a fost numită şi **cometa Halley**, care a fost observată şi consemnată pentru prima data de către chinezi acum circa 239 î.e.n. Mişcarea sa periodică în jurul Soarelui devine vizibilă în jurul Pământului la circa 77 e ani şi de obicei oamenii de rând considerau că aceasta prevestea ceva rău ca şi în 160 î.e.n, o dată cu răzvrătirea iudeilor împotriva dominaţiei Seleucide sau în 1066 în bătălia de la Hastings a lui William Cuceritorul (1027 - 1087) în care acesta a crezut că e de bun augur pentru el.

Ultima dată, cometa a fost vizibilă în 1986 şi va mai fi vizibilă următoarea dată în 2061. El a observat că unele comete apărute în 1456, 1607, şi 1682 au manifestări periodice şi sunt de fapt una şi aceeaşi cometă care ar trebui să revină şi în 1758. El nu a mai trăit până atunci, dar oamenii care au văzut cometa, au fost impresionaţi de această prevestire şi au numit-o de atunci, **cometa Halley.**

Cel care a ocupat funcţia de astronom regal în cadrul Observatorului Regal de la Greenwich, profesor la Universitatea din Oxford şi membru al Societăţii Regale de la Londra a oamenilor de ştiinţă, Edmond Halley, rămâne cel căruia i se datorează publicarea în 1687, a operei fundamentale a lui **Isaac Newton**, ” Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano,* & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Halley era entuziasmat de inteligenţa şi capacitatea de înţelegere a matematicii de către Newton cu privire la ecuaţiile mişcării în mecanica cerească, pe care el le aplicase cu succes observaţiilor sala astronomice asupra cometei pe care o descoperise.

De aceea, a fost cel mai mare susţinător al lui Newton de a publica descoperirile făcute de acesta. Chiar l-a ajutat cu toţi banii de care dispunea riscând totul. De atunci, au devenit buni prieteni.

Newton se afla într-un conflict deschis cu preşedintele de atunci a Societăţii Regale de la Londra, Robert Hooke, care l-a acuzat în mod greşit pe Newton, cum că, descoperirile lui cu privire la teoria luminii sunt greşite şi ar trebui retrase. Aşadar, nu îşi dorea să mai publice deocamdată ceva, întrucât nu voia să se mai implice într-un alt conflict cu cei care nu înţelegeau esenţa descoperirilor sale şi de asemenea, se afla şi într-un moment nefericit, o dată cu moartea mamei sale.

Aşadar, după toate insistenţele şi a ajutorului financiar oferit de Halley, Newton va publica în 1687, opera sa de bază care va revoluţiona ştiinţa.

Întâmplări cu matematicieni

1. Descartes şi ducele

Într-una din obişnuitele petreceri ale nobililor francezi a fost invitat şi Descartes. La un moment dat , ducele Jacques Henri de Durfort, duce de Duras, şi mareşal al Franţei, îl vede pe Descartes mâncând trufandale şi atunci, se apropie de el, şi îi spune în batjocură:

- **Cum, şi filozofii mănâncă lucruri atât de bune**?
- **De ce nu ?** răspunse Descartes, şi continuă,
- **Îţi inchipui că toate lucrurile delicioase sunt numai pentru proşti** ?

2.Moisil şi ora de curs

De la matematicianul Grigore C. Moisil ne-au rămas o serie de povestiri şi întâmplări dintre care una se referă la cursurile pe care el le preda la Universitate:

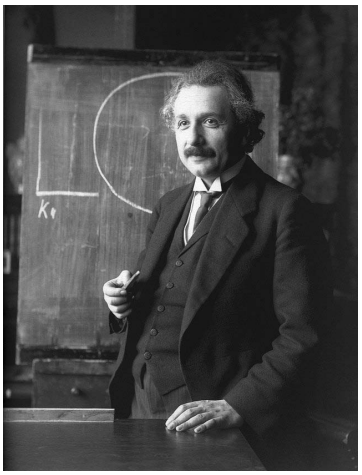
De fiecare dată, Moisil scria pe tablă iar dacă la începutul orei de curs, literele erau scrise vizibil şi mare pe tablă, pe parcursul orei literele deveneau din ce în ce mai mici, iar la un moment dat un student mai îndrăzneț din amfiteatru îi spune maestrului:

- **Domnulel profesor, nu se vede**!
- **Dar se aude**! îi replica Moisil cu înțelegere.

Spre sfârşitul orei, când vocea profesorului devenea mai joasă, din cauza efortului depus în prezentarea lecției, şi nu se mai auzea până în ultimele bănci, studentul respectiv găsea prilejul să-i spună:

- **Domnule profesor dar nu se aude**!
- **Da, dar acum se vede**!, răspundea sugubăț savantul, după ce făcea literele mai mari pe tablă, provocând în felul acesta o serie de râsete în sala de curs.

3. Einstein şi paltonul



Când a ajuns în America în 1933, venind din Germania nazistă din cauza persecuțiilor față de evrei, Einstein purta un palton obişnuit, iar soția sa i-a spus la un moment dat că ar fi cazul ca să-şi cumpere şi el un palton nou. Fizicianul însă răspunse:

- **Nu are rost. Aici, oricum nu mă cunoaşte nimeni!**

După câțiva ani când numele său era pe buzele tuturor datorită prezentării teoriei sale referitor la relativitatea generalizată, soția îl apostrofează din nou:

- **Ar fi cazul să-ți cumperi şi tu un palton nou, acum când eşti recunoscut peste tot.**
- **Acum chiar că nu mai are rost să-mi cumpăr unul nou, căci sunt cunoscut aşa cum sunt**, răspunse marele fizician.

4. Petrache Poenaru inventatorul

Cunoscut ca iluminist şi discipol al lui Gheorghe Lazăr care împreună cu el au pus bazele organizării învățământului românesc, şi participant la revoluțiile de la 1821 şi 1848, Petrache Poenaru (1799 - 1875) este inventatorul stiloului.

Totul s-a datorat faptului că fiind nevoit să copieze cursuri întregi folosindu-se de pana pe care trebuia să şi-o înmoaie foarte des în călimară, Poenaru pe când era student la Paris a născocit un instrument brevetat de guvernul francez în 25 mai 1827.

Neştiind cum să să-l numească căci nu mai exista ceva asemănător până atunci, el i-a dat următoarea denumire sugestivă, ” Condeiul purtăreț fără de sfârşit care se alimentează singur cu cerneală”, devenind astfel stiloul de astăzi.

Preluate din cartea ” O scurtă istorie a matematicii”, de Adrian Stan, Florentina Popescu, Liliana Traşcă

„ Împotriva prostiei şi zeii luptă fără succes ”.
Schiller

7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 15** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulţi elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparţine redacţiei.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 16** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Octombrie 2015**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

Răspunsuri de la Caleidoscop matematic, nr.15:

1. Singurele numere care au proprietatea că scriind aceste numere şi descompunerea lor în factori primi folosind o singură dată toate cifrele sunt: $26487 = 3^5 \cdot 109$, $28651 = 7 \cdot 4093$, $61054 = 2 \cdot 7^3 \cdot 89$, $65821 = 7 \cdot 9403$.
2. Pe prima coloană putem avea, 1, 9, 8, pe linie putem avea, 9, 2, 4 iar pe a doua coloană avem 6, 4, 3.
3. Trei mişcări, astfel: prima mişcare, mutăm cu stema în jos pe primele 5;
A doua mişcare, mutăm pe primele patru cu stema în sus şi pe a şasea cu stema în jos;
A treia mişcare, mutăm pe primele patru şi pe a şaptea cu stema în jos.
4. Avionul se află la 50 km de Polul Nord căci în momentul când se deplasează spre est, avionul rămâne la o distanţă constantă de pol.
5. 52 de triunghiuri;

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Scoala Gimnazială cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moineşti, Bacău
Clasa a V-a: 15p. Curelariu Ana; **Clasa a VI-a:** 28p. Bolohan Tudor, Lupu Ioana. **Clasa a VII-a** : 40p. Paduraru Catalin, Dobrovat Alina, Munteanu Diana; **Clasa a VIII-a**: 73p. Maziliu Alexandra, 18p. Faraoneanu Mădălina, Gherman Andrada; **Prof. Cornelia Gurău;**
Scoala Gimnazială cu clasele I-VIII, nr. 3 Cugir, Alba
Clasa a VII-a: 50p**.** Bel Luana, 24p. Lazăr Ariana; **Clasa a VIII-a**: 30p. Para Roxana, Henegariu Cristian; **Prof. Mariana Mitea.**
Liceul Tehnic IAR "Pogoneanu", Pogoanele.
Clasa a V-a: 12p. Paraschiv Alina, Ichim Mihai, Croitoru Robert, Dumitru Ştefan, Calotă Ioana;
Clasa a VI-a: 24p. Toader Radiana, Istrate Emanuel; **Prof. Stănescu Ion.**
Colegiul " Vasile Lovinescu", Fălticeni, Suceava
Clasa a IX-a: 12p. Movileanu Gabriel; **Clasa a X-a:** 14p. Geoşanu Neculai, Tăbârcea Constantin; **Clasa a XI-a:** 24p. Lazăr Claudiu; **Clasa a XII-a** : 30p. Samson Petru, Plăcintă Silvia; **Prof. Elena Ciobica**.
Colegiul Economic Buzău
Clasa a IX-a: 12p**.** Aldea Aurel, Tarcă Cătălina, Vasile Andreea; **Prof. Constantin Dinu;**
10p. Pavelescu Denisa; **Prof. Gheorghe Dârstaru; Clasa a X-a:** 30p. Iacob Cătălin, Stere Elena;Prof. Constantin Dinu; **Clasa a XI-a**: 34p. Dodan Marius, Vasile Georgiana, **Prof. Constantin Dinu.**
Şcoala Gimnazială Sfântul Apostol Andrei, Buzău
Clasa a VII-a: 10p. Zotescu Andreea, Haralambescu Bianca, Apostol Mădălina, **Prof. Gheorghe Dârstaru;**
Şcoala Şerban Cioculescu, Găeşti, Dâmboviţa
Clasa a V-a: 12p. Gainar Maria, Ioniţă Alexandra, Ioniţă Adriana, Olteanu Adrian, Nae Vanesa, Dinu Lidia, Popescu Radu ; **Prof. Florin Stănescu**
Şcoala " Mihai Viteazu", Târgovişte, Dâmboviţa
Clasa a V-a : 10p. Pleşa Ştefan, **Prof. Gabriela Stănescu;**
Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VI-a: 34p. Ducu Sabina, Troana Adriana.
Clasa a VIII-a: 75p. Traşcă Ionuţ- Vlăduţ, Ene Daniela- Iuliana, Moisescu Denis , Foltrauer Robert, Vochin Ioan – David, 64p , Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**
Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu", Buzău
Clasa a IX-a: 25p. Cană Cornel, Manea Irina, Grigore Daniel, Aniţa Ramona, Toboş Valentin. **Clasa a X-a:** 30p. Preda Mădălin, Dinu Cristina Bianca. **Clasa a XI-a :**35p. Ilie Ştefania, Marin Valentina, Ion Mihaela,Costache Adrian, Roman Corina, Stupinaru Cosmin, Zincă Andreea. **Clasa a XII-a**: 80p. Stoian Cristina, Nicu Alexandra, Pascu Iuliana, Sterpu Denisa, Sandu Cristina, Tureac Andrei, Dragomir Ionuţ, Tudose Andreea, **Prof. Stan Adrian.**
Liceul Tehnologic "Sfântul Mucenic Sava", Berca
Clasa a III-a: 26p. Hoacă Ştefan, Tudor Irina, Păpătoiu Paul, Oprea Mara, Duran Bianca, Mircioiu Ondina **Prof. Gabriela- Nicoleta Lupşan;**
Scoala Gimnazială „ Căpitan Aviator M. T. Bădulescu", Buzău
Clasa a III-a: 19p. Păunescu Andrei, Nicola Ana Maria, Răpițeanu Carol, Bălan Alexandru, Zevedei Ariana, Coman Călin. **Prof. Cristian Cosmin Lupşan.**
Colegiul Naţional "Fraţii Buzeşti", Craiova, Dolj
Clasa a VII-a : 20p : Vasilescu Andrei, **Prof. Ionescu Maria.**
Colegiul National " Vasile Alecsandri " Galati
Clasa a V-a : 20p. Buleti Daria – Alexandra, **Prof. Romeo Zanfir.**

SELECTIUNI DE LA CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA

„ SCLIPIREA MINTII „

29 NOIEMBRIE 2014, EDITIA A VIII-A

LICEUL TEHNOLOGIC ” COSTIN NENITESCU” BUZĂU

VIZITAȚI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

LEI 12 RON

REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 15 ANUL VIII - 2015

Cuprins

1. Istoria matematicii
- Miron Nicolescu de D.M. Bătinețu – Giurgiu, Neculai Stanciu,..... 1

2. Articole şi note matematice
- Trei inegalități din Gazeta Matematică nr. 5/2014 de Roxana Mihaela Stanciu, Nela Ciceu, ... 3
- Modele aplicative pentru calculul primitivelor unor funcții cu ajutorul " formulei de integrare prin părți" de prof. Elena și Constantin Ciobîcă..... 4
- Aplicații practice ale matricelor de Adrian Stan 6
- Asupra unei clase de probleme de Mariana Mitea..... 8
- Problema celor douăsprezece monezi de Marica Pițt-Rada și Ionel Pițt-Rada 10
- A refinement of Cesaro's inequality by Mihàly Bencze

3. Examene și concursuri..... 12

4. Probleme rezolvate 16

5. Probleme propuse 38

6. Quickies 45

7. Caleidoscop matematic 48

8. Poşta redacției 51

editgraph

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601