SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NAȚIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ ; PUBLICAȚIE SEMESTRIALĂ, AN V, NR X, 2012

SM

ISTORIA MATEMATICII
PROBLEME PROPUSE
PROBLEME REZOLVATE
TESTE

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiințe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC "COSTIN NENIȚESCU", BUZĂU
1972 - 2012

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

SCLIPIREA MINTII 10

Revistă națională de cultură matematică, publicație semestrială, An V, Nr. X, NOIEMBRIE 2012, BUZĂU

COLECTIVUL DE REDACȚIE

- Membrii onorifici:

Constantin Apostol - Preşedinte de onoare

Constantin Rusu - Preşedinte de onoare a Filialei Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Ramnicu Sărat a Societății de Ştiințe Matematice

Lenuța Pîrlog - Preşedinte Filiala Buzău a Societății de Ştiințe Matematice

D. M . Bătinețu - Giurgiu
Nicolae Ivăşchescu
Titu Zvonaru
Mihály Bencze

- Director:
  Neculai Stanciu

- Redactor şef:
  Adrian Stan

- Redactori principali:
  Constantin Dinu
  Andrei Octavian Dobre
  Gabriela Nicoleta Lupşan
  Ana Panaitescu
  Iuliana Trască

- Membri:

Florica **Anton,** Maria **Anton**, Mirela **Axente,** Jose Luis Diaz – **Barrero,** Cristian Cosmin **Brânză,** Ciprian **Cheşcă,** Gheorghe **Dârstaru**, **Cornelia** Drăgan, Jamel **Ghanouchi, Gheorghe Ghiță,** Cornelia **Gurău,** Daniela **Ion**, Mihaela Cornelia **Luca,** Constantin **Lupşan,** Mirela **Lupşan,** Ion **Lupşan**, Florica **Marchidanu,** Simion **Marin**, Marcela **Marin**, Gabriela **Marinescu,** Mariana **Mitea,** Delia **Naidin**, Lăcrimioara **Năstase,** Dumitru **Panțuru,** Florentina **Popescu**, Petre **Păunescu,** Marilena **Popa,** Adrian **Popa,** Ion **Radu,** Valerica **Roşu,** Viorica **Rotărescu,** Viorel **Rotărescu,** Roxana **Stanciu**, Florin **Stănescu**, Ion **Stănescu,** Ligia **Struțu**, Gheorghe **Struțu**, Doina **Stoica,** Mircea Mario **Stoica,** Laura **Tănase,** Luca **Tuță,** Ovidiu **Țâțan**

CUPRINS

ISTORIA MATEMATICII..... 1

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE..... 2

EXAMENE ŞI CONCURSURI..... 11

PROBLEME REZOLVATE..... 13

PROBLEME PROPUSE 34

CALEIDOSCOP MATEMATIC..... 40

POŞTA REDACȚIEI..... 43

SCLIPIREA MINTII

GÂNDEŞTE CORECT !

REDACȚIA
Liceul Tehnologic „ Costin Nenițescu", Buzău
Strada Transilvaniei, Nr. 134,
Cod. 120012, Tel. 0238725206
e-mail: ady_stan2005@yahoo.com
Coordonator proiect Adrian Stan
Vizitați www. liceulnenitescu.rdsbz.ro

„ Cel mai preţios sfetnic al omului este timpul ”.
Cicero

1. Istoria Matematicii

Aritmetica mayaşă

de prof. Adrian Stan

Pe tărâmurile Mexicului de astăzi, începând cu anii 1500 î.e.n şi până în 1527 e.n a apărut şi s-a dezvoltat o civilizaţie înfloritoare, cu un apogeu în perioada (300-900) e.n care s-a pierdut o dată cu venirea conchistadorilor spanioli.

Din miile de scrieri maya au mai rămas doar trei lucrări de o valoare inestimabilă sub forma unor cărţi numite codexuri: **Codex Dresdensis**, după numele oraşului Dresda, unde se găseşte, fiind trimis de împăratul aztec Moctezuma în 1519 lui Carol Quintul la Viena; **Codex Peresianus**, găsit în 1859 din întâmplare în subsolurile Bibliotecii Naţionale din Franţa de către Leon de Rosny; **Codex Chimalpopoca** descoperit de către abatele Brasseur de Bourbourg care mai face şi alte descoperi ale unor scrieri ale mayaşilor;

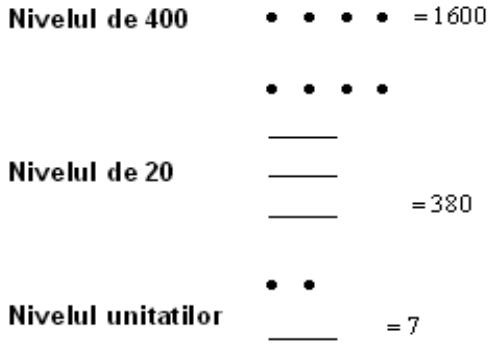
Începând cu mijlocul sec. al XIX-lea şi datorită apariţiei aparatului de fotografiat exploratorii au înţeles că vestigiile descoperite în Yucatan, Chiapas, Peten reprezintă ruinele unei civilizaţii autohtone numite maya, fără a avea o influenţă din partea romanilor sau grecilor aşa cum se credea şi care fascinează prin splendoarea artei sale şi prin complexitatea scrisului ei.

Cercetători ca Desire Charnay, John Stephens, Frederick Catherwood şi-au dedicat întreaga viaţă asupra studierii civilizaţiei maya descoperind înţelesurile acestei civilizaţii care a posedat cunoştinţe ridicate în domeniul matematicii şi astronomiei probabil o parte din ele fiind preluate de la puternicele civilizaţii pre-mayaşe.

Un domeniu în care mayaşii au excelat a fost arhitectura, prin miile de construcţii frumos decorate. Multe monumente arhitecturale în forma unor coloane înalte ce variază între 4 şi 10 m numite stele păstrează semne ale istoriei mayaşilor precum şi un limbaj format din glife şi hieroglife care o dată descifrat a dezvăluit o sumedenie de evenimente din viaţa mayaşilor.

Templele de la Tical chiar dacă nu s-au mai păstrat erau adevărate construcţii piramidale de 40 de m, acropole construite pe la mijlocul sec. al VIII-lea în sprijinul ceremoniilor religioase având o strânsă legătura cu concepţia lor cosmologică.

Mayaşii au stabilit un sistem numeric în baza 20 echivalent cu al nostru din baza 10 spre deosebire însă citirea se făcea de sus în jos iar fiecare nivel era de douăzeci de ori mai mare decât precedentul.
Cifrele se scriau cu o bară având valoarea 5 şi cu un punct pentru unitate. Un exemplu de scriere a anului 1987 este prezentat într-un articol din 1987 de către Claude Baudez:



Astfel, pentru a scrie anul 1987, unităţile se scriu cu o bară şi 2 puncte deasupra semnificând numărul 7, iar mai sus se scriu trei bare şi patru puncte deasupra semnifică numărul 19 înmulţit cu valoarea nivelului şi anume 20, aşadar 19x20=380. Pe ultimul nivel, cel de 400, se scriu patru puncte semnificând numărul 4 înmulţit cu 400 adică 4x4000= 1600. Aşadar, citind de sus în jos se obţine, 1600 + 380 + 7 = 1987.

Calendarul mayaş era împărţit în 18 perioade (numite uinal) a câte 20 de zile fiecare reprezentate de un caracter, în total 360 de zile, la care se adăuga 5 zile nefaste care nu aveau nume deoarece se considerau nefaste. Separat aveau şi un calendar pentru ritualurile divine şi de asemenea un calendar numit marele ciclu de 5200 tun (1 tun = 360 zile) ce cuprinde toată istoria lor şi care pleacă de la data de 13 august 3114 i.e.n şi care se încheie în 21 decembrie 2012 şi ar însemna sfârşitul lumii după unii. Interesant este că la mayaşi spre deosebire de noi apare **anul zero** iar la ei **era** avea 3483 de ani.

Bibliografie: Claude Baudez, Mayaşii, o civilizaţie pierdută, Editura Univers, 2007.

Prof. , Liceul Tehnologic, „ Costin Nenițescu”,Buzău.

„ Cei de rând nu încep nimic, fiindcă se tem de piedici; cei mediocri, după ce au început, se lasă, respinşi de piedici, dar cei aleşi între aleşi nu părăsesc ceea ce au început, chiar dacă sunt opriţi de mii de piedici ."

Panchatantra

2. Articole şi note matematice

Integrale care se rezolvă prin asocierea altor integrale

de prof. Constantin Rusu, Râmnicu Sărat

În acest articol se pune în evidenţă faptul că anumite integrale se pot calcula prin asocierea altor integrale. În anumite cazuri, metodele generale nu sunt eficiente sau conduc la calcule multe şi dificile. Fie $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi se cere $I_1=\int_a^b f_1(x)dx$. Presupunem că există o funcţie continuă $f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ pentru care considerăm integrala $I_2=\int_a^b f_2(x)dx$. Dacă cu integralele I_1 şi I_2 se poate construi un sistem compatibil determinat, atunci calculul lui I_1 şi respectiv I_2 este posibil. De regulă I_2 se deduce studiind proprietăţile funcţiei f_1, sau folosind metoda de integrare prin părţi respectiv metoda substituţiei. Integrala I_2 reprezintă integrala asociată integralei I_1.

Vom pune în evidenţă cele prezentate mai înainte prin următoarele exemple:

E.1. Calculaţi: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ (OML-1969).

Această integrală se poate calcula utilizând metoda substituţiei $tg\frac{x}{2}=t$. O metodă elegantă de rezolvare se obţine asociind integralei I_1 integrala $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, $\sin x+\cos x\neq 0,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Avem: $\begin{cases} I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx \\ I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} I_1+I_2=\frac{\pi}{4} \\ I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} I_1+I_2=\frac{\pi}{4} \\ I_1-I_2=\left[\ln(1+\sin 2x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} I_1+I_2=\frac{\pi}{4} \\ I_1-I_2=\frac{1}{2}\ln 2 \end{cases}\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}\right),\ I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right).$

Observaţia 1. Calculaţi: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx, n\in N, n\geq 1$, care reprezintă o extindere a integralei de la E_1.

Observaţia 2. O altă extindere a integralei de la E_1 este:

Calculaţi: $I=\int\frac{\cos bx}{\sin bx+\cos ax}dx, a\neq\pm b$ (GMB/1976, Problema 15610, autor *V. Ţifui*).

Soluţie. Asociem integralei $I=\int\frac{\cos bx}{\sin bx+\cos ax}dx$, integrala $J=\int\frac{\sin ax}{\cos ax+\sin bx}dx$ şi avem sistemul $\begin{cases} bI-aJ=\ln|\sin bx+\cos ax| \\ I+J=\frac{2}{b-a}\ln\left|\sin\frac{bx-ax+\frac{\pi}{2}}{2}\right| \end{cases}$. Rezolvând acest sistem obţinem:

$$I=\frac{1}{a+b}\left[\ln\left(\sin\frac{bx-ax+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right]^{\frac{2a}{b-a}}+\ln|\sin bx+\cos ax|+C.$$

E.2. Să se calculeze: $I=\int_0^1\frac{\cos^2 t+\cos t}{\cos t+\sin t+1}\cdot e^t dt$ (GMB-nr. 10/1981, Problema 18962, autor *C. Rusu*).

Soluţie. Asociem integralei I, integrala $J=\int_0^1\frac{\sin^2 t+\sin t}{\cos t+\sin t+1}\cdot e^t dt$, şi deducem că:

$\begin{cases} I+J=\int_0^1 e^t dt \\ I-J=\int_0^1(\cos t-\sin t)e^t dt \end{cases}$. Rezolvând sistemul obţinem $I=\frac{1}{2}\left(e+e\cos 1-\frac{3}{2}\right)$.

E.3. Să se calculeze: $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(tgx)^{ctgx}}{(tgx)^{ctgx}+(ctgx)^{tgx}}dx$ (GMB-nr.11/2001, autor *Marian Olteanu*).

Soluţie. Folosind proprietatea $tgx=ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, asociem integralei I integrala

$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(ctgx)^{tgx}}{(tgx)^{ctgx}+(ctgx)^{tgx}}dx$. Avem $I+J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}1dx=\frac{\pi}{6}$. Pe de altă parte cu substituţia $t=\frac{\pi}{2}-x$, obţinem $I=-J$. Deci avem sistemul: $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{6} \\ I-J=0 \end{cases}$, de unde rezultă $I=\frac{\pi}{12}$.

Observaţie. Pentru calculul integralei I nu se mai întrevede nicio soluţie.
Propunem în continuare calculul următoarelor integrale:

E.4. Fie $a,b\in R, a<b$ şi $f,g:[a,b]\to R$ integrabile Riemann astfel încât există $c,d\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că: $f^2(x)+g^2(x)=c^2, f(x)+g(x)\neq c\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)dx=d+\int_a^b g(x)dx$. Să se calculeze: $I=\int_a^b\frac{f^2(x)+cf(x)}{f(x)+g(x)+c}dx$ (GMB-nr.9/1980, autor *.M. Giurgiu*).

E.5. Să se calculeze integrala: $I=\int_0^1 \frac{x^2 e^{arctgx}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (OMJ-1976).

E.6. Fie $a<b, a,b\in\mathbb{R}$ şi f o funcţie reală care ia valori pozitive şi continuă pe intervalul $[0,b-a]$.

Să se calculeze: $I=\int_a^b \frac{f(b-t)}{f(b-t)+f(t-a)}dt$ (GMB/1977, Problema 16713, autor *Alexandru Lupaş*).

E.7. Calculaţi: $I=\int_0^2 \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+e^{(2-x)^2}}dx$ (*Constantin Rusu*).

Calculul unor sume cu combinari

de prof. Gheorghe Ghiţă, Buzău

Articolul prezintă câteva noi sume combinatorice care se bazează pe o relaţie cunoscută în liceu, şi anume $C_{n+1}^{k+1}=\frac{n+1}{k+1}C_n^k$, (*) şi pe o suma combinatorică mai puţin cunoscută,

$S_0=\sum_{k=0}^{n}2^k C_{2n-k}^n=4^n$, care se poate demonstra prin inducţie matematică.

1. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_1=1\cdot 2^0 C_{2n}^n+2\cdot 2^1 C_{2n-1}^n+3\cdot 2^2 C_{2n-2}^n+...+(n+1)2^n C_n^n=\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}.$$

Soluţie. Suma din membrul stâng S_1 se scrie succesiv:

$S_1=\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k C_{2n-k}^n=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+1}2^k C_{2n-k}^n.$ Conform relaţiei (*) avem:

$C_{2n+1-k}^{n+1}=\frac{2n+1-k}{n+1}C_{2n-k}^n=\left(2-\frac{k+1}{n+1}\right)C_{2n-k}^n \Leftrightarrow \frac{k+1}{n+1}C_{2n-k}^n=2C_{2n-k}^n-C_{2n+1-k}^{n+1}$, (**) avem:

$$S_1\overset{(**)}{=}(n+1)\sum_{k=0}^{n}2^k\left(2C_{2n-k}^n-C_{2n+1-k}^{n+1}\right)=(n+1)\left[2\sum_{k=0}^{n}2^k C_{2n-k}^n-\sum_{k=0}^{n}2^k C_{2n+1-k}^{n+1}\right].$$

Cu ajutorul notaţiei k + 1 = l şi a lui S_0 suma S_1 devine:

$$S_1=(n+1)\left(2\cdot 4^n-\sum_{l=1}^{n+1}2^{l-1}C_{2n+2-l}^{n+1}\right)=(n+1)\left(2\cdot 4^n-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}2^k C_{2n+2-k}^{n+1}+\frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}\right)=$$

$$\frac{n+1}{2}\left(4\cdot 4^n-4^{n+1}+C_{2n+2}^{n+1}\right)=\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}.$$

2. Să se demonstreze egalitatea: $S_2=2\cdot 2^0 C_{2n}^n+3\cdot 2C_{2n-1}^n+...+(n+2)2^n C_n^n=4^n+\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}.$

Soluţie. Suma S_2 se mai scrie succesiv:

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k C_{2n-k}^n=\sum_{k=0}^{n}(k+1+1)2^k C_{2n-k}^n=\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k C_{2n-k}^n+\sum_{k=0}^{n}2^k C_{2n-k}^n=4^n+\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}.$$

3. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_3=1\cdot 2\cdot 2^0 C_{2n}^n+2\cdot 3\cdot 2^1 C_{2n-1}^n+...+(n+1)(n+2)2^n C_n^n=(2n+2)4^n$$

Soluţie. Suma S_3 din membrul stâng se mai scrie succesiv:

$$S_3=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)2^k C_{2n-k}^n=(n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+2)\frac{k+1}{n+1}2^k C_{2n-k}^n\overset{(**)}{=}$$

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k\left(2C_{2n-k}^{n}-C_{2n+1-k}^{n+1}\right)=2(n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k C_{2n-k}^{n}-(n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k C_{2n+1-k}^{n+1}=$$

$$\overset{k+1=l}{=}2(n+1)\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}+2(n+1)4^n-\frac{n+1}{2}\sum_{l=0}^{n+1}(l+1)2^l C_{2n+2-l}^{n+1}+\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}=$$

$$=(n+1)^2C_{2n+2}^{n+1}+4^n(2n+2)-\frac{(n+1)(n+2)}{4}C_{2n+4}^{n+2}+\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1}=(2n+2)4^n,$$

cu observaţia că în ultima parte a şirului de egalităţi s-au utilizat sumele anterioare.

Aplicaţii. Să se demonstreze identităţile :

1. $1^2\cdot 2^0C_{2n}^{n}+2^2\cdot 2^1C_{2n-1}^{n}+\ldots+(n+1)^2 2^n C_n^n=\frac{n+1}{2}\left(4^{n+1}-C_{2n+2}^{n+1}\right);$

2. $2^2 2^0C_{2n}^{n}+3^2\cdot 2^1C_{2n-1}^{n}+\ldots+(n+2)^2 2^n C_n^n=(2n+3)4^n+\frac{n+1}{2}C_{2n+2}^{n+1};$

3. $2\cdot 3\cdot 2^1C_{2n}^{n}+3\cdot 4\cdot 2^2C_{2n-1}^{n}+\ldots+(n+2)(n+3)2^n C_n^n=(2n+4)4^n+(n+1)C_{2n+2}^{n+1};$

4. $\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)(k+3)2^k C_{2n-k}^{n}=(n+1)(2n+3)C_{2n+2}^{n+1};$

5. $\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+3)(k+4)2^k C_{2n-k}^{n}=6(n+2)4^n+2(n+1)(n+3)C_{2n+2}^{n+1}.$

Bibliografie:

1. **Ganga Mircea-**Manual pentru clasa a X-a, Editura Mathpress,2005

Statistica în medicină

de prof. Florentina Popescu, Buzău

Măsuri ale asocierii în studiile epidemiologice

Riscul relativ. **Riscul relativ** (RR) este folosit în studiile prospective şi este interpretat ca „de câte ori mai mult este posibil ca să faci o boală având factorul de risc, decât în cazul în care nu ai avea factorul de risc. Riscul relativ=RR= $\frac{P(\text{Boala/Cu factor de risc})}{P(\text{Boala/Fara factor de risc})}$

Exemplu: Să luăm exemplul unui studiu asupra relaţiei dintre fumat şi bolile de inimă. Avem un grup de 1000 de persoane clasificate iniţial ca fumători şi nefumători. După o perioadă de timp, vedem câţi au făcut boli de inimă. Rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Boli de inimă

Fumat	**DA**	**NU**	
DA	**70**	**330**	**400**
NU	**35**	**565**	**600**
	105	**895**	**1000**

P(boală de inimă/fumător) = 70/400 = 0,175

P(boală de inimă/nefumător) =35/600 = 0,058333

Raportul de probabilitate (şansă)

$$RR=\frac{\frac{70}{400}}{\frac{35}{600}}=3$$

Raportul de probabilitate (Odds ratio, OR) este o altă măsură obişnuită de asociere.

În multe studii epidemiologice retrospective nu putem estima P(boală/factor de risc). Putem însă totdeauna să estimăm P(are factorul de risc/boală). Astfel, nu putem calcula riscul relativ dar putem calcula raportul de probabilitate.

Raportul de probabilitate (şansă) $OR = \dfrac{(\text{Probabilitatea de boala / are factor de risc})}{(\text{Probabilitatea de boala / nu are factor de risc})}$

Unde odds (probabilitatea, şansa) este definit ca: $\dfrac{P(\text{boala / are factor de risc})}{1 - P(\text{boala / are factor de risc})}$

Astfel, raportul de probabilitate (şansă) este definit ca:

$$OR = \frac{\dfrac{P(\text{boala / are factor de risc})}{1 - P(\text{boala / are factor de risc})}}{\dfrac{P(\text{boala / nu are factor de risc})}{1 - P(\text{boala / nu are factor de risc})}}$$

Raportul de probabilitate (şansă) are avantajul că poate fi estimat şi ca:

$$OR = \frac{\dfrac{P(\text{are factor de risc/boala})}{1 - P(\text{are factor de risc/boala})}}{\dfrac{P(\text{nu are factor de risc/boala})}{1 - P(\text{nu are factor de risc/boala})}}$$

Exemplu: Să luăm exemplul unui studiu retrospectiv al fumatului asociat cancerului de plămâni. Avem un eşantion de 100 decese datorate cancerului la plămâni. Determinăm dacă aceste persoane au fumat sau nu.

		Cancer la plamani	Controale	
		DA	NU	
Fumat	DA	90 (a)	40 (b)	130
	NU	10 (c)	60 (d)	70
		100	100	200

Singurele probabilităţi pe care le putem calcula sunt la cazurile de cancer şi la cazurile martor.
P(fumat/cancer la plămâni) = 90/100 = 0,9
P(fumat/fără cancer la plămâni) =40/100 = 0,4

$$OR = \frac{\dfrac{0,9}{1-0,9}}{\dfrac{0,4}{1-0,4}} = 13,5$$

Pentru un tabel 2x2, ca cel de mai sus, raportul de probabilitate poate fi calculat şi ca: OR = ad/bc

Notă: Pentru a folosi această formă simplificată, celula reprezentată cu 'a' trebuie să fie cea care reprezintă boala şi expunerea. În exemplul nostru,

$$OR = \frac{\dfrac{90}{60}}{\dfrac{10}{40}} = 13,5$$

Epidemiologia şi teorema Bayes

În al doilea exemplu, dacă am şti că rata cancerului de plămâni la această populaţie este de 0,001, iar rata totală de fumat este de 0,4, am putea folosi teorema Bayes pentru a obţine:

$$P(\text{cancer la plamani / fumator}) = \frac{P(\text{fumator / cancer la plamani}) \cdot P(\text{cancer la plamani})}{P(\text{fumator})} = \frac{0,9 \cdot 0,0001}{0,4} = 0,00025$$

$$P(\text{cancer la plamani / nefumator}) = \frac{P(\text{nefumator / cancer la plamani}) \cdot P(\text{cancer la plamani})}{P(\text{nefumator})} = \frac{0,1 \cdot 0,0001}{0,6} = 0,000017$$

Acum putem calcula riscul relativ ca $RR = \dfrac{0,00025}{0,000017} = 13.23$

Bibliografie:

E. Dumitru, R. Burlacu, Biomatematică şi informatică, Editura Fundaţiei România de Mâine, Bucureşti, 2006.

O clasă de inegalităţi în triunghi

de prof. dr. Mihály Bencze, Braşov

În acest articol prezentăm o clasă de inegalităţi generate de rezultatele obţinute în [1].

Aplicaţia 1. Dacă M **este un punct în planul triunghiului** ABC**, şi** A_1, B_1, C_1 **sunt mijloacele laturilor** BC, CA, AB**, atunci**

1) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{b+c} \ge \frac{sR^2r^2}{4}$; **2)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{r_b+r_c} \ge \frac{s^2R^2r^2}{2(4R+r)}$; **3)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{bc} \ge \frac{s^2R^2r^2}{s^2+r^2+4Rr}$;

4) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{b^2+c^2} \ge \frac{s^2R^2r^2}{4(s^2-r^2-4Rr)}$; **5)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{b^3+c^3} \ge \frac{sR^2r^2}{4(s^2-3r^2-6Rr)}$; **6)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{r_br_c} \ge R^2r^2$;

7) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{r_b^2+r_c^2} \ge \frac{s^2R^2r^2}{2\left((4R+r)^2-2s^2\right)}$; **8)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{r_b^3+r_c^3} \ge \frac{s^2R^2r^2}{2\left((4R+r)^3-12s^2R\right)}$;

9) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{s^2R^3r^2}{2R-r}$; **10)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\sin^4\frac{B}{2}+\sin^4\frac{C}{2}} \ge \frac{128s^2R^6r^2}{\left(s^2+r^2-8Rr\right)^2-16Rr^2\left(2R-r\right)}$;

11) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}} \ge \frac{16s^2R^5r^2}{(2R-r)((4r+R)^2-3s^2)+6Rr^2}$;

12) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}} \ge \frac{s^2R^3r^2}{4R+r}$; **13)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\cos^4\frac{B}{2}+\cos^4\frac{C}{2}} \ge \frac{4s^2R^4r^2}{(4R+r)^2-s^2}$;

14) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{\cos^6\frac{B}{2}+\cos^6\frac{C}{2}} \ge \frac{16s^2R^5r^2}{(4R+r)^3-3s^2(2R+r)}$; **15)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{m_b^2+m_c^2} \ge \frac{2s^2R^2r^2}{3(s^2-r^2-4Rr)}$;

16) $\sum MA_1^4 \ge \frac{s^2R^2r^2}{2(s^2-r^2-4Rr)}$; **17)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{(b+c)(c+a)} \ge \frac{s^2R^2r^2}{5s^2+r^2+4Rr}$;

18) $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{h_b^2(h_a^2+h_c^2)} \ge \frac{R^4}{4(s^2-r^2-4Rr)}$; **19)** $\sum \frac{a^2 MA_1^4}{(r_b+r_c)(r_c+r_a)} \ge \frac{s^2R^2r^2}{(4R+r)^2+s^2}$.

Demonstraţie. Inegalităţile de mai sus rezultă imediat din teorema 2, demonstrată în [1] şi egalităţi binecunoscute.

Aplicaţia 2. Dacă M **este un punct în planul triunghiului** ABC**, şi** $x, y, z > 0$**, atunci**

1) $\sum \frac{x^2 MA^4}{b+c} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{4s\left(\sum x\right)^2}$; **2)** $\sum \frac{a^2 MA^4}{F(a)} \ge \frac{16s^2R^2r^2}{\sum F(a)}$;

3) $\sum \frac{x^2 MA^4}{b^2+c^2} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{4(s^2-r^2-4Rr)\left(\sum x\right)^2}$; **4)** $\sum \frac{x^2 MA^4}{b^3+c^3} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{4s(s^2-3r^2-6Rr)\left(\sum x\right)^2}$;

5) $\sum \frac{x^2 MA^4}{(a+b)(b+c)} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{(5s^2+r^2+4Rr)\left(\sum x\right)^2}$; **6)** $\sum \frac{x^2 MA^4}{r_b+r_c} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{2(4R+r)\left(\sum x\right)^2}$;

7) $\sum \frac{x^2 MA^4}{r_b^2+r_c^2} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{2((4R+r)^2-2s^2)\left(\sum x\right)^2}$; **8)** $\sum \frac{x^2 MA^4}{r_b^3+r_c^3} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{2((4R+r)^3-12s^2R)\left(\sum x\right)^2}$;

9) $\sum \frac{x^2MA^4}{\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{R\left(\sum a^2yz\right)^2}{(2R-r)\left(\sum x\right)^2}$; **10)** $\sum \frac{x^2MA^4}{\sin^4\frac{B}{2}+\sin^4\frac{C}{2}} \ge \frac{4R^2\left(\sum a^2yz\right)^2}{(8R^2+r^2-s^2)\left(\sum x\right)^2}$;

11) $\sum \frac{x^2MA^4}{\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}} \ge \frac{16R^3\left(\sum a^2yz\right)^2}{\left((2R-r)((4R+r)^2-3s^2)+6Rr^2\right)\left(\sum x\right)^2}$;

12) $\sum \frac{x^2MA^4}{\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}} \ge \frac{R\left(\sum a^2yz\right)^2}{(4R+r)\left(\sum x\right)^2}$; **13)** $\sum \frac{x^2MA^4}{\cos^4\frac{B}{2}+\cos^4\frac{C}{2}} \ge \frac{4R^2\left(\sum a^2yz\right)^2}{((4R+r)^2-s^2)\left(\sum x\right)^2}$

14) $\sum \frac{x^2MA^4}{\cos^6\frac{B}{2}+\cos^6\frac{C}{2}} \ge \frac{16R^3\left(\sum a^2yz\right)^2}{((4R+r)^3-3s^2(2R+r))\left(\sum x\right)^2}$;

15) $\sum \frac{x^2MA^4}{m_b^2+m_c^2} \ge \frac{2\left(\sum a^2yz\right)^2}{3(s^2-r^2-4Rr)\left(\sum x\right)^2}$; **16)** $\sum MA^4 \ge \frac{72s^4R^4r^4}{(s^2-r^2-4Rr)^3}$;

17) $\sum \frac{x^2MA^4}{h_b^2\left(h_c^2+h_a^2\right)} \ge \frac{R^2\left(\sum a^2yz\right)^2}{4s^2r^2(s^2-r^2-4Rr)\left(\sum x\right)^2}$;

18) $\sum \frac{x^2MA^4}{(r_b+r_c)(r_c+r_a)} \ge \frac{\left(\sum a^2yz\right)^2}{((4R+r)^2+s^2)\left(\sum x\right)^2}$

Demonstrație. Inegalitățile de mai sus rezultă imediat din teorema 3, demonstrată în $[1]$şi egalități binecunoscute în triunghi.

Observație. Dacă luăm $M \in \{H, O, I, G, K, etc.\}$, atunci obținem o clasă de noi inegalități.

Bibliografie:

1. Mihály Bencze, *Inegalități în triunghi*, SM **5**(9), 2012, p. 2.

2. Colecția Octogon Mathematical Magazine (1993-2011).

Some generalizations of Nesbitt' s inequality

de D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

If $a \in R_+, b, c, d, x_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}, X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, m \in [1,\infty)$ **and** $cX_n^m > d \max_{1\le k\le n} x_k^m$, **then:**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n^m - dx_k^m} \ge \frac{(an+b)n^m}{cn^m - d} X_n^{1-m} \qquad \text{(OG)}$$

Proof. We have:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n^m - dx_k^m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(aX_n + bx_k)^2}{(aX_n + bx_k)(cX_n^m - dx_k^m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(aX_n + bx_k)^2}{acX_n^{m+1} - adX_n x_k^m + bcX_n^m x_k - bdx_k^{m+1}}$$

where we apply *H. Bergström's* inequality and we deduce that:

$$U_n \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n + bx_k)\right)^2}{acnX_n^{m+1} - adX_n \sum_{k=1}^{n} x_k^m + bcX_n^m \sum_{k=1}^{n} x_k - bd\sum_{k=1}^{n} x_k^{m+1}}$$

$$=\frac{(anX_n+bX_n)^2}{(acn+bc)X_n^{m+1}-adX_n\sum_{k=1}^{n}x_k^m-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^{m+1}}.$$

Since the convexity of the functions $f,g:R_+^*\to R_+^*$, $f(x)=x^m$, $g(x)=x^{m+1}$, by *Jensen*'s inequality we have:

$$\sum_{k=1}^{m}x_k^m\ge\frac{X_n^m}{n^{m-1}}\text{ and }\sum_{k=1}^{m}x_k^{m+1}\ge\frac{X_n^{m+1}}{n^m}$$

and we obtain that:

$$U_n\ge\frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc)X_n^{m+1}-\frac{adX_n^{m+1}}{n^{m-1}}-\frac{bdX_n^{m+1}}{n^m}}$$

$$=\frac{(an+b)^2n^m}{acn^{m+1}+bcn^m-adn-bd}X_n^{1-m}$$

$$=\frac{(an+b)^2n^m}{(an+b)(cn^m-d)}X_n^{1-m}=\frac{(an+b)n^m}{cn^m-d}X_n^{1-m},$$

which completes the proof. ■

Remark 1. If $m=1$, then by (OG) we obtain the generalization from [1].

If $a=0$ and $b=c=d=m=1$, then from above we obtain the Nesbitt's inequality for n variables, i.e.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X_n-x_k}\ge\frac{n}{n-1}\qquad\textbf{(N)}$$

If we take $n=3$, then by **(N)** we obtain:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\ge\frac{3}{2},$$

i.e. Problem 15114, proposed by A.M. Nesbitt to Educational Times, **3** (1903), 37-38.

Remark 2. A generalization of (OG) was published in [2], i.e.

If $a,m\in R_+,b,c,d,x_k\in R_+^*,\forall k=\overline{1,n},X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $p\in[1,\infty)$, and $cX_n^m>d\max_{1\le k\le n}x_k^m$, then:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{(cX_n^m-dx_k^m)^p}\ge\frac{(an+b)n^{mp}}{(cn^m-d)^p}X_n^{1-mp}\qquad\text{(AMM)}$$

Remark 3. A generalization of (AMM) will apper in Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matematica, i.e.

If $n\in N^*-\{1\}$, $a\in R_+$, $b,c,d,x_k\in R_+^*$, $\forall k=\overline{1,n}$, $X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $m,p,r,s\in[1,\infty)$, such that $cX_n^m>d\max_{1\le k\le n}x_k^m$, then:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n^r+bx_k^r)^s}{(cX_n^m-dx_k^m)^p}\ge\frac{(an^r+b)^s}{(cn^m-d)^p}n^{mp-rs+1}X_n^{rs-mp}\qquad\text{(REOIM)}$$

References:

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Încă patru demonstrații ale problemei L:155 din Sclipirea Minții nr. VII – 2011,* SM **5**(9), pp. 6-8.

2. D.M. Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, *Problem 11634*, The American Mathematical Monthly, Vol. 119, March 2012, p. 248.

A refinement of Weitzenböck's inequality

byTitu Zvonaru, Comăneşti

In MATHPROBLEMS, vol. 1, no.4, 2011, p. 33, was posed:

Problem 28. Let ABC **be a triangle with the semiperimeter** p **. Prove that:**

$\frac{a}{\sqrt{p-a}}+\frac{b}{\sqrt{p-b}}+\frac{c}{\sqrt{p-c}} \geq 2\sqrt{3p}$ **, where** $[AB]=c,[AC]=b,[BC]=a$ **.**

(Florin Stănescu, Găeşti, Dâmbovița, Romania.)

We present a new solution for this problem and a refinement of well-known *Weitzenböck*'s inequality. We can assume that $a \geq b \geq c$, and then we have:

$$-a \leq -b \leq -c \Rightarrow p-a \leq p-b \leq p-c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p-a}} \geq \frac{1}{\sqrt{p-b}} \geq \frac{1}{\sqrt{p-c}}.$$

By *Cebâşev*'s inequality and than by AM-HM inequality we obtain that:

$$\frac{a}{\sqrt{p-a}}+\frac{b}{\sqrt{p-b}}+\frac{c}{\sqrt{p-c}} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{p-a}}+\frac{1}{\sqrt{p-b}}+\frac{1}{\sqrt{p-c}}\right) \geq \frac{2p}{3}\cdot\frac{9}{\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}}.$$

Therefore it is sufficient to show that:

$$2p\cdot\frac{3}{\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}} \geq 2\sqrt{3p} \Leftrightarrow \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

So, by squaring the last inequality we need to prove that:

$$\sum_{cyclic}(p-a)+2\sum_{cyclic}\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq 3p \Leftrightarrow \sum_{cyclic}\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq p.$$

Indeed, the last inequality it results by AM-GM inequality, i.e.

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2}=\frac{c}{2};\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2};\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq \frac{b}{2},$$

which by adding yields to $\sum_{cyclic}\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq p$, and we are done.

Remark. If we denote by S the area of the triangle ABC, then the inequality by the problem 28 it can be written:

$\sum_{cyclic} a\sqrt{(p-b)(p-c)} \geq 2\sqrt{3}\cdot S$, where if we taking account that

$a^2 = 2a\cdot\frac{a}{2} \geq 2a\sqrt{(p-b)(p-c)}$, and others two similar we deduce that:

$a^2+b^2+c^2 \geq 2a\sqrt{(p-b)(p-c)}+2b\sqrt{(p-c)(p-a)}+2c\sqrt{(p-a)(p-b)} \geq 4\sqrt{3}\cdot S$, i.e. we obtain a refinement of *Weitzenböck*' s inequality.

« Prin spațiu, universul mă cuprinde şi mă înghite ca pe un punct ; prin gândire îl cuprind eu »

Pascal

„ Mulți primesc sfaturi dar numai cei înțelepți profită de ele ”.
Syrus

3. Examene şi concursuri

CONCURSUL JUDETEAN DE MATEMATICA SCLIPIREA MINTII

3 Noiembrie 2012 Ediția a VII-a

În data de 3 Noiembrie 2012 a avut loc la Liceul Tehnologic “ Costin Nenițescu”, Buzău a şaptea ediția a Concursului Județean de Matematică “ Sclipirea Minții”, clasele V- XII. Vom prezenta în continuare subiectele de la clasele V- VIII urmând ca în numărul următor să prezentăm şi subiectele de la liceu.

Clasa a V-a

1. a) Aflați numerele de trei cifre care împărțite la răsturnatele lor dau câtul 5 şi restul un număr prim.

Titu Zvonaru, Comăneşti

b) Ce număr împărțit prin zecimea lui dă ca rezultat exact zece?

Neculai Stanciu, Buzău

2. a) Aflați x din egalitatea: 2013 – (2011 + x : 2012) + 2014 = 2010

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Pe o tabla sunt scrise numerele $1, 2, 3, ..., 2018$. Pentru inceput se sterg oricare doua dintre ele si se înlocuiesc cu suma lor. Apoi, se continua aceasta operatie pana mai raman pe tabla doua numere. Este posibil ca ultimile doua numere ramase sa fie ambele patrate perfecte? Justificati (folosind faptul că orice pătrat perfect este de forma 4k sau 4k + 1, unde k este număr natural)!

Florin Stănescu, Găeşti

3. a) Există o cifră care are o proprietate ciudată. Astfel, dacă din această cifră se scade 3, iar ceea ce rămâne se împarte la 2, rezultatul va fi tot o cifră. Până aici nu este nimic neobişnuit. Dar iată că dacă din cifra ciudată scădem 2, iar numărul obținut se împarte de data aceasta cu 3, rezultatul va fi acelaşi, ca în primul caz. Care este cifra ciudată?

RMT, NR.3 /2012, Neculai Stanciu, Buzău

b) Determinați cel mai mic număr de două cifre, ştiind că dacă-l adunăm cu răsturnatul său se obține un număr de trei cifre divizibil cu 5.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Clasa aVI-a

1. a) Aflați numerele de două cifre care împărțite la răsturnatele lor dau câtul şi restul numere prime.

Titu Zvonaru, Comăneşti

b) Fie x, y, z numere naturale diferite de zero. Arătați că dacă 5 divide 3x + 2y + z atunci 5 divide şi 8x + 12y + 16z.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

2. Fie numerele raționale x, y, z, astfel încât să aibă loc egalitatea : $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=1$.

a) Arătați că $xyz \neq 0$

b) Arătați că : $\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=2$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

3. Fie punctele coliniare $A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm, ... , $A_{99}A_{100} = 99$ cm. Aflați lungimea segmentului $A_{30}A_{54}$.

Adrian Stan, Buzău

Clasa a VII-a

1. a) Arătați că numărul $y = (-1)^{\frac{1}{x}}$ este natural, unde x = $(1-\frac{1}{2})\ (1-\frac{1}{3})\ (1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2012})$.

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Calculati suma elementelor multimi: $A = \left\{ \overline{abc} \middle| \frac{\overline{abc}+\overline{bc}+a}{\overline{acb}+\overline{cb}+a} = \frac{\overline{bca}+\overline{ca}+b}{\overline{bac}+\overline{ac}+b} = \frac{\overline{cab}+\overline{ab}+c}{\overline{cba}+\overline{ba}+c} \right\}$.

Florin Stănescu, Găeşti

2. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$, şi numărul $n = \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{4}$.

a) Arătați că $n = \frac{a(a+3)}{2} \cdot \left[\frac{a(a+3)}{2} + 1\right]$

b) Arătați că n poate fi scris ca produs de două numere întregi consecutive.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

3. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, în care bisectoarea (BD) este cât (DC) şi $BA + AD = BC$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Clasa a VIII-a

1. a) Rezolvați ecuația $\frac{|x-5|}{|x-4|+|x+3|} = \frac{2}{7}$, pentru x $\in$ [-3;4]

Gheorghe Dârstaru, Buzău

b) Arătați că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, atunci: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti **şi Neculai Stanciu,** Buzău

2. a) Arătați că oricare ar fi numerele strict pozitive a şi b avem:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{a+b}{2}$$

b) Determinați numerele reale pozitive a şi b, ştiind că :

$$\begin{cases} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2} = 192\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Constantin Apostol, Rm. Sărat

3. În parelelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' se consideră punctele E şi F pe dreptele AA', respectiv, DD'. Determinați intersecția planelor (EFB) şi (ABC), în cazurile:

a) E $\in$ (AA' şi F $\in$ (DD' ;

b) E $\in$ (AA' şi F $\notin$ [DD' .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

„ Mintea unui copil este o pagină albă, pe care putem scrie aproape tot ce voim ; dar o dată ce am scris, cerneala aproape că nu se mai poate şterge”.
Lubbock

4. Probleme rezolvate

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:242 Suma a cinci numere naturale este 4082. Dacă la fiecare se adună acelaşi număr se obţin numerele 2027, 2029, 2052, 3961 şi 4013. Aflaţi cele cinci numere.

***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

Rezolvare: Notăm numerele naturale cu x, y, z, t şi u. Se obţin relaţiile: $x+y+z+t+u=4082$ şi $x+y+z+t+u+5a=14082$ unde a este cantitatea care se adaugă la fiecare număr. Rezultă, a = 2000 iar numerele căutate sunt 27, 29, 52, 1961 şi 2013.

P:243 La o librărie sunt 200 de cărţi cu poveşti şi cărţi cu poezii. După ce s-au vândut 120 de cărţi cu poezii şi 50 de cărţi cu poveşti, cărţile cu poezii au rămas de două ori mai multe decât cele cu poveşti. Câte cărţi cu poezii şi câte cărţi cu poveşti au fost la început ?

***Prof.* Mirela Axente**, Buzău

Rezolvare : Notăm cu a = carti cu povesti-50 şi b = carti cu poezii-120. Conform datelor problemei rezultă b = 2a.
200-(120+50)=200-170=30
2a+a = 3a de unde rezultă 3a=30 iar a=30:3 adică a=10.
În concluzie, 10+50=60 carti cu povesti şi 120+20= 140 carti cu poezii
Verificarea: 140+60=200 carti

P:244 Doi arabi stau sub un palmier şi se pregătesc să mănânce. Apare un călător care îi roagă să ia masa împreună. Primul arab scoate un ulcior cu lapte, al doilea o pâine şi călătorul 6 curmale. După ce consumă tot ce au în mod egal, călătorul le lasă 20 de monede. Să se afle câte monede revin fiecărui arab, dacă 4 ulcioare cu lapte costă cât 3 pâini, iar 36 de curmale costă cât un ulcior cu lapte.

***Prof.* Popa Florinela Marilena, *Prof.* Popa Adrian Laurentiu,** Buzau

Rezolvare: Un ulcior cu lapte = 36 curmale, 3 pâini = 4 x 36 = 144 curmale, rezultă că o pâine costă cât 48 de curmale. În total, cei trei au 90 de curmale, deci fiecare mănâncă 30 de curmale. Călătorul primeşte 6 curmale de la primul arab şi 18 curmale de la al doilea. Deci 20 de monede reprezintă costul a 24 de curmale. Primul arab primeşte 5 monede, iar al doilea 15 monede.

P:245 George a rupt la întâmplare 9 pagini dintr-o carte, şi după ce a adunat numerele tuturor paginilor rupte a afirmat că rezultatul se divide cu 10. Este adevărat ? Justificaţi.

Rezolvare: ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Nu! Suma numerelor de pe o foaie dă un număr impar iar atunci când adunăm nouă numere impare corespunzător celor noi foi este un număr impar care nu este divizibil cu 10.

P:245 Două autoturisme pleacă unul spre celălalt din două oraşe diferite, întâlnindu-se după 3 ore de mers, la 15 km depărtare de jumătatea distanţei dintre cele două oraşe. Cu ce viteză a mers fiecare autoturism, dacă distanţa dintre cele două oraşe este de 360 km?

***Prof.* Rotărescu Viorica,** Vadu Paşii

Rezolvare : 360 : 2 = 180 (km) - jumătatea distanţei dintre oraşe
180 + 15 = 195 (km) - distanţa parcursă de autoturismul cu viteză mai mare
360 – 195 = 165 (km) - distanţa parcursă de autoturismul cu viteză mai mică
195 : 3 = 65(km /h) - viteza primului autoturism
165 : 3 = 55(km/ h) - viteza celui de-al doilea autoturism

▪ Clasa a V-a

G:308. Găsiți numerele naturale $\overline{ab}, \overline{cca}$ cu a,b,c, cifre distincte astfel încât $a+\overline{ab}+\overline{ba}=\overline{cca}$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Din $a+10a+b+10b+a=110c+a \Rightarrow 11a+11b=110c \,|:11 \Rightarrow a+b=10c$. Cum a,b,c sunt cifre distincte se obține $c=1$ şi $a+b=10$ de unde rezultă $\overline{ab}\in\{28,82,37,73,46,64\}$ şi $\overline{cca}\in\{112,118,113,117,114,116\}$.

G:309. Găsiți numerele naturale $\overline{ab}$ cu $a\rangle\ b$ astfel încât $\dfrac{\overline{ab}-\overline{ba}}{a+b}=a-b$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Relația dată este echivalentă cu
$\dfrac{10a+b-10b-a}{a+b}=a-b \Leftrightarrow \dfrac{9(a-b)}{a+b}=a-b \Rightarrow a+b=9 \Rightarrow \overline{ab}\in\{81,72,63,54\}$.

G:310. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuația $x^4+x^3yz=216$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $x^3(x+yz)=216$. Se obțin cazurile:
$x^3=1$ şi $x+yz=216$, de unde rezultă $x=1$ şi $yz=215$;
$x^3=8$ şi $x+yz=27$, de unde rezultă $x=2$ şi $yz=25$;
$x^3=27$ şi $x+yz=8$, de unde rezultă $x=3$ şi $yz=5$;
Cazul $x^3=216$ şi $6+yz=1$, nu corespunde.
$S=\{(1;1;215),(1;5;43),(1;43;5),(1;215;1),(2;1;25),(2;5;5),(2;25;1),(3;1;5),(3;5;1)\}$.

G:311. Să se arate că numărul $A=173^{73}+137^{37}$ este număr par.

***Prof.* Tuță Luca**, Buzău

Rezolvare. Vom calcula ultima cifră a numărului A şi anume avem
$U(173^{73})=U(3^{73})=U(3^{4\cdot18+1})=U(3^1)=3$ şi analog $U(137^{37})=U(7^{37})=U(7^{4\cdot9+1})=U(7^1)=7$.
Prin urmare $U(A)=U(173^{73}+137^{37})=U\left(173^{73}\right)+U\left(137^{37}\right)=U(3+7)=U(10)=0$.
Rezultă că numărul $A=173^{73}+137^{37}$ este par.
Altfel, cum orice număr impar ridicat la o putere dă un număr impar, atunci, concluzia rezultă imediat din faptul că suma a două numere impare este un număr par.

G:312. Determinați numărul $\overline{xyzt}$, ştiind că are loc egalitatea: $\overline{xyzt}+\overline{yzt}+\overline{zt}+t=2012$.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare: Adunând unitățile, obținem: $t+t+t+t=4t$; acest număr trebuie să se termine cu 2, deci, putem avea $t=3$ sau $t=8$.

Dacă t = 3, $\Rightarrow 4\cdot3=12$; scriem 2 şi adunăm zecile: $1+z+z+z=3z+1$; acest caz nu poate avea loc, căci, numărul zecilor trebuie să se termine cu 1, ceea ce nu se poate, pentru nici o valoare a lui z.

Dacă $t=8$, $\Rightarrow 4\cdot8=32$; scriem 2 şi adunăm zecile: $3+z+z+z=3z+3$; această sumă trebuie să se termine cu 1; rezultă că $z=6$; într-adevăr, $3\cdot6+3=21$; scriem 1 şi adunăm sutele: $2+y+y=2y+2$; această sumă trebuie să se termine cu 0; rezultă că $y=4$ sau $y=9$.

Dacă $y=4$, $\Rightarrow 2\cdot4+2=10$; scriem 0 şi adunăm miile: $1+x=2$, adică, $x=1$; astfel obținem că numărul $\overline{xyzt}$ este 1468.

Dacă $y=9$, $\Rightarrow 2\cdot9+2=20$; scriem 0 şi adunăm miile: $2+x=2$, adică, $x=0$, ceea ce nu se

deoarece, x este prima cifră a numărului $\overline{xyzt}$.

Aşadar, singurul număr, pentru care are loc egalitatea, este 1468.

G:313. Produsul dintre un număr de 3 cifre şi diferenţa dintre un număr de două cifre şi răsturnatul său este 3564. Aflaţi numărul de trei cifre care îndeplineşte condiţia.

***Prof.* Mitea Mariana**, Cugir, Alba

Rezolvare: Fie **X** numărul de trei cifre şi $Y = \overline{ab} = 10a + b$, $Z = \overline{ba} = 10b + a$ numărul de două cifre, respectiv răsturnatul său, cifrele $a,b \neq 0$. Atunci obţinem ecuaţia:

$X \cdot [(10a + b) - (10b + a)] = 3564 \Rightarrow X \cdot 9(a - b) = 3564$,

de unde $X \cdot (a - b) = 396 = 1 \cdot 396 = 2 \cdot 198 = 3 \cdot 132 = 9 \cdot 99 = 6 \cdot 66 = 9 \cdot 44 = ...$

Numărul **X** de trei cifre convenabil este un element al mulţimii {396; 198; 132}.

G:314. Determinaţi suma numerelor de forma $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc} \vdots 3$ şi că $\overline{ab}$ este, simultan, pătrat perfect şi cub perfect.

***Prof.* Victoria Popa**, Timişoara

Rezolvare: $\overline{ab}$ pătrat perfect $\Rightarrow \overline{ab} \in \{16,25,36,49,64,81\}$, $\overline{ab}$ cub perfect $\Rightarrow \overline{ab} \in \{27,64\}$.

Deci, $\overline{ab} = 64 \Rightarrow \overline{abc} = \overline{64c}$, $\overline{64c} \vdots 3 \Rightarrow \overline{abc} \in \{642,645,648\}$, $S = 642 + 645 + 648 = 1935$

G:315. Arătaţi că dacă $a_i > 0$ unde i este o valoare de la 1 la n , n număr natural mai mare decât 2 şi $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, atunci $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + ... + \frac{1}{1+a_n} \geq 1$.

***Prof.* Neculai Stanciu, Buzău, Titu Zvonaru,** Comăneşti

Rezolvare.

Fără să pierdem din generalitate presupunem că $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Atunci $a_1 a_2 \leq 1$, şi avem

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + ... + \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = \frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{1+a_1} = 1.$$

G:316. Să se demonstreze că numărul $11^{2010} + 11^{2011} + 11^{2012} + 11^{2013} + 1$ are un număr par de divizori.

Titu Zvonaru, Comăneşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

Rezolvare: Se va demonstra mai întâi faptul că un număr are un număr par de divizori dacă şi numai dacă nu este pătrat perfect după care vom arăta că numărul din enunţ se divide cu 5 dar nu se divide cu 25.

Lemă. Dacă ultima cifră a lui k este k', atunci 11^k se termină cu cifrele $\overline{k'1}$.

Demonstraţie. $11^k = (10+1)^k = M_{100} + 10 \cdot (M_{10} + k') + 1 = M_{100} + \overline{k'1}$.

Din lemă deducem că ultimile două cifre ale numărului din enunţ sunt:

$\overline{01} + \overline{11} + \overline{21} + \overline{31} + \overline{01} = 65$, şi atunci, conform criteriului de divizibilitate cu 25, se divide cu 5 dar nu cu 25.

G:317. Arătaţi că numărul n = $13^1 + 13^2 + 13^3 + ... + 13^{2012}$ este divizibil cu produsul a două numere naturale consecutive .

***Prof.* Simion Marin**, Rm. Sărat

Rezolvare: Numărul n se divide cu 13 deoarece este o sumă în care fiecare termen se divide cu 13 (1). Această sumă are 2012 termeni ce se pot grupa câte 2 . Vom obţine:

n = $13(1 + 13) + 13^3(1 + 13) + ... + 13^{2011}(1 + 13) \Leftrightarrow$ n $= 14(13^1 + 13^3 + 13^5 + ... + 13^{2011})$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că n se divide cu produsul $13 \cdot 14$, adică cu produsul a două numere naturale consecutive . Grupînd numerele cîte patru, putem arăta că n se divide, şi cu $16 \cdot 17$, şi cu $34 \cdot 35$.

▪ Clasa a VI-a

G:318. **Dacă** $\frac{a+b+c}{d+a+b}=\frac{d+a+b}{c+d+a}=\frac{c+d+a}{b+c+d}=\frac{b+c+d}{a+b+c}$, $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$**, să se compare numerele:** a^a,b^b,c^c,d^d ***Prof.*** **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: $\frac{a+b+c}{d+a+b}=\frac{d+a+b}{c+d+a}=\frac{c+d+a}{b+c+d}=\frac{b+c+d}{a+b+c}=\frac{3(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)}=1$. Egalând fiecare raport cu 1 se obține $a=b=c=d\Rightarrow a^a=b^b=c^c=d^d$.

G:319. **Aflați numerele naturale** $\overline{abc}$ **ştiind că** $\sqrt{\overline{abc}}=\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}+\sqrt{c}+a$**.**

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Se vor căuta numerele $\overline{abc}$ astfel încât $\overline{ab},a+b+c,a,c$ şi $\overline{abc}$ să fie pătrate perfecte. Se obține $\sqrt{169}=\sqrt{16}+\sqrt{1+6+9}+\sqrt{1}+\sqrt{9}+1\Rightarrow a=1,b=6,c=9\Rightarrow\overline{abc}=169$.

G:320. **Arătați că numărul n din proporția** $\frac{10001}{\overline{abcdabcd}}=\frac{\overline{abcd}}{n}$ **este pătrat perfect.**

Prof. **Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Cum $\overline{abcdabcd}=\overline{abcd}\cdot10000+\overline{abcd}=\overline{abcd}\cdot10001$, proporția dată devine $\frac{1}{\overline{abcd}}=\frac{\overline{abcd}}{n}\Leftrightarrow n=\overline{abcd}^2$.

G:321. **Determinați cifrele a, b din egalitatea** $\overline{2,37(a)}=\overline{1,ab}+\overline{1,(a)}$ **.** ***Prof.*** **Rosu Valerica**, Rm. Sărat

Rezolvare: Egalitatea dată este echivalentă cu : $2\frac{\overline{37a}-37}{900}=1\frac{\overline{ab}}{100}+1\frac{a}{9}$

$\Leftrightarrow 2+\frac{370+a-3}{900}=2+\frac{10a+b}{100}+\frac{a}{9}$. $\Leftrightarrow 333+a=90a+9b+100a\Leftrightarrow 37=21a+b$

Pentru $a=1\Rightarrow 37=21+b\Rightarrow b=16$ şi nu este cifră. Pentru $a\ge2\Rightarrow 21a\ge42>37$.

În concluzie, problema nu are soluții.

G:322. **Împărțind fracțiile** $\frac{7}{6}$ **şi** $\frac{9}{8}$ **la o fracție dată, se obțin, respectiv, câturi numere naturale consecutive. Care este această fracție?** ***Prof.*** **Lăcrimioara Năstase**, Padina, Buzău

Rezolvare: Se observă că $\frac{7}{6}>\frac{9}{8}\Rightarrow\frac{7}{6}:\frac{a}{b}=n+1$ şi $\frac{9}{8}:\frac{a}{b}=n\Rightarrow\frac{7b}{6a}=n+1$ şi $\frac{9b}{8a}=n$. Împărțind ultimele egalități membru cu membru obținem $\frac{n+1}{n}=\frac{28}{27}\Rightarrow n=27\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{24}$.

G:323. **Să se rezolve în** $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ **ecuația 100*x* + 101y + 102z = 2011.**

Prof. **Mariana Mitea** , Cugir, Alba

Rezolvare:

Din $100x+101y+102z=2011$, avem $2011\le102(x+y+z)$, de unde $x+y+z\ge19{,}71$ (1).

Din $100x+101y+102z=2011$, avem $2011\ge100(x+y+z)$, de unde $x+y+z\le20{,}11$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $x+y+z=20$, iar atunci $2011=101(x+y+z)+z-x=2020+z-x$, iar de aici $x=z+9$. Din $x+y+z=20$ şi $x=z+9$ obținem $y=11-2z$ şi cum $y,z\in\mathbb{N}^*\Rightarrow z\in\{1,2,3,4,5\}$.

Pentru z = 1 rezultă x =10 şi y =9. Pentru z = 2 rezultă x =11 şi y =7. Pentru z = 3 rezultă x =12 şi y =5. Pentru z = 4 rezultă x =13 şi y =3. Pentru z = 5 rezultă x =14 şi y =1.
Soluțiile ecuației sunt: (x; y; z)∈{(10; 9; 1), (11; 7; 2), (12; 5; 3), (13; 3; 4), (14; 1; 5)}.

G:324. Arătați că dacă numărul $A = \overline{abc} + \overline{def}$ se divide cu 111 atunci şi numărul $B = \overline{abcdef}$ se divide cu 111. **Prof. Tuță Luca**, Buzău

Rezolvare. $B = \overline{abcdef} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 999 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} + \overline{def} = 999 \cdot \overline{abc} + A$.

Dar 111 divide $999 \cdot \overline{abc}$ şi 111 divide A, deci 111 divide B.

G:325. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația $5^{x+2} - 5^y = 3 \cdot (5^x - 1)$. ***Prof.* Ana Panaitescu,** Rm. Sărat

Rezolvare: Ecuația dată se mai poate scrie de forma $5^{x+2} - 3 \cdot 5^x + 3 = 5^y \Rightarrow$
$25 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x + 3 = 5^y \Leftrightarrow 22 \cdot 5^x + 3 = 5^y$.
Fie $x \geq 1, y \geq 1$ atunci, ultima cifră a numărului $22 \cdot 5^x + 3$ este 3 şi ultima cifră a numărului 5^y este 5 prin urmare nu putem avea egalitatea respectivă. Aşadar, fie x=0 de unde rezultă că $25=5^y$, adică y=2, iar pentru y=0 se obține $22 \cdot 5^x = -2$ ceea ce e fals deoarece membrul stâng este întodeauna pozitiv, $\forall x \in \mathbb{N}$. Atunci, singura soluție este $(x, y) \in \{(0;2)\}$.

G:326. Determinați numărul soluțiilor din $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}$ ale inecuației $|x| + |y| \langle 6$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Suma $|x| + |y|$ ia 6 valori distincte şi anume: 0,1,2,3,4,5.

Din $|x| + |y| = 0$ rezultă o singură soluție $(0;0)$;

Din $|x| + |y| = 1$ rezultă patru soluții $(-1;0), (0;-1), (0;1), (1;0)$;

Din $|x| + |y| = 2$ rezultă opt soluții $(-2;0), (-1;-1), (-1;1), (0;-2), (0,2), (1;-1), (1;1), (2;0)$; asemănător şi pentru celelalte.

Din $|x| + |y| = 5$ rezultă 20 soluții.

$(-5;0), (-4;-1), (-4;1), (-3;-2), (-3,2), (-2;-3), (-2;3), (-1;-4), (-1;4)$,
$(0;-5), (0;5), (1;-4), (1;4), (2,-3), (2;3), (3;-2), (3;2), (4;-1), (4;1), (5,0)$.
În total sunt 61 de soluții.

G:327. Rezolvaţi ecuaţia $|x^2 - 5|x| + 3| = 3$. ***Prof.* Tuţă Luca,** Buzău

Rezolvare. Avem $x^2 - 5|x| + 3 = 3$ sau $x^2 - 5|x| + 3 = -3$.

Dacă $x^2 - 5|x| + 3 = 3 \Rightarrow |x|^2 - 5|x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 5) = 0 \Rightarrow |x| = 0$ sau $|x| - 5 = 0$. Rezultă, $x \in \{-5,0,5\}$.

Dacă $x^2 - 5|x| + 3 = -3 \Rightarrow |x|^2 - 5|x| + 6 = 0 \Rightarrow (|x| - 3)(|x| - 2) = 0 \Rightarrow x \in \{-3,-2,2,3\}$.

Aşadar, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-5, 0, 5, -3, -2, 2, 3\}$.

G:328. Aflați restul împărțirii numărului a = $2008^{2011} + 2011^{2011} + 2012^{2011}$ la 2010.

***Prof.* Gheorghe Dârstaru** , Buzău

Rezolvare:
$a = (2010 - 2)^{2011} + (2010 + 1)^{2011} + (2010 + 2)^{2011} = M_{2010} - 2^{2011} + M_{2010} + 1 + M_{2010} + 2^{2011} = M_{2010} + 1$, deci restul împărțirii este 1.

G:329. Arătați că 503 divide a + b , unde : a = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2012}$ şi b = $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2011}{2012}$

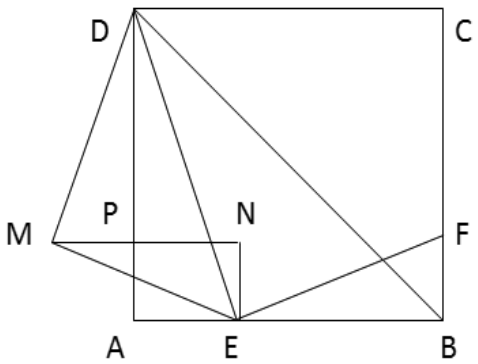
***Prof.* Simion Marin**, Rm. Sărat

Rezolvare: a + b = $1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+...\left(\frac{1}{2012}+\frac{2011}{2012}\right)=\underbrace{1+1+1+....+1}_{2012}=2012$.

2012 este divizibil cu 503 căci 2012 :503 = 4. Deci 503 divide suma a + b .

G:330. În pătratul ABCD, se consideră punctele E pe (AB) şi F pe (BC), astfel încât, $\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$.

Arătaţi că $\widehat{BDE}=\widehat{BEF}$. ***Prof.* Constantin Apostol,** Rm. Sărat



Rezolvare: Construim, în exteriorul pătratului, triunghiul PDM, congruent cu triunghiul BEF, unde $P\in(AD)$, DP=EB şi PM=BF. Unim M cu E.

Având $m(\widehat{BDE})+m(\widehat{ADE})=45^0$, vom arăta că $m(\widehat{BEF})+m(\widehat{ADE})=45^0$ şi, în acest caz, rezultă $\widehat{BDE}=\widehat{BEF}$

Dacă N este simetricul lui M faţă de dreapta AD, $\Rightarrow \Delta$ PDM $\equiv \Delta$ NME.

Din congruenţele: Δ PDM $\equiv \Delta$ NME $\equiv \Delta$ BEF, $\Rightarrow$ $(DM)\equiv(EM)$ şi $m(\widehat{DME})=90^0$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{PDM})+m(\widehat{ADE})=45^0$, $\Rightarrow m(\widehat{BEF})+m(\widehat{ADE})=45^0$.

Notă: Alte trei soluţii pentru problemă au fost date de dl. Titu Zvonaru şi dl. Neculai Stanciu în revista **mateinfo.ro** în numărul din septembrie, pp. 3-5.

▪ Clasa a VII-a

G:331. Arătaţi că rapoartele $\frac{1}{(x+y)^2+(6x+y)^2+(8x+y)^2}$ şi $\frac{1}{(2x+y)^2+(4x+y)^2+(9x+y)^2}$ sunt egale pentru orice x şi y numere reale nesimultan nule. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Se arată că numitorii celor două rapoarte sunt egali:

$(x+y)^2+(6x+y)^2+(8x+y)^2=101x^2+3y^2+30xy$;

$(2x+y)^2+(4x+y)^2+(9x+y)^2=101x^2+3y^2+30xy$;

G:332. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{2x-1}{a-1}+\frac{2x-2}{a-2}+\frac{2x-3}{a-3}+...+\frac{2x-2011}{a-2011}=\frac{4022x}{a}$, $x\in\mathbb{N}^*, a\langle 0$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare:

Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$\left(\frac{2x-1}{a-1}-\frac{2x}{a}\right)+\left(\frac{2x-2}{a-2}-\frac{2x}{a}\right)+...+\left(\frac{2x-2011}{a-2011}-\frac{2x}{a}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{2x-a}{a(a-1)}+\frac{4x-2a}{a(a-2)}+...+\frac{4022x-2011a}{a(a-2011)}=0\Leftrightarrow$$

$$(2x-a)\underbrace{\left(\frac{1}{a(a-1)}+\frac{2}{a(a-2)}+...+\frac{2011}{a(a-2011)}\right)}_{\neq 0}=0\Rightarrow x=\frac{a}{2}$$

G:333. Fie a,b,c,d lungimile laturilor unui patrulater convex. Arătaţi că patrulaterul este

paralelogram dacă şi numai dacă $\frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}=\frac{ab}{a+b}+\frac{ad}{a+d}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}$.

***Prof. dr.* Mihály Bencze**, Braşov

Rezolvare: $\frac{2(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{ad}{a+d}-\frac{bc}{b+c}-\frac{cd}{c+d}=$

$=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}+\frac{(ab-cd)^2}{(a+b+c+d)(a+d)(b+c)}=0\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow\begin{cases}ad-bc=0\\ab-cd=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$.

G:334. **Precizați dacă** $n=\sqrt{\left(1+\frac{3}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{16}\right)\cdot.....\cdot\left(1+\frac{89}{1936}\right)}\in\mathbb{N}$.

***Prof.* Mariana Mitea**, Cugir, Alba

Rezolvare: $n=\sqrt{\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{25}{16}\cdot...\cdot\frac{1936}{1849}\cdot\frac{2025}{1936}}=\sqrt{2025}=45\in\mathbb{N}$.

G:335. **Rezolvați în** $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ **ecuația** $x^2+xy-x+y=2$. ***Prof.* Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu $x^2-1+xy-x-1+y=0\Leftrightarrow(x+1)(x+y-2)=0\Rightarrow x=-1$ sau $x+y-2=0$, care are o infinitate de soluții în $\mathbb{R}x\mathbb{R}$. Aşadar, $S=\{(-1;a),(a;2-a)\}$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

G:336. **Calculați valorile întregi ale lui x pentru care** $\sqrt{\frac{2x+2019}{2x+3}}$ **este număr întreg.**

***Prof.* Gheorghe Dărstaru**, Buzău

Rezolvare: $\sqrt{\frac{2x+2019}{2x+3}}=y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y^2=\frac{2x+3+2016}{2x+3}=1+\frac{2016}{2x+3}$ şi cum $y\in\mathbb{Z}$ este necesar ca $\frac{2016}{2x+3}\in\mathbb{Z}$; atunci, 2x+3 trebuie să fie un divizor impar şi pozitiv (dacă $2x+3\langle 0$, am obține o valoare negativă pentru y^2) al numărului 2016. Din $2x+3\in\{1,3,7,9,21,63\}$ obținem $(x;y^2)\in\{(-1;2017),(0;673),(2;289),(3;225),(9;97),(30;33)\}$. Rezultă $x\in\{2;3\}$.

G:337. **Fie triunghiurile AOB, BOC, COD, DOA dreptunghice în O, având lungimile laturilor [OA], [OB], [OC], [OD] numere naturale consecutive. Demonstrați că are loc relația:** $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\cdot k^2+10$**, unde** $k\in N^*$.

***Prof.* Victoria Popa**, Timisoara

Rezolvare: Fie $a,a+1,a+2,a+3$ numere naturale consecutive, cu OA=a, OB= a+1, OC= a+2, OD= a+3.

În ΔAOB, $m(\hat{O})=90^\circ\Rightarrow AB^2=OA^2+OB^2\Rightarrow AB^2=2a^2+2a+1$.

Analog, $BC^2=2a^2+6a+5$; $CD^2=2a^2+10a+13$; $DA^2=2a^2+6a+9$.

Atunci $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=8a^2+24a+28=(4a^2+12a+9)+(4a^2+12a+9)+10=$

$=(2a+3)^2+(2a+3)^2+10=2\cdot(2a+3)^2+10$

Notăm $2a+3=k,(a\in\mathbb{N}\Rightarrow k\in\mathbb{N})$. Atunci $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2k^2+10$.

G:338. **Fie triunghiul ABC cu măsura unghiului** $\widehat{BAC}$ **de 120^0. Fie [AA' bisectoarea unghiului** $\hat{A}$ **a triunghiului,** $A'\in(BC)$ **. Prin punctul A' se construieşte paralela la dreapta AB care intersectează latura [AC] în M,** $M\in(AC)$**. Demonstrați că** $\frac{AA'}{AB}+\frac{AA'}{AC}=1$.

***Prof.* Cornelia Gurău** , Moineşti Bacău

Rezolvare :

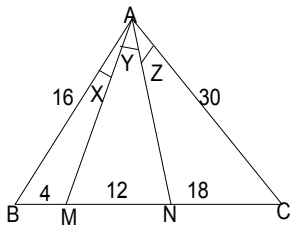
Triunghiul $CA'M$ este asemenea cu triunghiul $CBA \Rightarrow \frac{A'M}{AB} = \frac{CM}{AC}$ (1).

Din AB $\parallel$ A'M şi AA' secantă $\Rightarrow m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{AA'M}) = 60^0$.

Triunghiul AA'M este echilateral $\Rightarrow$ AA'=A'M=AM. Înlocuind în relaţia (1) se obţine $\frac{AA'}{AB} = \frac{CM}{AC}$, cum CM =AC-AM $\Rightarrow \frac{AA'}{AB} = \frac{AC - AA'}{AC} \Rightarrow \frac{AA'}{AB} = 1 - \frac{AA'}{AC}$, de unde se obţine relaţia cerută.

G:339. Se consideră un triunghi ABC cu lungimile laturilor $AB = 16, BC = 34, CA = 30$ şi punctele M respectiv N pe latura $[BC]$ astfel încât $BM = 4, MN = 12$. Calculaţi măsura unghiului $\sphericalangle MAN$.

Prof. D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti şi **prof. Neculai Stanciu**, Buzău



Rezolvare.

Fie $x = m(\widehat{BAM}),\ y = m(\widehat{MAN}),\ z = m(\widehat{NAC})$.

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora($16^2 + 30^2 = 34^2$), rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A . Deci $x + y + z = 90^0$.

Din $BA = BN = 16 \Rightarrow m(\widehat{ANB}) = x + y$.

Din CA = CM = 30 $\Rightarrow m(\widehat{AMC}) = y + z$.

Din suma unghiurilor în triunghiul $AMN \Rightarrow x + y + y + z + y = 180^0$.

Din cele de mai sus avem $2y = 180 - 90 = 90 \Rightarrow y = 45^0$.

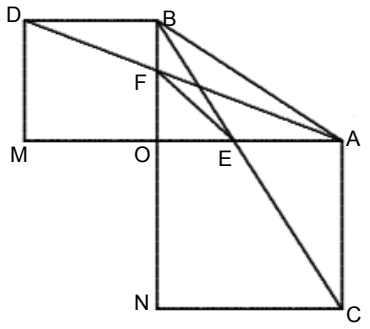
G:340. În sistemul ortogonal de coordonate xOy, se consideră punctele $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$ şi $D(-b,b)$. Dacă $BC \cap Ox = \{E\}$ şi $AD \cap Oy = \{F\}$, atunci:

a) arătaţi că ΔFOE este isoscel;

b) determinaţi aria patrulaterului $ABFE$.

***Prof.* D.M. Bătineţu – Giurgiu**, Bucureşti şi **prof. Neculai Stanciu**, Buzău

Rezolvare.



Avem $OA = a$ şi $OB = b$. Se observă uşor că ΔFOA este asemenea cu ΔDMA, unde M este proiecţia punctului D pe axa Ox şi ΔEOB este asemenea cu ΔCNB, unde N este proiecţia punctului C pe axa Oy.

Aşadar, $\frac{FO}{b} = \frac{a}{a+b}$ şi $\frac{EO}{a} = \frac{b}{a+b}$. Deci,

$EO = FO = \frac{ab}{a+b}$ şi prin urmare ΔFOE este isoscel.

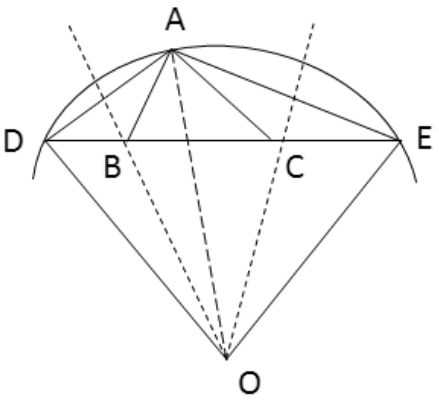
b) $A_{ABFE} = A_{ABO} - A_{FOE} = \frac{1}{2}\left(ab - \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\right)$.

G:341. Pe dreapta BC, care include ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC, se consideră punctele D şi E, astfel încât, $B \in (DC)$ şi $(DB) \equiv (AB)$, $C \in (BE)$ şi $(CE) \equiv (AC)$. Arătaţi că măsura unghiului $\widehat{BOC}$ este constantă, unde O este centrul cercului circumumscris triunghiului DAE.

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare. Construim mediatoarele segmentelor (AD) şi (AE) $\Rightarrow$ intersecţia lor este punctul O.

Notăm $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DAB}) = x$ şi $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{EAC}) = y$; $\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 2x$ şi $m(\widehat{ACB}) = 2y$. Dar $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 90^0$, $\Rightarrow 2x + 2y = 90^0 \Rightarrow x + y = 45^0 \Rightarrow m(\widehat{DAE}) = 90^0 + 45^0 = 135^0$. Cum $\widehat{DAE}$ este unghi înscris, rezultă $m(\widehat{DE}) = 2 \cdot 135^0 = 270^0$.



Deducem că arcul mic $\widehat{DE}$ are măsura egală cu 90^0 şi, deci, $m(\widehat{DOE}) = 90^0$, fiind unghi la centru. În plus, $m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{DOB}) + m(\widehat{BOA}) + m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COE})$ şi au loc egalităţile : $m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{BOA})$ şi $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COE})$, de unde deducem că măsura unghiului $\widehat{BOC}$ este egală cu 45^0, adică este constantă.

▪ Clasa a VIII-a

G:342. Demonstraţi că $2^{2n+2} - 3n - 4$ se divide cu 9, oricare ar fi numărul natural n

***Prof.* Tuţă Luca,** Buzău

Rezolvare. $2^{2n+2} - 3n - 4 = 4^n \cdot 4 - 4 - 3n = 4(4^n - 1) - 3n =$

$= 4(4-1)(1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-1}) - 3n = 4 \cdot 3 \cdot (1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-1}) - 3n =$

$= 3(4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^n - n) = 3[(4-1) + (4^2 - 1) + (4^3 - 1) + ... + (4^n - 1)] =$

$= 3[3 + 3(1+4) + 3(1+4+4^2) + ... + 3(1+4+4^2+...+4^{n-1})]$

$= 9[1 + (1+4) + (1+4+4^2) + ... + (1+4+4^2+...+4^{n-1})]$, de unde rezultă cerinţa problemei.

G:343. Să se rezolve în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ecuaţia: $\frac{x+10}{y} + \frac{34}{xy} = \frac{6-y}{x}$. ***Prof.* Mariana Mitea**, Cugir, Alba

Rezolvare: Înmulţim ecuaţia cu xy şi rezultă $(x+10)x + 34 = (6-y)y$, ceea ce este echivalent cu $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 0$, sau $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 0$, de unde $x = -5, y = 3$.

G:344. Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1960}} + \frac{1}{\sqrt{1961}} \rangle \sqrt{1961} - 1$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

Rezolvare: Cum $\frac{1}{\sqrt{n}} \rangle \frac{1}{\sqrt{1961}}, \forall n \in \{1; 2; ....1960\}$ rezultă

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1960}} + \frac{1}{\sqrt{1961}} \rangle 1961 \cdot \frac{1}{\sqrt{1961}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1960}} + \frac{1}{\sqrt{1961}} \rangle \sqrt{1961} - 1$.

G:345. Aflaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{2012 - \sqrt{2012}}{2012}$$

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: După raționalizarea numitorilor fiecărei fracții, membrul stâng devine egal cu $1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ şi atunci din $1-\frac{\sqrt{2012}}{2012}=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\Rightarrow\sqrt{2012}=\sqrt{n+1}\Rightarrow n=2011$.

G:346. Dacă a,b si c sunt numere pozitive demonstrați inegalitatea: $abc(a+b+c)\le a^4+b^4+c^4$.

***Prof.dr.ing*, Panțuru Dumitru**, Galați

Rezolvare:Vom demonstra inegalitatea echivalentă: $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$.
Folosim inegalitatea mediilor aritmetică – geometrică şi avem:

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=$$

$$=a^2\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)+b^2\left(\frac{c^2+a^2}{2}\right)+c^2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab=abc(a+b+c).$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.
Altfel, $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab^2c+abc^2+a^2bc\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$.
S-a folosit inegalitatea $x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ (Soluție dată de dl. Titu Zvonaru).

G:347. Dacă dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt $a,\ b,\ \frac{ab}{a+b}$ unde $a,b\in\mathbb{Q}_+^*$, ce fel de număr este diagonala paralelipipedului, rațional sau irațional ?

***Prof*. Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Conform ipotezei, diagonala paralelipipedului este

$$d^2=a^2+b^2+\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2=\frac{(a+b)^2(a^2+b^2)+a^2b^2}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+b^2)(a^2+b^2)+a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a^2+b^2)^2+2ab(a^2+b^2)+(ab)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a^2+b^2+ab}{a+b}\right)^2.$$ Rezultă că

diagonala $d=\frac{a^2+b^2+ab}{a+b}\in\mathbb{Q}_+^*$.

G:348. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ astfel încât $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}_+$. Să se arate că

$$\sqrt{x^2+f^2(y)+g^2(z)}+\sqrt{y^2+f^2(z)+g^2(x)}+\sqrt{z^2+f^2(x)+g^2(y)}\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z),$$

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$. Există funcții cu proprietatea din enunț?

***Prof*. D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

Rezolvare: Inegalitatea dintre media pătratică şi media aritmetică ne permite să scriem

$\sqrt{x^2+f^2(y)+g^2(z)}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+f(y)+g(z)\right)$, şi analoagele pe care le adunăm membru cu membru şi

obținem $\sqrt{x^2+f^2(y)+g^2(z)}+\sqrt{y^2+f^2(z)+g^2(x)}+\sqrt{z^2+f^2(x)+g^2(y)}\ge$

$\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+f(y)+g(z)+y+f(z)+g(x)+z+f(x)+g(y)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, ceea ce era de demonstrat. Răspunsul la întrebarea din enunț este afirmativ şi anume luăm

$f,g:R_+\to R_+,\ f(x)=[x],\ g(x)=\{x\}$şi $f(x)+g(x)=x,\ \forall x\in R_+$.

G:349. Se consideră semidreptele $(Ox,(Oy,(Oz$ două câte două perpendiculare în centrul O. Pe ele în această ordine se iau punctele A,B,C. Perpendiculara dusă din punctul O pe planul (ABC) şi intersectează în punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul M ce aparține

semidreptei $(OG$ **. Precizați o poziție a punctului** M **pe** $(OG$ **ştiind că** $(CM$ **face cu** (OB) **un unghi de măsură** 45^0 **.**

***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare: Avem $OG \perp (ABC) \Rightarrow OG \perp AB$, $OC \perp (AOB) \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow AB \perp (OGC) \Rightarrow AB \perp CG$

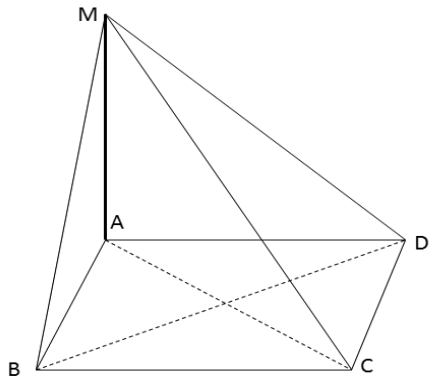
Analog se demonstrează că $AG \perp BC$. Rezultă că $G = H =$ ortocentrul triunghiului ABC.Deci, ΔABC este echilateral şi $OA = OB = OC$. Construim cubul $OAPBCTSV$.

Ducem prin C o paralelă CV la OB. Atunci conform ipotezei $m(\sphericalangle MCV) = 45^0$, ceea ce se întâmplă dacă $M = S =$ vârful opus lui O în cubul $OAPBCTSV$.

G :350. **Pe perpendiculara în A, pe planul dreptunghiului ABCD, se consideră punctul M. Ştiind că laturile triunghiului MBD sunt proporționale cu numerele** $\sqrt{34}$, $\sqrt{25}$ **şi** $\sqrt{41}$ **şi că** $MC = 15\sqrt{2}$ **cm, calculați dimensiunile dreptunghiului şi lungimea segmentului (MA).**

***Prof.* Constantin Apostol**, Râmnicu. Sărat

Rezolvare: Notăm lungimile segmentelor (MA), (AB) şi (AD) cu x, y, respectiv, z. Din proporționalitatea dată, vom avea :



$$\frac{MB}{\sqrt{34}} = \frac{BD}{\sqrt{25}} = \frac{MD}{\sqrt{41}} \text{ şi, deci, } \frac{MB^2}{34} = \frac{BD^2}{25} = \frac{MD^2}{41}.$$

Ținând seamă de faptul că (MB), (BD) şi (MD) sunt ipotenuze în triunghiurile dreptunghice MAB, BAD şi MAD, vom putea scrie:

$$\frac{x^2+y^2}{34} = \frac{y^2+z^2}{25} = \frac{x^2+z^2}{41} = \frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{100} = \frac{x^2+y^2+z^2}{50}.$$

Dar, din triunghiul MAC, deducem că $MC^2 = x^2 + AC^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(15\sqrt{2}\right)^2 = 450$. Aşadar,

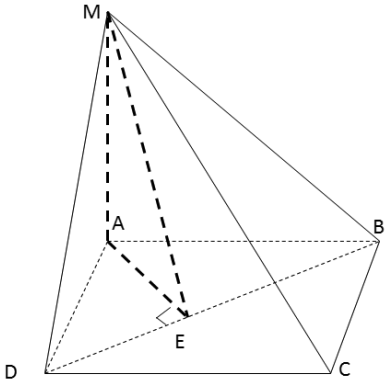
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{50} = \frac{450}{50} = 9. \text{ Astfel, deducem că au loc egalitățile : } \begin{cases} x^2+y^2=306 \\ y^2+z^2=225, \\ x^2+z^2=369 \end{cases} \text{ deci, } \begin{cases} x=15\ cm \\ y=9\ cm \\ z=12\ cm \end{cases}.$$

Evident, din faptul că nu se precizează care laturi ale triunghiului MBD sunt proporționale cu numerele date, putem avea trei cazuri :

I) dimensiunile dreptunghiului sunt de 15cm şi 12cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 9cm ;
II) dimensiunile dreptunghiului sunt de 9cm şi 12cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 15cm ;
III) dimensiunile dreptunghiului sunt de 9cm şi 15cm, iar lungimea segmentului (MA) este de 12cm .

G :351. **Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului ABCD se ia punctul M astfel încât MB = 8** $\sqrt{2}$ **cm , MC = 2** $\sqrt{41}$ **cm şi MD = 10 cm . Să se determine aria triunghiului MBD .**

***Prof.* Simon Marin,** Râmnicu Sărat



Rezolvare : Deoarece MA $\perp$ (ABC) şi AB $\perp$ BC $\Rightarrow$ MB $\perp$ BC (t. 3 $\perp$) $\Leftrightarrow$ ΔMBC dreptunghic în B .

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul MBC obținem că BC = 6cm. Analog calculăm pe [CD] din triunghiul dreptunghic MDC şi obținem CD = 8 cm. Din triunghiul dreptunghic BCD obținem că BD = 10 cm . Construim AE $\perp$ BD. Cu teorema înălțimii aplicată în triunghiul dreptunghic BAD obținem :

AE = $\frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$. Deoarece

MA $\perp$ (ABC) şi AE $\perp$ BD rezultă că ME $\perp$ BD (t. 3 $\perp$) ; deci [ME] este înălțime în triunghiul MBD.

Din triunghiul dreptunghic MAE obținem că ME = $\frac{8\sqrt{34}}{5}$ cm.

Aria cerută va fi : $A_{MBD} = \frac{BD \cdot ME}{2} = \frac{10 \cdot \frac{8\sqrt{34}}{5}}{2} = 8\sqrt{34}\ cm^2$.

▪ Clasa a IX-a

L:206. **Comparați** $x, y \in \mathbb{Z}^*$ **ştiind că** $3\sqrt{2011}x - 3\sqrt{2011}y - x^2 - y^2 = 2011$.

Prof. **Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

Rezolvare: Din $3\sqrt{2011}(x-y) = \underbrace{x^2 + y^2 + 2011}_{\rangle\, 0} \Rightarrow x - y \rangle\ 0 \Rightarrow x \rangle\ y$.

L:207. **Arătați că dacă** $x, y, z > 0$, **atunci** $\sum \frac{1}{4x^3y + y^3z + 2z^3x} \le \frac{\sum xy}{7x^2y^2z^2}$.

Prof. dr. **Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare: Avem, din inegalitatea mediilor

că $\frac{4x^3y + y^3z + 2z^3x}{7} = \frac{x^3y + x^3y + x^3y + x^3y + y^3z + z^3x + z^3x}{7} \ge x^2yz$, aşadar

$\frac{1}{4x^3y + y^3z + 2z^3x} \le \frac{1}{7x^2yz}$ şi prin urmare $\sum \frac{1}{4x^3y + y^3z + 2z^3x} \le \frac{1}{7xyz} \sum \frac{1}{x} = \frac{\sum xy}{7x^2y^2z^2}$.

L:208. **Să se arate că dacă** $x, y \in (0, \pi)$, **atunci** $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} \ge \frac{2}{\sin \frac{x+y}{2}}$.

(În legătura cu problema 26418 din G.M.-B, nr. 3/2011, propusă de *Neculai Stanciu*, Buzău)

Prof. **D.M. Bătinețu – Giurgiu,** Bucureşti

Rezolvare. Conform inegalității lui *Bergström* avem

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} \ge \frac{4}{\sin x + \sin y} = \frac{4}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} \quad (*)$$

Deoarece, $x, y \in (0, \pi)$ atunci $\frac{x-y}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi deci $0 < \cos\frac{x-y}{2} \le 1$, de unde deducem că

$\frac{1}{\cos\frac{x-y}{2}} \ge 1$ şi atunci din (*) rezultă ceea ce era de demonstrat.

Altfel, inegalitatea dată rezultă din faptul că funcția $\frac{1}{\sin x}$ este convexă pentru $0 < x < \pi$, şi atunci

conform inegalității lui Jensen avem: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} \ge \frac{2}{\sin\frac{x+y}{2}}$. (Soluție dată de Neculai Stanciu)

L:209. **Arătați că dacă** A, B, C, D **sunt patru puncte din spațiu astfel încât** $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = \sqrt{6}$, **atunci** $AC \perp BD$. **(În legătură cu o problema din Suplimentul cu exerciții al**

G.M-B nr. 10/2011)

***Prof.* Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Observăm că (*) $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=1^2+3^2=10=2^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$.

Deoarece $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, avem

$\overrightarrow{DA}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)^2=AB^2+BC^2+CD^2+2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=$

$=AB^2-BC^2+CD^2+2\left(BC^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=$

$=AB^2-BC^2+CD^2+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$, de unde, folosim şi (*) rezultă că

$2\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

L:210. **Să se arate că** $\dfrac{(xy)^2}{z^2(x+y)}+\dfrac{(yz)^2}{x^2(y+z)}+\dfrac{(zx)^2}{y^2(z+x)}\geq\dfrac{x+y+z}{2}$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+$.

***Prof.* Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmbovița

Rezolvare: Inegalitatea dată este echivalentă cu $\dfrac{(xy)^3}{z(x+y)}+\dfrac{(yz)^3}{x(y+z)}+\dfrac{(zx)^3}{y(z+x)}\geq\dfrac{xyz(x+y+z)}{2}$. Pentru a demonstra această inegalitate se foloseşte următorul rezultat:

Dacă $a_i,b_i\rangle 0,\ i=\overline{1,3}$,atunci $\sum_{i=1}^{3}\dfrac{a_i^2}{b_i}\geq\dfrac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$ (Inegalitatea lui Bergström). Astfel, putem scrie

$$\frac{(xy)^3}{z(x+y)}+\frac{(yz)^3}{x(y+z)}+\frac{(zx)^3}{y(z+x)}=\frac{(xy)^4}{xyz(x+y)}+\frac{(yz)^4}{xyz(y+z)}+\frac{(zx)^4}{xyz(z+x)}=\frac{\left[(xy)^2\right]^2}{xyz(x+y)}+\frac{\left[(yz)^2\right]^2}{xyz(y+z)}+\frac{\left[(zx)^2\right]^2}{xyz(z+x)}\geq$$

$$\geq\frac{\left[(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\right]^2}{xyz(x+y)+xyz(y+z)+xyz(z+x)}\geq\frac{\left[xyz(x+y+z)\right]^2}{2xyz(x+y+z)}=\frac{xyz(x+y+z)}{2}.$$

Inegalitatea $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\geq xyz(x+y+z)$ este adevărată deoarece în inegalitatea $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ s-au luat $a=xy,\ b=yz,\ c=zx$.

Notă: Alte două soluții şi trei rafinări ale acestei probleme au fost prezentate de domnii Titu Zvonaru şi Neculai Stanciu în numărul din luna iunie al revistei online mateinfo.ro.

L:211. **Să se demonstreze inegalitatea**

$\dfrac{1}{1+\sqrt[n]{tg\alpha}}+\dfrac{2\cdot\sqrt[n]{tg\alpha}}{(1+\sqrt[n]{tg\alpha})(1+\sqrt[n]{ctg\alpha})}+\dfrac{\sqrt[n]{ctg\alpha}}{(1+\sqrt[n]{ctg\alpha})}\geq\dfrac{3}{2}$, **unde** $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **şi** $n\in N,n\geq 2$.

***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare. Fie $\sqrt[n]{tg\alpha}=y,\sqrt[n]{ctg\alpha}=z$ .Avem $y,z>0$ şi $yz=1$.

Cu acestea, după calcule algebrice inegalitatea devine $(y-1)^2\geq 0$, ceea ce este adevărat.

Egalitatea are loc dacă $y=z=1$.

L:212. **Aflați minimul expresiei** $E=3a^2+13b^2+5c^2-12ab+2bc-8c+2011$.

***Prof.* Mariana Mitea**, Cugir, Alba

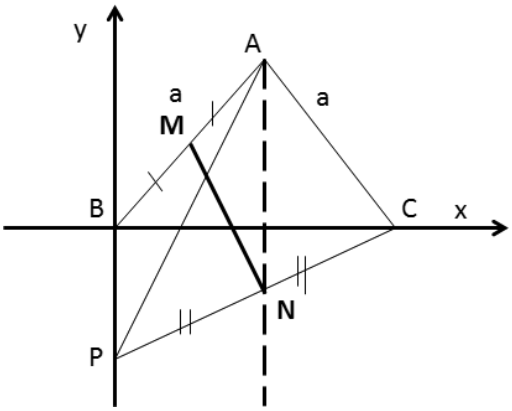
Rezolvare: Expresia dată este echivalentă cu $E=3(a-2b)^2+4(c-1)^2+(b+c)^2+2007\geq 2007$.

Minimul 2007 se obține pentru a = -2, b = -1, c = 1.

L:213. **Se dă triunghiul ABC, cu** $(AB)\equiv(AC)$. **Pe perpendiculara în B pe [BC] se consideră un punct oarecare, P şi fie M, mijlocul segmentului (AB) şi N, mijlocul segmentului (PC). Arătați că raportul** $\dfrac{MN}{AP}$ **este constant.**

***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

Rezolvare:



Notăm AB = a, $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$ şi considerăm reperul cartezian , având ca axă a absciselor, dreapta BC şi ca axă a ordonatelor, perpendiculara în B pe BC. Astfel, avem : $A(a\sin\alpha; a\cos\alpha)$, B(0;0), $C(2a\sin\alpha; 0)$, P(0;y) (unde y este un număr real oarecare), $M(\frac{a\sin\alpha}{2}; \frac{a\cos\alpha}{2})$ şi $N(a\sin\alpha; \frac{y}{2})$. Calculând cu ajutorul formulei distanţei, MN^2 şi AP^2 , se obţine :

$$MN^2 = \left(\frac{a\sin\alpha}{2} - a\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{a\cos\alpha}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ay\cos\alpha + y^2}{4}.$$

şi $AP^2 = (a\sin\alpha)^2 + (a\cos\alpha - y)^2 = a^2 - 2ay\cos\alpha + y^2$.

Deducem că $\frac{MN^2}{AP^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ raportul $\frac{MN}{AP}$ este constant.

Altfel, se poate folosi formula care dă lungimea medianei unui triunghi: $PM^2 = \frac{AP^2 + PB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$,

$$MC^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow 4MN^2 = 2PM^2 + 2MC^2 - PC^2 = PA^2 + BP^2 - \frac{AB^2}{2} + BC^2 + AC^2 - \frac{AB^2}{2} - PC^2.$$

Cum $4MN^2 = PA^2 + BP^2 + BC^2 - PC^2 \Leftrightarrow 4MN^2 = PA^2 \Rightarrow \frac{MN^2}{AP^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ raportul $\frac{MN}{AP}$ este constant.

(soluţie dată de dl. Titu Zvonaru).

L:214. Fie $x, y \rangle 0$ astfel încât x+y = 6. Să se arate că $\frac{x}{y^2x+y} + \frac{y}{x^2y+x} \rangle \frac{1}{10}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Din $x^2y + x \langle x^2y + x + y + y^2x = (x+y)(xy+1)$ şi $y^2x + y \langle x^2y + x + y + y^2x = (x+y)(xy+1)$ rezultă

$\frac{x}{y^2x+y} + \frac{y}{x^2y+x} \rangle \frac{x}{(x+y)(xy+1)} + \frac{y}{(x+y)(xy+1)} = \frac{1}{xy+1} \rangle \frac{1}{10}$ deoarece din

$xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9 \Rightarrow xy + 1 \langle 10 \Rightarrow \frac{1}{xy+1} \rangle \frac{1}{10}$.

Observaţie: Mai mult, $\frac{x}{y^2x+y} + \frac{y}{x^2y+x} \rangle \frac{1}{5}$, cu egalitate când x = y = 3.

L:215. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x^3y = \frac{1}{3} \\ 3x + y = 3 \end{cases}$; ***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

Rezolvare: Din prima ecuaţie rezulta ca x şi y sunt nenule şi au acelaşi semn.Din a doua ecuaţie deducem că x şi y sunt pozitive.

Avem: $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{x^3y} \le \frac{x+x+x+y}{4} = \frac{3x+y}{4} = \frac{3}{4}$ de unde $\frac{1}{3} \le \frac{81}{256} \Leftrightarrow 256 \le 243$ ceea ce este fals deci sistemul nu are soluţie.

L:216. **Să se arate că numărul 6^{2012} are cel puțin 1566 de cifre.** ***Prof.* Ovidiu Țâțan** , Râmnicu Sărat

Rezolvare: Cum $6^9 = 10077696$ putem încerca o minorare de forma:

$6^{2012} = 6^{9\cdot 223+5} = 6^5 \cdot \left(6^9\right)^{223} > 6^5 \cdot \left(10^7\right)^{223} = 7776 \cdot 10^{1561} = 7,776 \cdot 10^{1564}$ număr care are 1565 de cifre, insuficient pentru cerința problemei.

Vom încerca o minorare mai bună folosind inegalitatea lui Bernoulli :

$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}.$ (*)

Obținem:

$6^{2012} = 6^{9\cdot 223+5} = 6^5 \cdot (6^9)^{223} = 6^5 \cdot (10^7 \cdot 1,0077696)^{223} = 7776 \cdot (10^7)^{223} \cdot (1,0077696)^{223} \overset{din(*)}{\geq}$

$\overset{din(*)}{\geq} 7776 \cdot 10^{1561} \cdot (1 + 0,0077696 \cdot 223) = 7,776 \cdot 10^{1564} \cdot 2,7326208 \rangle 21,24... \cdot 10^{1564} = 2,124.... \cdot 10^{1565}$.

număr care are cel puțin 1566 de cifre.

Observație: La clasa a X-a problema este simplă. Cum $\lg 6 \simeq 0,77815$ avem:

$6^{2012} = 10^{\lg 6^{2012}} = 10^{2012\cdot \lg 6} > 10^{2012\cdot 0,77815} = 10^{1565,6378} > 10^{1565}$ număr care are 1566 cifre.

L:217. **Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $\frac{[x]}{x} + \frac{x}{[x]} = \frac{85}{42}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x .**

***Prof.* Constantin Dinu**,Buzău

Rezolvare: Condiții de existență $x \neq 0$ si $[x] \neq 0$, deci $x \notin [0,1)$

Notăm $\frac{x}{[x]} = y$, $y + \frac{1}{y} = \frac{85}{42}$ $y_1 = \frac{7}{6}$ $y_2 = \frac{6}{7}$.

i) Dacă $x \rangle 0$, din $[x] \leq x \Rightarrow \frac{x}{[x]} \geq 1$, deci $\frac{x}{[x]} = \frac{7}{6}$.

Ținem cont că $x - 1 < [x] \leq x \Leftrightarrow \frac{7}{6}[x] - 1 < [x] \leq \frac{7}{6}[x]$ de unde $[x] < 6$ şi cum $x \geq 1$, avem

$[x] \in \{1,2,3,4,5\}$, deci $x \in \left\{\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{14}{3}, \frac{35}{6}\right\}$

ii) Dacă $x < 0$, $[x] < 0$ si $|[x]| \geq |x|$, $0 < \frac{x}{[x]} = \left|\frac{x}{[x]}\right| \leq 1$, deci $\frac{x}{[x]} = \frac{6}{7}$, $\frac{6[x]}{7} - 1 < [x] \leq \frac{6[x]}{7}$

$[x] \in \{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$, $x \in \left\{-\frac{36}{7}, -\frac{30}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}\right\}$.

L:218 **a) Să se găsească formula termenului general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit (descriptiv) astfel:**

$\frac{1}{1\cdot 11}; \frac{1}{11\cdot 21}; \frac{1}{21\cdot 31}; \ldots;$

b) Calculați suma : S = $\frac{1}{1\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 21} + \frac{1}{21\cdot 31} + \ldots + \frac{1}{2001\cdot 2011}$ **.**

c) Determinați partea întreagă şi partea fracționară a numărului S determinat la punctul b) .

***Prof.* Strutu Ligia , *Prof.* Gheorghe Struțu**, Buzau

Rezolvare: a) $a_n = \frac{1}{(10n-9)(10n+1)}$.

b) $S = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21}\right) + \ldots + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2001} - \frac{1}{2011}\right) = \frac{201}{2011}$.

c) $0 \langle S \langle 1 \Rightarrow [S] = 0 \Rightarrow \{S\} = S - [S] = S - 0 = S = \frac{201}{2011}$.

▪ Clasa a X-a

L:219. **Arătați că dacă** $x_k \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$**, atunci:** $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k}\right) \geq \frac{27}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right)$**.**

Prof. dr. **Mihály Bencze,** Braşov

Rezolvare. Pentru orice $t \in (0,1)$, avem inegalitatea $\frac{t}{1-t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 \Leftrightarrow \left(t\sqrt{3}-1\right)^2\left(t\sqrt{3}+2\right) \geq 0$.

Dacă $t = \sin x_k$, $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k$. Dacă $t = \cos x_k$, $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k$.

După înmulțirea celor două inegalități de mai sus obținem concluzia.

L:220. **Fie numerele** $\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{1}{\cos\beta}, \sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta}$**, unde** $\alpha, \beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$**. Să se arate că există un triunghi având laturile numerele date şi să se calculeze aria acestui triunghi.**

Prof. **Constantin Rusu,** Râmnicu Sărat

Rezolvare. Se verifică prin calcul că oricare latură este mai mică decât suma celorlalte două: $\frac{1}{\cos\alpha} < \frac{1}{\cos\beta} + \sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta} \Leftrightarrow 1 + tg^2\alpha < 1 + tg^2\beta + \frac{2}{\cos\beta}\sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta} + tg^2\alpha + tg^2\beta$

$\Leftrightarrow 0 < 2tg^2\beta + \frac{2}{\cos\beta}\sqrt{tg^2\alpha + tg^2\beta}$, ceea ce este adevărat, etc.

Pentru calculul ariei fie u unghiul făcut de laturile $\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{1}{\cos\beta}$.Atunci, $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin u$.

Folosind teorema cosinusului obținem

$$\cos u = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \left(tg^2\alpha + tg^2\beta\right)}{\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{1 + tg^2\alpha + 1 + tg^2\beta - tg^2\alpha - tg^2\beta}{\frac{2}{\cos\alpha\cos\beta}} = \cos\alpha\cos\beta$$

În final se obține, $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

L:221. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **ecuația** $\sqrt{x-2012} + \sqrt{y-2012} = \frac{x+y+976}{100}$**.**

Prof. **Adrian Stan,** Buzău

Rezolvare: Fie $x - 2012 = a \Rightarrow x = a + 2012$ şi $y - 2012 = b \Rightarrow y = b + 2012$. Atunci, ecuația este echivalentă cu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a+b+4024+976}{100} = \frac{a+b}{100} + \frac{5000}{100} = \frac{a+b}{100} + 50$. Cum

$\frac{a+b}{100} + 50 \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{100}\cdot 50} = 2\sqrt{\frac{a+b}{2}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2}{2}} \geq 2\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. (*) S-a aplicat inegalitatea mediilor şi inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Avem egalitate în (*) dacă şi numai dacă $\frac{a+b}{100} = 50$ şi $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ de unde rezultă că $a = b = 2500$.

$S = \{(4512, 4512)\}$.

L:222. **Fie** $z \in \mathbb{C}$ **astfel încât** $|z| = 1$. **Să se arate că** $\left|z^{2011} - 2\right| + \left|z^{2012} - z\right| + \left|z^{2011} + 1\right| \geq 1$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $\left|z^{2011} - 2\right| = \left|z^{2011} + 2\right| = \left|z^{2012} + 2z\right|$, $\left|z^{2011} + 1\right| = \left|-z\right| \cdot \left|z^{2011} + 1\right| = \left|-z^{2012} - z\right|$. Atunci,

$\left|z^{2011} - 2\right| + \left|z^{2012} - z\right| + \left|z^{2011} + 1\right| = \left|z^{2012} + 2z\right| + \left|z^{2012} - z\right| + \left|-z^{2012} - z\right| \geq \left|z^{2012} + 2z + z^{2012} - z - z^{2012} - z\right| =$

$= \left|z^{2012}\right| = |z|^{2012} = 1$.

L:223. **Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația:** $z^3 - 3iz = 1 - i$

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

Rezolvare: Ecuația este echivalentă cu

$z^3 + (-i)^3 + (-1)^3 - 3z(-i)(-1) = 0 \Leftrightarrow (z - i - 1)[z^2 + (-i)^2 + (-1)^2 - z(-i) - (-i)(-1) - z(-1)] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z - i - 1)[z^2 + z(i + 1) - i) = 0$

De unde o rădăcină este $z_1 = 1 + i$ iar celelalte două se obțin rezolvând ecuația $z^2 + (1 + i)z - i = 0$ cu

$\Delta = (1 + i)^2 + 4i = 6i = 3 \cdot 2i = 3(1 + i)^2 = \sqrt{3}(1 + i)^2$, $z_2 = \dfrac{-1 - i + \sqrt{3}(1 + i)}{2}, z_3 = \dfrac{-1 - i - \sqrt{3}(1 + i)}{2}$

L:224. **Rezolvați ecuația** $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 4$

***Prof.* Constantin Dinu**, Buzău

Rezolvare: Condiția de existență $x > 0$, $x^2 - 1 \geq 0$, adică $x \in [1, +\infty)$

$\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$ şi $2 + \sqrt{x^2 - 1} \geq 2$, deci $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq 4$

$\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2$ şi $\left(2 + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 2$, de unde x = 1.

L:225. **Să se arate că** $\dfrac{1}{2^{x+1}} + \dfrac{1}{2 \cdot 3^x} + \dfrac{1}{2 \cdot 5^x} \geq \dfrac{1}{2^x + 3^x} + \dfrac{1}{3^x + 5^x} + \dfrac{1}{2^x + 5^x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

***Prof.* Strutu Ligia, *Prof.* Gheorghe Struțu** , Buzau

Rezolvare: Notez : $2^x = a$, $3^x = b$, $5^x = c$. $\Rightarrow a, b, c$ sunt pozitive pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Cu aceste notații , inegalitatea se scrie astfel : $\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c} \geq \dfrac{1}{a + b} + \dfrac{1}{b + c} \dfrac{1}{a + c}$ (*).

Folosind inegalitatea : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a + b}$ succesiv pentru perechile de numere a şi b , b şi c , c şi a şi adunând membru cu membru inegalitățile astfel obținute , va rezulta următoarea inegalitate :

$\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c} \geq \dfrac{4}{a + b} + \dfrac{4}{b + c} \dfrac{4}{a + c}$, care prin înmulțire cu $\dfrac{1}{4}$ devine (*) , ceea ce trebuia demonstrat. .

▪ CLASA a XI-a

L:226. **Determinați** $m \in \mathbb{R}_+^*$ **astfel încât funcția** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = m^{1-m} x^m$ **să verifice relația** $f^{-1}(x) = f'(x), \ \forall x \in (0; \infty)$.

***Prof.* Laura Tănase**, Buzău

Rezolvare: $f'(x) = m^{1-m} \cdot m \cdot x^{m-1} = m^{2-m} \cdot x^{m-1}$. Cum f este evident bijectivă, determinăm inversa sa.

Din $f(x) = y \Rightarrow x^m = \dfrac{y}{m^{1-m}} \Rightarrow x = \sqrt[m]{\dfrac{y}{m^{1-m}}} = y^{\frac{1}{m}} \cdot m^{\frac{m-1}{m}}$. Aşadar, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}} \cdot m^{\frac{m-1}{m}}$.

Din $f^{-1}(x)=f'(x)\Rightarrow m^{2-m}\cdot x^{m-1}=m^{\frac{m-1}{m}}\cdot x^{\frac{1}{m}}\Rightarrow 2-m=\frac{m-1}{m}$ şi $m-1=\frac{1}{m}$. Din cele două rezultă $m^2-m-1=0$ cu singura soluție posibilă $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L:227. **Să se calculeze limita** $\lim\limits_{n\to\infty}[a_1(n+1)+a_2\sqrt{n^2+2}+a_3\sqrt[3]{n^3+3}+...+a_k\sqrt[k]{n^k+k}]$ **unde** $a_1+a_2+...+a_k=0$ **.**

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

Rezolvare: $\lim\limits_{n\to\infty}[a_1(n+1)+a_2\sqrt{n^2+2}+a_3\sqrt[3]{n^3+3}+...+a_k\sqrt[k]{n^k+k}]=a_1+$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_2\sqrt{n^2+2}+a_3\sqrt[3]{n^3+3}+...+a_k\sqrt[k]{n^k+k}-a_2n-a_3n-...-a_kn)=a_1+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=2}^{k}a_i(\sqrt[i]{n^i+i}-n)=$

$$=a_1+\sum_{i=2}^{k}a_i\lim_{n\to\infty}\frac{i}{(\sqrt[i]{n^i+i})^{i-1}+(\sqrt[i]{n^i+i})^{i-2}\cdot n+(\sqrt[i]{n^i+i})^{i-3}\cdot n^2+...+n^{i-1}}=a_1$$

L:228. **Să se găsească toate şirurile** $(x_n)_{n\geq1}$ **cu proprietatea** $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=1$ **oricare ar fi** $n\geq1$**.**

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

Rezolvare: Pentru $n\in N, n\geq1$,definim $u_n=x_{n+1}-x_n$. Relația din enunț devine $u_{n+1}-u_n=1$ adică u_n este o progresie aritmetică cu rația 1.Rezultă că $u_n=u_1+n-1$ şi pentru orice $n\geq2$ avem

$$\begin{aligned}
&x_n-x_{n-1}=u_1+n-2\\
&x_{n-1}-x_{n-2}=u_1+n-3\\
&x_{n-2}-x_{n-3}=u_1+n-4\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_4-x_3=u_1+2\\
&x_3-x_2=u_1+1\\
&x_2-x_1=u_1
\end{aligned}$$

Prin adunare rezultă $x_n-x_1=(n-1)u_1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ de unde

$x_n=x_1+(n-1)(x_2-x_1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ oricare ar fi $n\geq1, x_1, x_2$ putând lua orice valori reale. Şirul $(x_n)_{n\geq1}$ fiind un polinom în n de gradul 2 cu coeficientul dominant $\frac{1}{2}$ are limita ∞.

L:229. **Fie matricea** $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$**. Să se arate că ecuația** $X^{2010}+X^{2011}+X^{2012}=A^{2013}$ **nu are soluții în** $M_3(\mathbb{R})$**.**

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: Cum $\det(A^{2013})=(\det(A))^{2013}=(-5)^{2013}\langle0$ şi

$\det(X^{2010}+X^{2011}+X^{2012})=\det[X^{2010}\cdot(I_2+X+X^2)]\geq0$ deoarece

$\det(I_2+X+X^2)=\det\left[(X+\frac{I_2}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]\geq0$ rezultă că ecuația nu poate avea soluții.

▪ Clasa a XII-a

L:230. **Arătați că dacă** $\alpha>0, G_1=(-\alpha,\alpha), G_2=(e^{-\alpha},e^{\alpha}), x\circ y=\frac{\alpha^2(x+y)}{\alpha^2+xy}, x*y=(xy)^{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\ln x\ln y}}$**,**

atunci $(G_1,\circ)$ şi $(G_2,*)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

***Prof. dr.* Mihály Bencze**, Braşov

Rezolvare. Se consideră $f: G_1 \to G_2, f(x) = \ln x$, bijectivă. Se verifică uşor că $f(x \circ y) = f(x) * f(y), (G_1,\circ)$ grup abelian $\Rightarrow (G_2,*)$ grup abelian şi $(G_1,\circ)$ şi $(G_2,*)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.

L:231. Se consideră $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ cu $f(2011) = 2010$ şi $g(x) = x^2 - 2x + 2011$ astfel încât ecuaţia $f(g(x)) = 0$ nu are rădăcini reale. Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$ ştiind că are patru rădăcini distincte numere naturale.

***Prof.* Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău

Rezolvare: Deoarece $g(x) = (x-1)^2 + 2010$ are toate valorile în intervalul $[2010,\infty)$ şi $f(g(x)) = 0$ nu are rădăcini reale rezultă că toate cele patru rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$ trebuie să fie mai mici decât 2010.Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 şi x_4 rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ avem

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

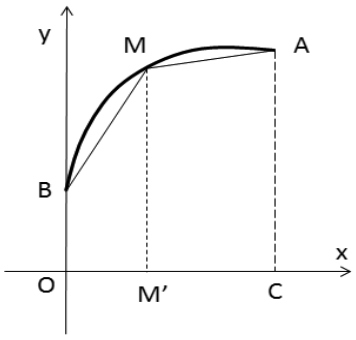
Atunci $f(2011) = (2011 - x_1)(2011 - x_2)(2011 - x_3)(2011 - x_4) = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

Deoarece fiecare factor este număr natural rezultă :

$\{2011 - x_1, 2011 - x_2, 2011 - x_3, 2011 - x_4\} = \{2,3,5,67\}$.Deci $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{2009,2007,2006,1944\}$.

L:232. Să se arate că $\int_0^1 arctge^x dx > \frac{13\pi}{48}$. ***Prof.* Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

Rezolvare. Considerăm fucţia $f: [0,1] \to R, f(x) = arctge^x$.



Deoarece $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} > 0, f''(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} < 0$, rezultă că funcţia f este strict crescătoare şi strict concavă. Avem următorul grafic

unde: $A(1, arctge), B\left(0, \frac{\pi}{4}\right), C(1,0), M\left(\frac{1}{2}, arctg\sqrt{e}\right), M'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Avem: $Aria(OBAC) > Aria(OBMM') + Aria(M'MAC)$. Deci,

$$\int_0^1 arctge^x dx > \left(\frac{\pi}{4} + arctg\sqrt{e}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(arctg\sqrt{e} + arctge\right) \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2arctg\sqrt{e} + arctge\right) > \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{13\pi}{48}.$$

În ultima inegalitate am folosit faptul că funcţia $arctg$ este strict crescătoare.

L:233. Să se determine primitivele funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 14x + 11}{(x^2 - 2x + 3)^3}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

Rezolvare: $\int f(x)dx = \int \frac{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 14x + 11}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 3} dx - \int \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx =$

$$= \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2} = arctg(x-1) + \frac{1}{2(x^2 - 2x + 3)^2} + C.$$

L:234. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}, a > 0$ o funcţie derivabilă cu derivata crescătoare si pozitivă. Dacă $n \in \mathbb{N}$,

$n \geq 2$ atunci are loc inegalitatea: $\int_a^b f(x)dx \leq \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(b-a)\left(b^n f(b) - a^n f(a)\right)}{b^n - a^n} - \frac{bf(b) - af(a)}{n}\right)$.

***Prof.* Florin Stănescu**, Găeşti, Dâmboviţa

Rezolvare: În primul rând din, f' are proprietatea lui Darboux şi crescătoare rezultă că f' este continuă.

Din $\left(x^n f(x)\right)' = nx^{n-1} f(x) + x^n f'(x), (\forall) x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b \left(x^n f(x)\right)' dx = \int_a^b x^{n-1}\left(nf(x) + xf'(x)\right)dx \Rightarrow$

$b^n f(b) - a^n f(a) = \int_a^b x^{n-1}\left(nf(x) + xf'(x)\right)dx$ (1).

Acum, din x^{n-1} si $nf(x) + xf'(x)$ funcții crescatoare , cu ajutorul inegalității lui Cebâşev(dacă f şi g au aceeaşi monotonie $\Rightarrow \int_a^b fg \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \cdot \int_a^b g$, rezultă

$$\int_a^b x^{n-1}\left(nf(x) + xf'(x)\right)dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b x^{n-1}dx \cdot \left(\int_a^b (nf(x) + xf'(x))dx\right) = \frac{b^n - a^n}{n(b-a)}\left(n\int_a^b f(x)dx + \int_a^b xf'(x)dx\right) =$$

Revenind în (1) obținem

$$b^n f(b) - a^n f(a) \geq \frac{b^n - a^n}{n(b-a)}\left(n\int_a^b f(x)dx + \int_a^b xf'(x)dx\right) = \frac{b^n - a^n}{n(b-a)}\left(n\int_a^b f(x)dx + bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right) \Rightarrow$$

$$\frac{n(b-a)}{b^n - a^n}\left(b^n f(b) - a^n f(a)\right) - bf(b) + af(a) \geq (n-1)\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{n}{n-1}\cdot\left(\frac{(b-a)\left(b^n f(b) - a^n f(a)\right)}{b^n - a^n} - \frac{bf(b) - af(a)}{n}\right) \geq \int_a^b f(x)dx.$$

L:235. **Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 2012 elemente. Să se arate că:**
i) În G există un element de ordinul 2; ii) în G nu există un element de ordin 3.

***Prof.* Costică Ambrinoc**, Rm. Sărat

Rezolvare: i)Grupăm elementele lui G în perechi (x, x^{-1}) unde $x \neq x^{-1}$.Vom reuşi să grupăm aşa un număr par din elementele lui G.Rămâne e ,elementul neutru,pe care nu-l putem introduce într-o astfel de pereche. Dacă acestea ar fi toate elementele lui G ar rezulta că G are un număr impar de elemente ceea ce este fals. Deci în G mai există cel puțin un element $a \neq e$ cu $a = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 = e \Leftrightarrow a$ are ordinul 2.
ii) Dacă în G există un element de ordinul 3 atunci conform Teoremei lui Lagrange ordinul acestui element divide ordinul grupului G, adică 3 divide 2012 ceea ce este fals.

L:236. Fie a un număr real nenul. Să se arate că dacă lungimile laturilor unui poligon înscris într-un cerc $l_1, l_2, ..., l_n$ sunt rădăcinile ecuației:

$ax^n - x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_2x^2 - n^2x + \frac{1}{a} = 0$**, atunci poligonul este regulat.**

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Spania

Rezolvare: Din formulele lui Viète avem: $l_1 + l_2 + ... + l_n = \frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + ... + \frac{1}{l_n} = an^2$, de unde prin

înmulțire obținem: $\frac{l_1 + l_2 + ... + l_n}{n} = \frac{n}{\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + ... + \frac{1}{l_n}}$. Deci avem egalitate în inegalitatea medie

aritmetică-medie armonică şi prin urmare: $l_1 = l_2 = ... = l_n$, ceea ce trebuia de arătat.

„ A şti este o nevoie vitală, a gândi este o necesitate, adevărul este hrană ca şi pâinea”.
Victor Hugo

5. Probleme propuse

▪ *ÎNVĂŢĂMÂNT PRIMAR*

P:246. Aflaţi numerele naturale x astfel încât $(x-51)\cdot(x-1961)\cdot(x-1986)\cdot(x-2012)=0$.

***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

P:247. Suma a două numere naturale este 2012, iar diferenţa celor două numere naturale este 1986. Aflaţi cele două numere naturale. ***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

P:248. Fie şirul de numere naturale: 11, 37, 63, 89, …

a) Scrieţi următorii patru termeni ai şirului.
b) Este numărul natural 1987 termen al şirului ?
c) Scrieţi al 2012 – lea termen al şirului. ***Prof.* Mircea Mario Stoica**, Arad

P:249. Un elev a cumparat intr-o zi 6 caiete si 2 pixuri platind 46 de lei. A doua zi a cumparat 8 caiete si 3 pixuri de acelasi fel platind 64 lei. Cat costa un caiet si cat costa un pix?

***Prof.* Mirela Axente**, Buzău

P:250. Într-o urnă se află 24 de bile: 7 roşii, 9 verzi şi restul albastre. Să se afle numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să le extragem fără a ne uita la culoarea lor, pentru a fi siguri că am scos cel puţin o bilă roşie şi o bilă verde.

Prof. Popa Florinela Marilena, Prof. Popa Adrian Laurentiu,Buzau

P:251. O persoană urcă nişte scări după regula: urcă 3 trepte, coboară 2 trepte, urcă din nou 5 trepte şi coboară o treaptă. Se consideră că atunci când face un pas, fie urcă, fie coboară o treaptă. După câţi paşi se află persoana pe treapta cu numărul 26?

Prof. Popa Florinela Marilena, Prof. Popa Adrian Laurentiu, Buzau

P:252.George cumpără o carte cu un sfert din banii pe care îi are, iar cu un sfert din banii rămaşi cumpără caiete. Câţi lei a avut, dacă i-au rămas 36 lei?

***Înv.* Rotărescu Viorel**, Vadu Paşii

P:253.În prezent mama are 34 de ani, iar fiicele sale au 10 şi 12 ani. Peste câţi ani vârsta mamei va fi egală cu suma vârstelor fiicelor sale?

***Prof.* Lupşan Nicoleta,** Berca

P:254.Bunicul a cumpărat de la piaţă 3 kg de portocale şi 2 kg de mere şi a primit rest 2 lei de la două bancnote de 10 lei. Bunica a cumpărat 5 kg de portocale şi 4 kg de mere şi a primit rest 18 lei de la o bancnotă de 50 de lei. Cât costă un kg de portocale şi un kg de mere?

***Înv.* Lupşan Ion,** Pleşcoi

P:255.Suma a două numere este 132. Dacă primul număr îl înmulţim cu 9, iar al doilea cu 3, obţinem două produse egale. Care sunt cele două numere?

***Înv.* Marchidanu Florica,** Berca

P:256.Lidia a citit o carte în 4 zile. În prima zi a citit 120 de pagini, în a doua zi 1/3 din cât a citit în prima zi şi încă 10 pagini, în cea de-a treia zi a citit de 2 ori mai mult ca în a doua zi şi încă 10 pagini, iar în ziua a patra, jumătate din cât a citit în ziua a treia şi încă 48 de pagini.
Câte pagini are cartea în total?

***Prof.* Marinescu Gabriela,Vadu-Paşii**

P:256.Vârsta Ioanei reprezintă suma cifrelor numărului obţinut calculând suma dintre ziua de naştere a ei şi răsturnatul acesteia. Aflaţi vârsta Ioanei ştiind că s-a născut în ultima zi a lunii februarie într-un an bisect.

***Prof.* Brânză Cristian** ,Buzău

P:257.Se dau numerele: a = (73 x 9 – 318 – 777 : 3) + 796 – 63 x 10 şi
b = 272 x 2 : 8 – 117 : 9 + 488 : 2 – 91 x 2 . Calculează:
a)diferenţa dintre suma şi diferenţa celor două numere; b)suma dintre diferenţa şi suma celor două numere.

***Prof.* Luca Mihaela Cornelia**,Berca

▪ Clasa a V-a

G:352. Fără să se cunoască suma pe fiecare linie, coloană sau diagonală si care este aceeaşi , să se pună în pătrat numerele prime 1, 13, 31, 37, 43, 73 astfel încât să se obţină un pătrat magic.

67		
		61
		7

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:353. Găsiţi cel puţin patru numere naturale $\overline{cd}$ şi a şi b corespunzătoare astfel încât să avem: $a^2+b^2+c^2=\overline{cd}$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu,** Craiova

G:354. Să se arate că nu există numerele naturale a şi b astfel încât $a^4+b^4=2019$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:355. Determinaţi numerele naturale care admit 6 divizori, ştiind că produsul divizorilor este 5832.

***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

G:356. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţia:
$(x-1961)(x-1960)+(y-24)(y-23)+(z-49)(z-48)=0$. ***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

G:357. Se consideră numărul : $A = 25^{n+3}\cdot 4^{n+2} + 25^{n+2}\cdot 4^{n+3}$; n este număr natural. Să se aducă numărul A la forma cea mai simplă şi să se scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

***Prof.* Cornelia Gurău**,Moineşti,Bacău

G:358. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ formate din cifre prime pentru care a(d + 1) + bd + 2cd = 16d.

***Prof.* Gheorghe Ghiţă,** Buzău

G:359. Să se afle numerele de trei cifre care împărţite la răsturnatele lor dau câtul 5 şi restul un număr prim. **Titu Zvonaru,** Comăneşti

G:360. Determinaţi mulţimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}/n^2+2011n-3^{2012}+3^{2011}-3^{2010}+3^{2009}-1=2+4+6+...+2012\right\}$

***Prof.* Delia Ileana Basch- Naidin,** Caracal, Olt

▪ Clasa a VI-a

G:361. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuaţia: $xy-3x+y=17$.

***Prof.* Doina Stoica şi Mircea Mario Stoica,** Arad

G:362. Determinaţi toate numerele naturale n astfel încât numărul $\dfrac{n}{2012-n}$ să fie pătrat perfect.

D.M. Bătineţu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:363. Găsiţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\sqrt{\overline{abc}}=a^2+b-c$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:364. Găsiţi numerele naturale $n_1,n_2,n_3,....,n_{2011},n_{2012}$ astfel încât $\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{n_3}+...+\dfrac{1}{n_{2012}}=1$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:365. Să se arate că fracţia $E=\dfrac{2^{2n+1}\cdot 5^{2n+3}-1}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}+2^{2n+1}\cdot 5^{2n+2}}$ este reductibilă pentru orice n număr natural nenul. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:366. Comparați fracțiile: $\frac{n^{k+1}+(n+1)^k}{n^k+(n+1)^{k+1}}$ și $\frac{(n+1)^k+(n+2)^{k+1}}{(n+1)^{k+1}+(n+2)^k}$, unde $n \in N^*, k \in N$.

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

▪ Clasa a VII-a

G:367. Să se arate că ecuația $x^2-y^2+x-3y=3$ nu are soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:368. Să se determine $x,y,z \in \mathbb{Q}$ știind că $\frac{2012}{x+y}=\frac{4024}{x+z}=\frac{6036}{y+z}$ și $(x+y)(x+z)(y+z)=6$.

***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:369. Să se rezolve ecuația $\frac{x^2}{4022}=x-1005,5$ în $\mathbb{R}$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:370. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numerele 3n+18 şi 7n+7 să fie două pătrate perfecte consecutive.

***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

G:371. Aflați numerele $0 < x_i \le 1$, $i=\overline{1,2012}$, care satisfac relația:

$$\frac{2011x_1+1}{x_1}+\frac{2011x_2+1}{x_2}+\ldots+\frac{2011x_{2012}+1}{x_{2012}}=2012^2.$$

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:372. Aflați valorile lui $a \in \mathbb{N}$ pentru care numărul: $A=1^2+2^3+3^4+...99^{100}+100^{101}+a^{a+1}$, este divizibil cu 3. ***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

G:373. Fie a, b, c, d, numere raționale. Se ştie că

$\frac{3b-2a}{3b-3a}=4$; $\frac{3d+2c}{3d+3c}=\frac{16}{19}$; $\frac{5a+b}{5c+d}=2$. Calculati: $\frac{3a+b}{3c+d}$.

***Prof.* Valerica Roşu**, Rm. Sărat

G:374. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ (**a, b, c, d** fiind cifre în baza 10) şi $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, ştiind că:

$$\frac{\overline{abcd}}{4}+\frac{\overline{abcd}}{5^2}+\frac{\overline{abcd}}{5^3}+\ldots+\frac{\overline{abcd}}{5^n}=\frac{5^{n+1}+5^n-5}{4}.$$

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Scorniceşti-Olt

G:375. Să se determine măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic ştiind că înălțimea din vârful unghiului drept împarte ipotenuza în două segmente, dintre care, unul are lungimea de trei ori mai mare decât a celuilalt. ***Prof.* Constantin Apostol**, Rm. Sărat

G:376. Să se arate că dacă A şi B sunt două numere formate din 2n respectiv n cifre identice egale cu **a** atunci numărul $N=\frac{a(A+16B)+9a^2}{9}$ este pătrat perfect.

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

▪ Clasa a VIII-a

G:377. Să se arate că $\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{(y-2)^2}+|z+3| \ge 2$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

G:378. Arătați că $\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+2}{\sqrt{a+1}}+\frac{a+3}{\sqrt{a+2}}+\frac{a+1006}{\sqrt{a+1005}}\rangle 2012$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

G:379. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația:
$x+y+z-5886=2\sqrt{x-2008}+6\sqrt{y-1952}+10\sqrt{z-1961}$. ***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

G:380. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația: $2(x-3)\ \le\ 5(x-4)\ \langle\ 3(x-1)$.
***Prof.* Mircea Mario Stoica,** Arad

G:381. Demonstrați că $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$. Generalizare.
***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

G:382. Arătați că dacă $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, atunci: $\frac{a^3}{a+b}\le\frac{5a^2-b^2}{8}$.
D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

G:383. Să se rezolve ecuația: $\frac{2005}{x-2009}+\frac{2006}{x-2008}+\frac{2007}{x-2007}+\frac{2008}{x-2006}=4.$
***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

G:384. **a**) Să se arate că $\sqrt{\frac{k-1}{k}}<\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$, k număr natural nenul.
b) Să se arate că: $\frac{1}{2\sqrt{1006}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot2011}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$. ***Prof.* Valerica Roşu**, Rm.Sărat

G:385. Determinați numerele naturale m,n, astfel încât să avem: $\sqrt{2m-1}=\sqrt{7m+2n}-\sqrt{2m+2}$.
***Prof.* Florin Stănescu,Găeşti,** Dâmbovița

▪ Clasa a IX - a

L:237. Să se rezolve ecuația $\left[x^{2012}\right]-\left[2x\right]-2=\left\{x\right\}-3$, unde $\left[x\right]$ reprezintă partea întreagă a lui x iar $\left\{x\right\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:238. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x+y)+f(3x-y)=8048x+3888,\forall x,y\in\mathbb{R}$.
Să se determine f şi să se arate că $f\left(\frac{x}{2012}+\frac{2012}{x}\right)\rangle\ 5968$. ***Prof.* Nicolae Ivăşchescu**, Craiova

L:239. Se consideră ecuația $2x^2-2(m+1)x+m^2-1=0,\ m\in\mathbb{R},x_1,x_2$ rădăcinile reale ale ecuației date. Aflați mulțimea valorilor pe care le poate lua expresiile: $x_1+x_2;\ x_1x_2;\ x_1^2+x_2^2$.
***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:240. Calculați suma: $S=1\cdot7+2\cdot13+3\cdot21+4\cdot31+...+n^3,\ n\ge1$.
***Prof.* Petre Păunescu**, Roşiorii de Vede,Teleorman

L:241. Fie numerele a,b,c în intervalul $(0,1]$. Arătați că:

$$a\cdot\sqrt{\frac{c}{1+a+bc}}+b\cdot\sqrt{\frac{a}{1+b+ca}}+c\cdot\sqrt{\frac{b}{1+c+ab}}\le\sqrt{3}.$$

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona Tech, Spania

L:242. Dacă $\sin x+\sin y+\sin z=1,\sin^3x+\sin^3y+\sin^3z=1$, atunci $\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=0$.
***Prof.* Ovidiu Țâțan ,** Râmnicu Sărat

L:243. Arătați că dacă $0 < a \le b$ şi $x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a \cdot \sin x_k + b \cdot tgx_k\right) > (a+b) \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:244. Se dă şirul $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}, n \in N, n \ge 1$. Interpretați geometric termenii acestui şir şi rezolvați ecuația: $|u_n - 1| < \frac{1}{10}$.

***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

L:245. Fie a, b, c numere reale nenule astfel încât $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{a}{\left(1+a^2\right)^2} + \frac{b}{\left(1+b^2\right)^2} + \frac{c}{\left(1+c^2\right)^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti, Neculai Stanciu, Buzău

▪ Clasa a X - a

L:246. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(\log_5 x + 2) = 5x, \ \forall x \in (0;\infty)$. Să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + ... + f(100)$.

Prof. Adrian Stan, Buzău

L:247. Să se rezolve ecuația: $\sqrt[4]{x+13} + 2^{\sqrt[4]{x+78}} + \log_2 \sqrt[4]{x+253} = 12$.

***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

L:248. Ştiind că $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} - 1 \ne 0$, $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ să se determine x, y, z$\in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + abxy + bcyz + acxz + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = xy(a+b) + yz(b+c) + xz(a+c)$.

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

L:249. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea: $\sum \frac{\sqrt{\cos\frac{A-B}{2}}}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6$.

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:250. Arătați că dacă $x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{\cos^2 x_k\left(1+\sin^2 x_k\right)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos x_k}{\sin^2 x_k\left(1+\cos^2 x_k\right)}\right) \ge \frac{25\sqrt{5}}{16}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\right).$$

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

L:251. Arătați că în orice triunghi ABC avem $\prod r_a^{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} \le (R+r)^{\frac{2}{r}}$.

***Prof.* dr. Mihály Bencze,** Braşov

L:252. Să se arate că $\sin\frac{\pi}{n} \ge \frac{1}{n-1}$ unde $n \in N, n \ge 2$.

***Prof.* Costică Ambrinoc,**Rm. Sărat

▪ Clasa a XI - a

L:253. Se consideră funcția $f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{9x+1}}-mx$. Se cere:

a) Aflați domeniul maxim de definiție, E;

b) Calculați limita funcției în punctul $x=-\dfrac{1}{9}$;

c) Determinați m astfel încât f să aibă limită finită la $+\infty$; calculați limita pentru m determinat.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:254. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}, x_{n+1}=e^{x_n}-1, x_0<0$. Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x_n$. ***Prof.* Ovidiu Țâțan,** Rm.Sărat

L:256. Să se arate, fără a folosi calculatorul sau tabele trigonometrice,că $0{,}7<\sin 50^0<0{,}77$.

***Prof.* Costică Ambrinoc,** Rm. Sărat

L:257. (**Problemă propusă în memoria lui Traian Lalescu – 130 de ani de la naştere)**

Fie $f:R_+^*\to R_+^*$ o funcție cu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in R_+^*, (b_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică în care $b_1, r\in R_+^*$ şi $u,v\in R$ astfel încât $u+v=1$.Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(f(b_1)f(b_2)...f(b_n)f(b_{n+1}))^v}-n^u\sqrt[n]{(f(b_1)f(b_2)...f(b_n))^v}\right).$$

D.M. Bătinețu – Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:258. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$ şi să se rezolve ecuația $X^2=A$. ***Prof.* Adrian Stan**, Buzău

L:259. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.Calculați A^n. ***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

L:260. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ c & d & a\end{pmatrix}$. ***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:261. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\begin{vmatrix}x-2010 & x-2011 & x-2012\\ x-2011 & x-2012 & x-2010\\ x-2012 & x-2010 & x-2011\end{vmatrix}=0$. ***Prof.* Laura Tănase**, Buzău

▪ Clasa a XII - a

L:262. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție internă notată „ $x\circ y$ ”astfel:

$x\circ y=\dfrac{1}{2}(x+y-xy+1), \forall x,y\in\mathbb{R}$. Se cere:

a) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile;

b) Determină legea $x\circ y$ structură de grup pe $\mathbb{R}$?

c) Stabiliți mulțimea pe care legea dată determină structură de grup.

***Prof.* Constantin Dinu,** Buzău

L:263. i)Prin considerații de arii asupra subgraficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ demonstrați inegalitatea: $n\ln n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\ln k<(n+1)\ln(n+1)-n$.

ii) folosind i) calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Ion Ambrinoc,student,Oxford

L:264. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi funcțiile continue $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât:

$f(x)f(a+b-x)=1, g(x)=g(a+b-x), \forall x\in\mathbb{R}$ .Să se arate că: $\int_a^b\frac{g(x)}{1+f(x)}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b g(x)dx$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

L:265. Să se calculeze integrala: $I_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ln\left(1+a^{\sin^n x}\right)dx,\ a>0, a\neq 1, n\in N$ impar.

***Prof.* Gheorghe Ghiță,** Buzău

L:266. Să se arate că: $\int_0^1 e^{2x^2}dx>\frac{4}{\pi}\left(\int_0^1\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)^2$.

***Prof.* Rusu Constantin,** Râmnicu Sărat

L:267. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin: $f(x)=\begin{cases}2^{-1}\cdot\left[\left(e^x-1\right)^2+\left(e^x+1\right)^2-2\right], & x\le 0\\ 3x^2+2x+m, & x>0,\ m\in\mathbb{R}\end{cases}$

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuației $3x^2+2x+m=0$ să fie reale şi negative.
b) Pentru ce valori ale lui m funcția f este continuă?
c) Aflați primitivele funcției f pe $\mathbb{R}$

***Prof.* Iuliana Traşcă,** Olt

PARADOXURI

Nu poți vedea pădurea din cauza copacilor.
Post scriptum. Te rog să-mi scrii dacă nu primeşti această scrisoare.
Această lucrare îți asigură nemurirea pe tot timpul vieții.
Dacă aprinzi lumina destul de repede, poți vedea cum arată întunericul.
Dacă eu sunt pentru că tu eşti tu şi dacă tu eşti tu pentru că eu sunt eu, atunci eu nu sunt eu şi tu nu eşti tu.
Orice ieşire este o întoarcere în altceva.
Omul sărac îşi vinde farfuria pentru a cumpăra ceva de pus în farfurie.
Construiți o nouă casă din materialele vechii case, dar aceasta din urmă trebuie să rămână în folosință pentru constructori până la terminarea casei noi.
La tribunal : Răspundeți cu da sau cu nu la următoarea întrebare , « Va fi următorul cuvânt pe care-l veți pronunța cuvântul nu ? »
Pe un zid : « Vă rog ignorați acest mesaj ».

„ Nu trebuie să fii trist că nu ai fost remarcat.
Fii trist că nu ai făcut nimic remarcabil” .
Confucius

6. Caleidoscop matematic

- **Curiozități aritmetice**

$100 = 1 + 2 + 3 - 45 + 67 + 8 \times 9$

$100 = 1 + 2 + 3 \times 4 \times 56 : 7 - 8 + 9$

$100 = 1 + 2 \times 3 - 4 + 56 : 7 + 89$

$100 = 1 - 2 \times 3 + 4 \times 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$

$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$

$100 = 12 : 3 + 4 \times 5 - 6 - 7 + 89$

$100 = -1 + 2 + 34 \times 5 - 6 - 7 \times 8 - 9$

$100 = -123 - 4 + 5 \times 6 \times 7 + 8 + 9$

$100 = -1 \times 234 + 5 \times 67 + 8 - 9$

$100 = 1 + 2 + 3 - 4 \times 5 + 6 \times 7 + 8 \times 9$

$100 = 1 + 2 + 3 \times 4 \times 5 : 6 + 78 + 9$

$100 = 1 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 : 6 + 7 + 8 \times 9$

$100 = 12 + 3 + 4 - 56 : 7 + 89$

$100 = 123 + 4 \times 5 - 6 \times 7 + 8 - 9$

$100 = 12 : 3 : 4 + 5 \times 6 + 78 - 9$

$100 = -1 + 23 \times 4 + 56 : 7 : 8 \times 9$

$100 = -1 \times 2 - 3 + 4 \times 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$

$100 = -12 : 3 + 4 \times 56 : 7 + 8 \times 9$

de Titu Zvonaru, Comăneşti

- **Alte curiozități aritmetice**

1. $\mathbf{\frac{10^1 - 1}{9} = 1}$; 2. $\mathbf{\frac{10^2 - 1}{9} = 11}$ - număr prim , $6^2 - 5^2 = 11$ - descompunere unică

3. $\mathbf{\frac{10^3 - 1}{9} = 111}$ - număr compus, $20^2 - 17^2 = 111$, $56^2 - 55^2 = 111$, $3 \times 37 = 111$;

4. $\mathbf{\frac{10^4 - 1}{9} = 1.111}$ - număr compus, $556^2 - 555^2 = 1.111$, $11 \times 101 = 1.111$;

5. $\mathbf{\frac{10^5 - 1}{9} = 11.111}$ - număr compus, $5556^2 - 5555^2 = 11.111$, $41 \times 271 = 11.111$;

6. $\mathbf{\frac{10^6 - 1}{9} = 111.111}$ - număr compus, $340^2 - 67^2 = 111.111$, $460^2 - 317^2 = 111.111$,
$760^2 - 683^2 = 111.111$, $55556^2 - 55555^2 = 111.111$, $1700^2 - 1667^2 = 111.111$,
$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 = 111.111$, $111 \times 1001 = 111.111$;

7. $\mathbf{\frac{10^7 - 1}{9} = 1.111.111}$ - număr compus, $555556^2 - 555555^2 = 1.111.111$, $239 \times 4649 = 1.111.111$

8. $\mathbf{\frac{10^8 - 1}{9} = 11.111.111}$ - număr compus, $5555556^2 - 5555555^2 = 11.111.111$,
$11 \times 73 \times 101 \times 137 = 11.111.111$;

9. $\mathbf{\frac{10^9 - 1}{9} = 111.111.111}$ - număr compus, $55.555.556^2 - 55.555.555^2 = 111.111.111$,
$18518520^2 - 18518517^2 = 111.111.111$, $111 \times 1001001 = 111.111.111$;

10. $\mathbf{\frac{10^{10} - 1}{9} = 1.111.111.111}$ - număr compus, $555.555.556^2 - 555.555.555^2 = 1.111.111.111$,
$18518520^2 - 18518517^2 = 1.111.111.111$, $11111 \times 100001 = 1.111.111.111$;

de prof. dr. ing. Dumitru Panțuru

TEST DE INTELIGENȚĂ

1. Cine este mai greu, un melc uriaş de 4,5 kg , un pui de arici de 4500 dag sau o maimuțică pitică de 450 g?

a) melcul;
b) puiul de arici;
c) maimuțica;
d) melcul şi maimuțica;
e) puiul de arici şi maimuțica;

2. Aranjând literele ORIAC într-o anumită ordine, vei obține.....
a) o țară; b) o mare; c) un județ; d) un oraş; e) un animal;

3. Ce cuvânt dintre următoarele are o semnificație diferită comparativă cu celelalte?
a) cerb; b) urs; c) balenă; d) pinguin; e) elefant;

4. Alegeți cuvântul potrivit pentru completarea raționamentului:
Copacul este pentru sol ceea ce este coşul pentru .....

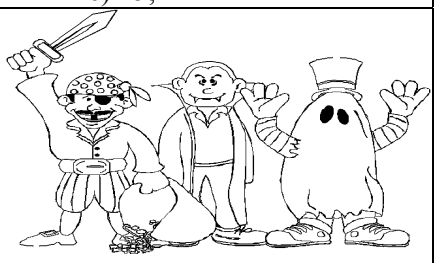
a) fum; b) cer; c) cărămidă; d) garaj; e) acoperiş;

5. Care cifră nu se potriveşte cu şirul următor: 2 3 6 7 8 14 15 30**;**
a) 7; b) 8; c)14; d) 15; e) 30.

6. Care dintre cele cinci figuri nu se incadreaza in grup?

7. Ionuț este în acelaşi timp printre cei mai buni 14 elevi din clasă dar şi printre cei mai slabi 10 elevi din clasă.Câți elevi sunt în clasă ?
a) 15; b) 16; c) 23; d) 24; e) 25;

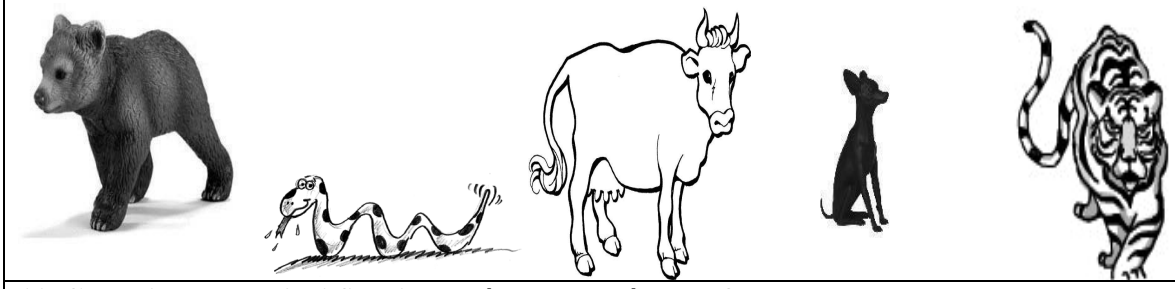
8. Cătălin e mai înalt decât Mircea dar nu şi față de Andrei. Ionuț este mai scund decât Cătălin dar mai înalt decât Mircea. Care din ei este cel mai mic la înălțime.



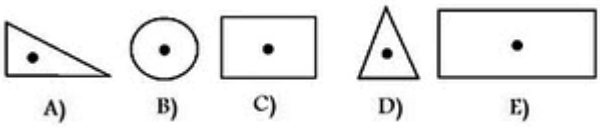
a) Andrei;
b) Cătălin;
c) Ionuț;
d) Mircea;
e) Andrei şi Cătălin;

9. Alegeți varianta corectă care completează raționamentul următor:
ALIMAC : CAMILA = 324153 : ?.....
a) 321423; b) 325413; c) 351423; d) 331543; e) 334153;

10. Care dintre cele cinci animale de mai jos face notă discordantă cu celelalte?
a) urs; b) sarpe; c) vaca; d) câine ; e) tigru;



11. Care dintre cele cinci figuri nu se încadrează în grup?



12. Dacă câţiva SMEGI sunt totodată Rhali şi câţiva Rhali sunt totodată ANGERI, atunci câţiva SMEGI vor fi neapărat ANGERI.

a) Adevărat; b) Fals; c) Parţial adevărat; d)Nu se poate preciza cu certitudine; e) nu ştiu;

13. Costul unui televizor a fost redus cu 20%. După reducerea de preţ cu ce procent trebuie ridicat preţul televizorului ca să ajungă la costul iniţial ?

a) 15%; b) 20%; c) 25 %; d) 30 %; e) 35%;

14. O anumită bacterie are proprietatea că la fiecare minut se dublează, iar bacteriile rezultate continuă de asemenea să se dubleze. După câte minute numărul bacteriilor va depăşi 1 miliard.

a) 10 min; b) 25 min; c) 30 min; d) 45 min; e) 60 min;

15. **Care ceas este mai bun**:

a) cel care o ia înainte 2 minute pe oră;
b) cel care o ia înainte 1 minut pe oră;
c) cel care stă;
d) cel care rămâne în urmă 1 minut pe oră;
e) cel care rămâne în urmă 2 minute pe oră;

16. Două reviste costă cât o culegere iar două culegeri costă cât o enciclopedie care are preţul de 48 lei. Cât costă o revistă ?

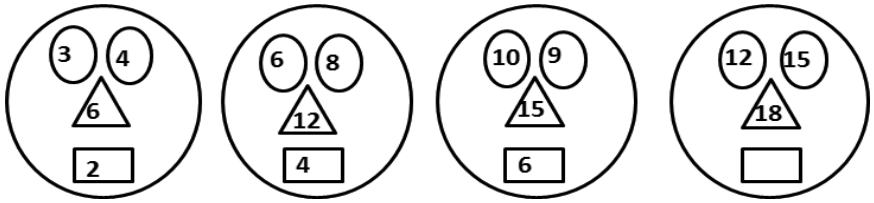
a) 6 lei ; b) 12 lei; c) 16 lei; d) 24 lei; e) 96 lei;

17. Într-o urnă sunt 10 bile albe, 8 bile negre şi 6 bile roşii. Fără a vedea ce bile scoatem din urnă, câte bile trebuie să scoatem pentru a fi siguri că am scos cel puţin o bilă roşie?

a) 6; b) 8; c)10; d) 18; e) 19;

18. Care dintre figuri rezolva raţionamentul?

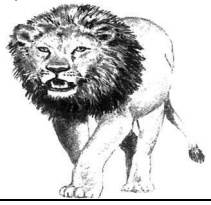
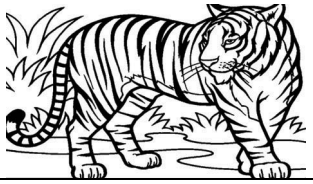
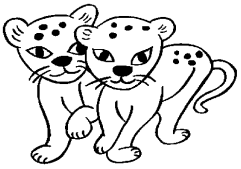
19. Analizând cele trei cercuri, găsiţi numărul lipsă din al patrulea cerc.



a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

20. Într-o grădină zoologică trăiesc 4 lei, 5 tigri şi 6 pantere. Dacă vrem să alegem un leu, un tigru şi două pantere, în câte moduri o putem face ?

a)30; b)100; c)120; d)240; e)300;

Propus de prof. Adrian Stan

Răspunsuri la pagina 44.

„Nu există carte de matematică cu citire uşoară aşa după cum nu există nucă fără coajă”.
O.A. Volberg

7. Poşta redacţiei

Dragi prieteni ai revistei SCLIPIREA MINTII, iată-ne ajunşi la a zecea apariţie editorială a acestei foi de matematică , o încercare anevoioasă dar perseverentă a unui grup de profesori care şi-au dorit promovarea matematicii în rândul elevilor pe de o parte şi pe de altă parte promovarea celor mai buni elevi în cadrul unor concursuri şcolare.

Trebuie să mulţumim pe această cale tuturor colegilor profesori care au contribuit şi contribuie în continuare prin munca lor neobosită în domeniul matematicii, de a realiza probleme şi articole, de a promova revista în rândul elevilor şi a celorlalţi colegi.

Fiecare număr al revistei li se datorează tuturor acelor profesori inimoşi care nu se dezic de la principiile educatorului modern şi care formează an de an noi elevi pe care îi introduc într-o lume a cifrelor şi a relaţiilor matematice, şi cărora le dezvoltă spiritul competitiv.

Mulţumim tuturor elevilor care îşi dau silinţa să rezolve probleme din această revistă şi îi apreciem pe toţi aceia care « şi-au încercat puterile » cu unele probleme ale profesorilor noştri.

*Cu această ocazie aducem mulţumiri deosebite domnilor **Constantin Apostol** şi **Titu Zvonaru** pentru atenţia şi activitatea intensă acordată acestei reviste, de asemenea, domnilor Dumitru **Bătineţu Giurgiu, Neculai Stanciu, Mihaly Bencze, Nicolae Ivăşchescu,Constantin Rusu, Costică Ambrinoc, Andrei Octavian Dobre, Constantin Dinu,** a domnului inspector de matematică **Iorgu Mînzală** cât şi doamnelor **Lenuţa Pîrlog, Gabriela Nicoleta Lupşan, Iuliana Traşcă** pentru implicarea şi promovarea acestui proiect şi nu în cele din urmă, doamnei **Ana Panaitescu** pentru iniţierea Concursului Judeţean de Matematică « Sclipirea Minţii » şi a Concursului Judeţean de Matematică « Speranţe Rămnicene ».*

*Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciţii şi probleme cu enunţ şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătăţii calitatea acestei reviste, o pot face trimiţând materialele membrilor colectivului de redacţie sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate(**salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**.*

*Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 11** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 Martie 2013**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.*

Redacţi

Vizitaţi www. mateinfo. ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc
Reviste, sinteze teorie, probleme rezolvate, concursuri şi olimpiade, programe şcolare, proiecte didactice, metodologii şi documente şcolare, cărţi de matematică, teste, fişe de lucru, jocuri de logică, softuri educaţionale, modele subiecte BAC.

Rubrica rezolvitorilor de probleme

Şcoala cu clasele I-VIII, Smeeni.
Clasa a VII-a: 37p. Chiriacescu Roxana, 35p. Nica Camelia, Tescan Irina;
Clasa aVIII-a: 50p. Bulgarea Alexandra; 48p. Neacsu Laura. **Prof. Stanescu Ion.**

Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1, Padina.
Clasa a V-a: 55p. Năstase Teodora;
Clasa a VI-a: 45p. Drăghici George, 42 p. Mircescu Corina, Jega Cristian, Herţa Adelina 38p. Drăghici Silvan, 36p. Dumitroiu Andreea, 30p. Nica Ionuţ, 28 p. Balica Gabriela, Călin Elena;
Clasa a VII-a: 55p. Bocioacă Andreea, 50p. Dumitru Georgiana, 30p. Cuzuma Claudia, Negulescu Cristina, 25p Dumitru Georgiana, Ilie Ionuţ;
Clasa a VIII-a: 50p. Năstase Daniel; 38p. Fleoarcă Andreea, Dumitrache Diana, 35p. Ciocan Mirela Vasilica. **Prof. Lăcrimioara Năstase.**

Scoala cu clasele I-VIII, "Tristan Tzara" Moineşti, Bacău. .
Clasa a VI-a: 22p. Gherman Andrada, Faraoneanu Mădălina, 21p. Merla Andrei, Maziliu Alexandra, 20p. Dîrlău Florin, Grădinarru Miruna, 18p. Vasilache Bogdan, Dîrlău Marta, **Prof. Cornelia Gurău;**
Clasa a VII-a: 41p. Munteanu Gheorghe, 38p. Lila Ionuţ, 36p. Olaru George, Prof. Cornelia Gurău; 25p. Malache Raluca, **Prof. Văsîi Ionela**
Clasa a VIII-a: 26p. Călin Andreea, **Prof. Văsîi Ionela**;

Şcoala cu clasele I-VIII "Gh. Popescu " Mărgineni –Slobozia, Olt
Clasa a VI-a: 35p. Traşcă Ionuţ- Vlăduţ, Ene Daniela- Iuliana, Vochin Ioan – David, Moisescu Denis, Costea Nicoleta, Nedelea Adrian Ilie, Mămularu Cristina, Fuior Daniela; **Prof. Iuliana Traşcă.**

Grupul Şcolar „Costin Nenițescu", Buzău:
Clasa a X-a: 30p. Tureac Andrei, Dragomir Ionuţ, Grozea Cosmin, Pîrnog Georgiana, Ciopec Corina, Dobrin Iulian, Picu Elena Daniela, Borcea Eduard, Stoian Cristina, Sterpu Denisa, Toader Florinel;
Clasa a XI-a: 42p. Marcu Cristina, Lică Adriana, Naghi carmen, Gheorghiţă Dinel;
Clasa a XII-a: 50p- Zaharia Mădălina, Bisoceanu Aura, Soare Manuela, Lixeanu Daniela, Tabără Ştefan; **Prof. Stan Adrian.**

Şcoala cu clasele I-VIII "George Emil Palade " Buzău
Clasa a VI-a: 30p.Ciocan Cristian, Vasile Rucsandra, Zota Mădălina, Bordei Valentina, Neagu Bianca, Dumitrache Radu.
Clasa a VII-a: 34p. Burada Andrei, Stan Eduard, Marin Cristian, Văceanu Ramona, Duca Miruna, Mutuligă Teodor, Sandu Alexandra, Şerban Ionuţ, Ştefănescu Raluca.
Clasa a VIII-a: 38p. Mardale Cosmin, Mântoiu Antoniu, Răican Mihaela. **Prof. Neculai Stanciu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 1 Rm Sărat.
Clasa a VII-a: 30p. Jercan Adrian, Nacu Cătălin.
Clasa a VIII-a: 46p. Iaru Ioana Victoria, Vasile Dragoş Mitruţ, Răpeanu Miruna. **Prof. Valerica Roşu.**

Scoala cu clasele I-VIII, nr. 2 Cugir, Alba.
Clasa a VI-a: 36p. Codrea Maria, Codrea Marian, Muntean Ioan, Molodeţ Dragoş, Sideriaş Alexandru; Prof. Mariana Mitea.

Colegiul Naţional „ Fraţii Buzeşti", Craiova.
Clasa a VI-a : 20p. Drăghici Răzvan Andrei. **Prof. Maria Ionescu**

Răspunsuri de la testul de inteligenţă.

Întrebarea	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Răspunsul	**b**	**d**	**d**	**e**	**b**	**e**	**c**	**d**	**c**	**b**	**b**	**b**	**c**	**c**	**c**	**b**	**e**	**c**	**b**	**e**

EUROPA - ROMÂNIA - IAŞI

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI şi
ASOCIAŢIA CULTURAL – ŞTIINŢIFICĂ
"VASILE POGOR" IAŞI ACORDĂ LA:

EXPOZIŢIA NAŢIONALĂ-CONCURS "ANELISSE" DE REVISTE ŞTIINŢIFICE, REVISTE DE CULTURĂ, REVISTE ŞCOLARE, WEB-URI ŞI MATERIALE PUBLICITARE ŞCOLARE
DIN 29 - 30 IUNIE 2012 DE LA IAŞI - ROMÂNIA

PREMIUL ŞI TROFEUL DE EXCELENŢĂ - MARELE TROFEU AL EXPOZIŢIEI

Se acordă revistei naţionale de cultură matematică
"SCLIPIREA MINŢII" – Nr. 9 / 2012
coordonată de: prof. Stan Adrian de la Grup Şcolar "Costin Nenițescu" Buzău,
prof. Stanciu Neculai de la Şcoala "George Emil Palade" Buzău,
prof. Lupşan Gabriela Nicoleta de la Grup Şcolar Tehnic Berca, jud. Buzău,
prof. Trașcă Iuliana de la Şcoala Mărgineni – Slobozia, jud. Olt şi
prof. Popescu Florentina de la Grup Şcolar "Costin Nenițescu" Buzău.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI
Inspector Şcolar General,
Prof. Dr. CAMELIA GAVRILĂ

ASOCIAŢIA CULTURAL-ŞTIINŢIFICĂ "VASILE POGOR" IAŞI
Preşedinte,
Prof. TEODOR BIVOL

REVISTA SCLIPIREA MINŢII

NR. 10 ANUL V - 2012

Cuprins

1. Istoria matematicii

- Aritmetica mayaşă de prof. Adrian Stan..... 1

2. Articole şi note matematice

- Integrale care se rezolva prin asocierea altor integrale de prof. Constantin Rusu..... 2
- Calculul unor sume de combinări de prof. Gheorghe Ghiţă 4
- Statistica în medicină de prof. Florentina Popescu ,..... 5
- O clasă de inegalităţi în triunghi de prof. dr. Mihaly Bencze 7
- Some generalizations of Nesbitt's inequality de prof. D. M. Batinetu Giurgiu şi prof. Neculai Stanciu..... 8
- A refinement of Weitzenböck's inequality de Titu Zvonaru 10

3. Examene şi Concursuri 11

4. Probleme rezolvate 13

5. Probleme propuse 34

6. Caleidoscop matematic 40

7. Poşta redacţiei 43

editgraph

LEI 10 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601