# SCLIPIREA MINTII

REVISTĂ NATIONALĂ DE CULTURĂ MATEMATICA ; PUBLICATIE SEMESTRIALĂ, AN XII, NR XXIII, 2019

SM

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEME PROPUSE

romania2019.eu
Preşedinţia României la Consiliul Uniunii Europene

ISTORIA MATEMATICII

LICEUL TEHNOLOGIC COSTIN NENIŢESCU BUZĂU

SM

CALEIDOSCOP MATEMATIC

Societatea de Ştiinţe Matematice, Filiala Buzău & Filiala Rm. Sărat,

LICEUL TEHNOLOGIC " COSTIN NENIŢESCU ", BUZĂU

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601

# Sclipirea Mintii 23

Revistă naţională de cultură matematică, publicaţie semestrială, An XII, Nr. XXIII, APRILIE 2019, BUZĂU



## Colectivul de Redacţie

- **Membrii onorifici:**

Costică Ambrinoc - Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Lenuţa Pîrlog - Preşedinte Filiala Buzău a Societăţii de Ştiinţe Matematice

Cristina Drugă - Inspector matematică

D. M . Bătineţu - Giurgiu, Daniel Sitaru, Nicolae Ivăşchescu, Mihály Bencze, Lucian Tuţescu, Gheorghe Ghiţă, Marius Drăgan, Ionel Tudor

- **Director:** Neculai Stanciu

- **Redactor şef:** Adrian Stan

- **Redactori principali:** Andrei Octavian Dobre, Iuliana Traşcă, Marin Chirciu, Gabriel Tica, Ion Stănescu, Constantin Dinu


## CUPRINS


ISTORIA MATEMATICII ..... 3

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE ..... 4

PROBLEME REZOLVATE ..... 20

PROBLEME PROPUSE ..... 45

QUICKIES ..... 51

CALEIDOSCOP MATEMATIC ..... 55

POŞTA REDACŢIEI ..... 56


GÂNDEŞTE CORECT


- **Membri:**

Mădălin **Avram**, Daniela **Badea**, Gabriela **Buzea**, Maria **Boborel**, Kovacs **Bela**, Anicuța **Bețiu**, Elena **Ciobîcă**, Constantin **Ciobîcă**, Ana **Cismaru**, Aurel **Chiriţă**, Marin **Chirciu**, Nela **Ciceu**, Marian **Ciuperceanu**, Claudiu **Ciurcu**, Cătălin **Cristea**, Tatiana **Cristea**, Marian **Cucoaneş** , Luiza Lorena **Cremeneanu**, Radu **Diaconu**, Ileana **Didu**, Camelia **Dana**, Gheorghe **Dârstaru**, Denisa **Draghia**, Viorica **Dogaru**, Otilia **Drăgan**, Ani **Drăghici**, Luiza **Dumitrescu**, Alina Georgiana **Ghiţă**, Mădălina **Giurgescu**, Lucian Dan **Grigore**, Ramona- Carmen **Grigore**, Adrian **Gobej**, Ștefan **Gobeș**, Cristina Dida **Isaia**, Ionuţ **Ivănescu**, Vasile **Jiglău**, Adalbert **Kovacs**, Simona **Miu**, Simion **Marin**, Mariana **Mitea**, Cristian **Moanţă**, Gabriela **Neguțescu**, Gabriel **Nemțaru**, Ana **Panaitescu**, Kevin Soto **Palacios**, Petre **Păunescu**, Ion **Pătrașcu**, Stelian **Piscan**, Victoria **Popa**, Emil C. **Popa**, Vasile Mircea **Popa**, Florentina **Popescu**, Adriana **Puescu**, Doina **Popescu**, Constantina **Prunaru**, Ramona **Puchiu**, Petre **Rău**, Dumitru **Săvulescu**, Roxana **Stanciu**, Liviu **Smarandache**, Florin **Stănescu**, Andreea **Stoica**, Doina **Stoica**, Mircea Mario **Stoica**, Alina **Tigae**, Laura **Tănase**, Gabriel **Tănase**, Hanganu **Aurel** Toma, Nicolae **Tomescu**, Diana **Trailescu**, Ovidiu **Ţâţan**, Roxana **Vasile**, Ionuţ-Florin **Voinea**, Marian **Voinea**, Daniel **Văcaru**, Sorina **Văcărean**, Florentin **Vișescu**, Elena **Zainea**



**REDACŢIA**
**Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu”,**
**Buzău, Strada Bazalt, Nr. 15bis,**
**Cod. 120167, Tel. 0238725206**
**E_mail: ady_stan2005@yahoo.com**
**Coordonator proiect: Adrian Stan**

Tipar: editgraph Buzău, www.editgraph.ro

**ACEST NUMĂR ÎL DEDICĂM ÎN AMINTIREA DOMNULUI PROFESOR CONSTANTIN RUSU**

# IN MEMORIAM

## CONSTANTIN RUSU

## ( 10.04.1942 - 30.11.2018 )

***''Profesorul este ca o lumânare care îi luminează pe alţii, consumându-se pe sine''*** ***Giovanni Ruffini* (1807-1881).**

A absolvit liceul "Mihai Viteazul" din Ploieşti şi Facultatea de Matematică - Mecanică a Universităţii din Bucureşti.

A fost membru al Societăţii din 1968, preşedinte al filialei Râmnicu Sărat timp de patru decenii, iar din 2012 preşedinte de onoare al filialei.

A fost un colaborator valoros al Gazetei Matematice şi un participant activ la activităţile Societăţii.

A coordonat sesiuni ştiinţifico-metodice, publicaţii şi concursuri ale filialei Râmnicu Sărat.

Un om deosebit, un matematician, un iubitor al S.S.M.R, nu îl vom uita!

**Dumnezeu** să îl odihnească în pace!

Profesorul **Constatin Rusu** s-a născut la 10 aprilie 1942, în comuna Finta, judeţul Dâmboviţa – ca al patru-lea fiu al lui Gheorghe şi al Smaranda.

A urmat clasele elementare în comuna natală, iar studiile liceale la Ploieşti, la liceul ''Alexandru Toma'', astăzi Colegiul Naţional ''Mihai Viteazul''. În cei patru ani de liceu a întâlnit o atmosferă intensă de lucru la Gazeta Matematică, unde exista o întrecere adevărată. Această etapă a fost hotărâtoare în devenirea sa ca profesor de matematică şi ca slujitor al SSMR. A urmat Facultatea de Matematică şi Fizică (din 1963 Facultatea de Matematică Mecanică) în perioada 1960-1965, fiind repartizat la Liceul Teoretic ''Ştefan cel Mare'' din Râmnicu Sărat. Aici şi-a desfăşurat activitatea conform principiului ''Omul sfinţeşte locul'' (însuşit de la tatăl său) perfecţionându-şi continuu activitatea de predare şi pregătirea ştiinţifică. A fost directorul liceului în perioada 1987-1990 militând pentru formarea unui climat sănătos de muncă şi profesor metodist al ISJ Buzău din anul 1980 şi până în 2008 (an în care s-a pensionat).

A primit din partea Ministerului Educaţiei titlul de ''Profesor Evidenţiat'' în anul 1982 şi Diploma de Excelenţă pentru întreaga carieră didactică şi pentru activitatea remarcabilă desfăşurată la disciplina Matematică în 2007.

La 6 aprilie 1968 (dată la care s-a înfiinţat subfiliala Râmnicu Sărat a SSMR) a devenit membru SSMR, iar în ziua de 2 aprilie 1972 a fost ales preşedinte al subfilialei. Începând de la această dată, a fost reales preşedinte al subfilialei din 4 în 4 ani. Prin strădania domnului profesor Constatin Rusu şi a colegilor săi s-a reuşit ca Filiala Râmnicu Sărat să fie prima filială a SSMR înscrisă în Registrul Asociaţiilor şi Fundaţiilor, primind personalitate juridică în conformitate cu OG 26/2000 la data de 27 iulie 2005.

A publicat la Gazeta Matematică mai multe articole şi probleme. A participat cu lucrări la diverse sesiuni ştiinţifice şi simpozioane organizate în diverse locuri din ţară. A organizat la Râmnicu Sărat sesiuni de comunicări ştiinţifice şi simpozioane naţionale (mai 1983, aprilie 1987, noiembrie 2001, noiembrie 2002, octombrie 2005, aprilie 2006, aprilie 2007, octombie 2009, octombrie 2011) iar toate lucrările prezentate au fost publicate în patru volume având titlul ''Articole şi note matematice''. A contribuit în mod hotărâtor la editarea lucrării ''Curbe algebrice plane şi invarianţii lor topologici''a decanului de vârstă a SSMR Alexandru Popescu-Zorica. Atât cadrul legal cât şi activitatea intensă desfăşurată la Filiala din Râmnicu Sărat a SSMR a produs atragerea unui număr mare de colegi buzoieni care au devenit membri. Datorită acestui fenomen, domnul profesor Constantin Rusu, a ajutat la reorganizarea Filialei Buzău a SSMR care s-a produs la 24 ianuarie 2009.

A primit din partea SSMR şi a Ministerului Educaţiei diverse diplome şi medalii: Diploma Jubiliară cu prilejul împlinirii a 100 de ani de la înfiinţarea Gazetei Matematice; Medalia jubiliară cu prilejul împlinirii a 100 de ani de la înfiinţarea revistei Gazeta Matematică; Diploma 110 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice 1895-2005; Medalia jubiliară ''Centenarul SSMR'' 1910-2010; Diploma de Excelenţă acordată pe anul 2008 pentru întreaga activitate desfăşurată în cadrul SSMR în vederea creşterii învăţământului mathematic românesc; Diploma de Excelenţă acordată de Filiala Vălenii de Munte pentru contribuţia deosebită la promovarea spiritului matematic în învăţământul românesc, contribuind la afirmarea tinerilor talente precum şi pentru sprijinul generos acordat Filialei Vălenii de Munte.

Am încercat în această scurtă prezentare a domnului **Constatin Rusu** să subliniem o parte din activitatea sa de ''activist'' SSMR – recunoscută pe deplin şi de Adunarea Generală a Filialei Râmnicu Sărat a SSMR – care la data de 28 ianuarie 2012 i-a propus funcţia onorifică de Preşedinte de Onoare, funcţie care a fost acceptată cu drag.

Deoarece matematica este, dintre toate artele şi ştiinţele, cea mai austeră şi mai abstractă, matematicianul ar trebui să fie singurul care să-şi poată găsi refugiul acolo unde ''*cel puţin unul din nobilele noastre impulsuri poate să evadeze cel mai bine din exilul plin de tristeţe al lumii actuale'' Bertrand Russel* (1872-1970).

*''Când lumea o ia razna, matematicianul poate găsi în matematică un calmant care nu suferă comparaţie.'' Godfrey Harold Hardy* (1877-1947).

de Costică Ambrinoc, Preşedinte Filiala Râmnicu Sărat a SSMR

Neculai Stanciu, PrimVicepreşedinte Filiala Râmnicu Sărat a SSMR

**„Şi un fir de iarbă îşi are rădăcina lui”.**
**M. Sadoveanu**

**(1880 - 1961)**

# 1. Istoria matematicii

## Mari matematicieni români - Simion Stoilov

**prof. Adrian Stan, Buzău**

Matematicianul român **Simion Stoilov** (14.09.1887 – 04.04.1961) este considerat fondatorul şcolii româneşti de analiză complexă fiind absolvent în 1910 a Universității din Paris unde obține şi doctoratul în 1916 sub îndrumarea lui Emile Picard.

Ia parte la Primul Război Mondial fiind trimis în Dobrogea şi apoi în Moldova, iar după terminarea războiului devine profesor mai întâi la Universitatea din Iaşi ( 1919-1921) apoi la Cernăuți (1921-1939) după care se stabileşte în Bucureşti fiind invitat să țină cursurile sale la Politehnica Bucureşti apoi din 1941 la Universitatea Bucureşti unde ocupă şi funcția de rector în perioada 1944- 1946 şi decan la Facultatea de Matematică şi fizică în perioada 1948-1951. ([3]).

În 1926, **Stoilov** stabileşte în domeniul teoriei mulțimilor o teoremă ce îi poartă numele, de asemenea a fost preocupat de dezvoltarea teoriei topologice a funcțiilor analitice şi a teoriei funcțiilor cu o variabilă complexă, precum şi a teoriei ecuațiilor liniare cu derivate parțiale.

În 1928 introduce noțiunea de *transformare interioară şi echivalentul topologic al funcțiilor analitice complexe*. Este primul care formulează noțiunea de *spațiu de acoperire a unui spațiu topologic* şi de asemenea este preocupat de introducerea de noi clase de funcții riemanniene: suprafețele Iversen-Stoilov şi suprafețele normal exhaustibile.

Pentru descoperirile sale este invitat de marile universități ale Europei pentru a ține prelegeri( Paris, Strasbourg, Bologna, Oslo)

Între 1946 şi 1948 serveşte ca ambasador al României la Paris participând şi la Conferința de Pace de la Paris.

Prin cele peste 100 de lucrări publicate în domeniul analizei complexe, a topologiei şi a geometriei precum şi a activității didactice de la Universitățile din Iaşi, Cernăuți şi Bucureşti, **Stoilov** a fost ales membru corespondent al Academiei Române în 1936 şi titular din 1945, iar din 1949 când se înființează Institutul de Matematică din Bucureşti, este numit director al acestuia. Astăzi, institutul îi poartă numele ca un omagiu adus activității acestuia în matematică şi pentru modul de organizare a acestei instituții care a format numeroşi matematicieni de renume ce au adus o faimă binemeritată acestui institut.

De asemenea, a fost membru al Societății de Matematică din Franța şi membru de onoare al Societății de Matematică din Belgia. ([2]p248).

Decedat în urma unui atac cerebral, în 1961, fiind un fost militant comunist, urna sa cu cenuşă a fost depusă alături de a altor militanți comunişti de renume în cripta Mausoleului din Parcul Carol. ( fostul Monument al Eroilor Luptei pentru Libertatea Poporului şi a Patriei, pentru Socialism).

**Bibliografie:**

1. Adrian Stan. O scurtă istorie a matematicii. Editura Editgraph. Buzău. 2015.
2. Vasile Bobancu. Caleidoscop Matematic. Editura Niculescu. Bucureşti. 2001.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Simion_Stoilow

**„Munca scuteşte pe om de trei mari rele:**
**plictiseala, viciul şi sărăcia. ”.**
**Voltaire**
**(1694-1778)**

# 2. Articole şi note matematice

## Cercuri tangente înscrise într-un triunghi

de **Constantin Rusu**[1]

Scopul acestei lucrări este de a găsi o modalitate de a înscrie într-un triunghi cercuri tangente între ele şi tangente la cel puţin o latură.

**Cazul 1.** Dacă cercurile sunt tangente la cele trei laturi ale $\Delta ABC$, atunci avem un singur cerc cu centrul în punctul de intersecţie al bisectoarelor şi de rază $r_0$, pe care îl notăm $C(I_0, r_0)$ şi este tangent la latura $AB$ în punctul $T_0$ şi la latura $AC$ în punctul $T_0^{'}$.

**Cazul 2.** Cercurile sunt tangente între ele şi tangente la laturile $AB$ şi $AC$. Considerăm: cercul $C(I_0, r_0)$, bisectoarea $AA'$, $AA' \cap C(I_0, r_0) = \{P, V_1\}$, $A' \in (BC)$.

În triunghiul curbiliniu $AT_0V_1T_0^{'}$ înscriem un cerc de centru $I_1$ şi rază $r_1$ notat $C(I_1, r_1)$ tangent la cercul $C(I_0, r_0)$ şi la laturile $AB$ şi $AC$. Considerăm o tangentă la cercul $C(I_0, r_0)$ în punctul $X$ care taie latura $AB$ în în punctul $U$ şi latura $AC$ în punctul $S$. Punctul $I_1$ va trebui să aparţină dreptei $I_0X$ şi totodată va trebui să fie egal depărtat de laturile $AB$ şi $AC$, deci el aparţine bisectoarei $AA'$. În concluzie: $X = V_1, U = M_1, S = N_1$. Deoarece $AV_1$ este bisectoare şi înălţime rezultă că $\Delta AM_1N_1$ este isoscel. Cercul $C(I_1, r_1)$ este cercul înscris în $\Delta AM_1N_1$. El este tangent la laturile $AB$ şi $AC$ în punctul $T_1$ respectiv $T_1^{'}$. Din $\Delta AT_1I_1$ dreptunghic în $T_1$ avem:

$$r_1 = T_1I_1 = AI_1 \sin\frac{A}{2} = (AA' - r_1 - 2r_0 - PA')\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow r_1 = (k - r_1)\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

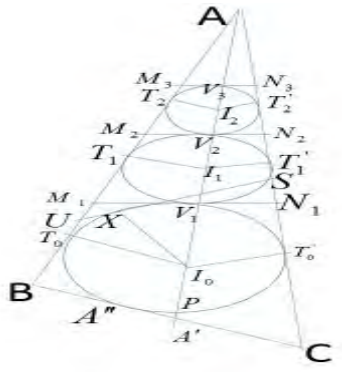
$$\Leftrightarrow r_1\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) = k\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow r_1 = \frac{k\sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}; \text{ am notat } AA' - 2r_0 - PA' = k.$$

Vom calcula într-un mod analog pe $r_2$, raza cercului înscris în $\Delta AM_2N_2$. Avem $AA' \cap C(I_1, r_1) = \{V_2\}$. Paralela prin $V_2$ la $M_1N_1$ taie latura $AB$ în punctul $M_2$ iar latura $AC$ în punctul $N_2$.

Avem $$r_2 = T_2I_2 = AI_2 \sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow r_2 = (k - r_2 - 2r_1)\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow r_2\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) = \left(k - 2\cdot\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}\right)\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_2 = \frac{k\sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{1 - \sin\frac{A}{2}}{1 + \sin\frac{A}{2}}.$$

[1] Profesor, Liceul Teoretic ’’Ştefan cel Mare’’, Râmnicu Sărat




Prin procedeul de mai sus se construiesc cercurile $C(I_3,r_3)$, $C(I_4,r_4)$, ..., $C(I_n,r_n)$, ...
Vom demosntra în continuare următoarea:

**Propoziție.** $r_n = \dfrac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}$, $\forall n \in N^*$, (2.1).

*Demonstrație.* Procedăm prin metoda inducției complete. Pentru $n=1$, $r_1 = \dfrac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$, formula este adevărată. Presupune prin inducție că $r_n = \dfrac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\dfrac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}$ şi demonstrăm că

$$r_{n+1} = \frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n}.$$

Avem $r_{n+1} = (k-2r_1-2r_2-\ldots-2r_n)\cdot\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} =$

$$=\left[k-\frac{2k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}-\frac{2k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)-\ldots-\frac{2k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}\right]\frac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}=$$

$$=\left[1-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)-\ldots-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}\right]\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}=$$

$$=\left[1-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)-\ldots-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-2}\right]\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}=$$

$$=\ldots=\left[1-\frac{2\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right]\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}=\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n}.$$ Deci, formula (2.1) este adevărată $\forall n\in N^*$.

Observăm că în triunghiul curbiliniu $AT_0V_1T_0'$, prin procedeul precedent putem să înscriem o infinitate de cercuri; fapt ce rezultă din $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}=0$.

Pentru un număr real pozitiv $\alpha<r_0$ există $n\in N^*$ astfel încât $r_n=\alpha$ ?

Să presupunem că există $n\in N^*$ astfel încât $r_n=\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{k\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}=\frac{\alpha\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}{k\sin\frac{A}{2}}\Leftrightarrow(n-1)\log\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)=\log\frac{\alpha\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}{k\sin\frac{A}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n-1)=\frac{1}{\log\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)}\cdot\log\frac{\alpha\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}{k\sin\frac{A}{2}}=g(\alpha)\Rightarrow n=1+[g(\alpha)],\ 0<\alpha<r_0.$$

**Aplicație.** Considerăm un triunghi echilateral $ABC$ cu latura egală cu 1. Avem

$$AA'=\frac{\sqrt{3}}{2},PA'=0,r_0=\frac{\sqrt{3}}{6},k=AA'-2r_0-PA'=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$r_n=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sin30^0}{1+\sin30^0}\left(\frac{1-\sin30^0}{1+\sin30^0}\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}.$$

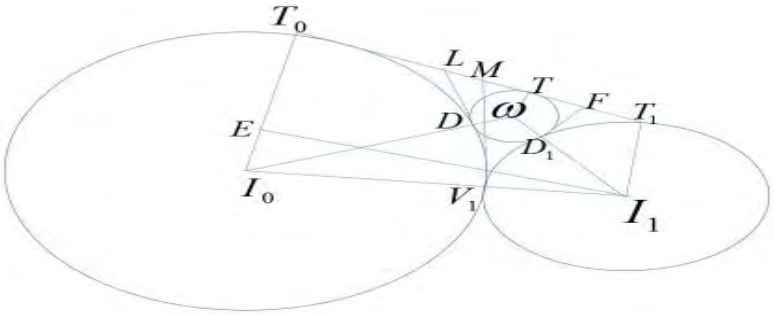
Pentru $n\in\{1,2,3,\ldots\}$ obținem $r_1=\frac{\sqrt{3}}{18},r_2=\frac{\sqrt{3}}{54},\ldots$. Pentru $\alpha=\frac{1}{10}$ obținem

$$n=1+\left[\frac{1}{\log\frac{1}{3}}\cdot\log\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{2}}\right]=1+\left[-\frac{1}{\log3}\left(\frac{3}{2}\log3-\log5\right)\right]1+[1,2]=2\text{ cercuri.}$$

Pentru $\alpha=\frac{1}{100}$ obținem $n=1+\left[\frac{1}{-\log3}\left(\frac{1}{2}\log3-1-\log5\right)\right]=1+\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{\log3}+\frac{\log5}{\log3}\right]=$

$=1+[-0,5+2,09+1,7]=1+[3,21]=4$ cercuri.

**Cazul 3.** Cercuri înscrise în triunghiurile curbilinii $T_0V_1T_1, T_1V_2T_2,..., T_{n-1}V_nT_n$.
Presupunem că în triunghiul curbiliniu $T_0V_1T_1$ putem să înscriem un cerc de centru $\omega$ şi rază $x$.




Tangenta comună în $V_1$ a cercurilor $C(I_0, r_0)$, $C(I_1, r_1)$ taie segmentul $T_0T_1$ în punctul $M$. Deoarece $MT_0 = MV_1 = MT_1$ conform faptului că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale, rezultă că punctul $M$ este mijlocul segmentului $T_0T_1$. Prin punctul $I_1$ ducem o paralelă la dreapta $T_0T_1$ care taie pe $T_0I_0$ în punctul $E$. Din $\Delta I_0I_1E$ dreptunghic în $E$ aplicând teorema lui Pitagora obținem:

$$EI_1^2 = I_0I_1^2 - EI_0^2 \Rightarrow EI_1^2 = (r_0 + r_1)^2 - (r_0 - r_1)^2 = 4r_0r_1 \Leftrightarrow EI_1 = 2\sqrt{r_0r_1} = T_0T_1, \text{ (3.1) şi}$$

$$MV_1 = \sqrt{r_0r_1} = MT_0 = MT_1, \text{ (3.2).}$$

Tangentele comune la cercurile $C(I_0, r_0)$, $C(\omega, x)$ şi respectiv $C(I_1, r_1)$, $C(\omega, x)$ intersectează segmentul $T_0T_1$ în punctele $L$ şi $F$. Folosind relația (3.2) avem: $T_0L = LT = LD = \sqrt{r_0x}$ şi

$FT_1 = FT = \sqrt{r_1x}$; prin urmare $T_0T_1 = 2LD + 2FD \Leftrightarrow 2\sqrt{r_0r_1} = 2\sqrt{r_0x} + 2\sqrt{r_1x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}\right)^2$, (3.3). Aşadar am demonstrat următoarea:

**Teoremă.** În triunghiul curbiliniu $T_0V_1T_1$ se poate înscrie un singur cerc de centru $\omega$ şi rază $x = \left(\dfrac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}\right)^2$. Centrul $\omega$ se află la intersecția cercurilor de raze.

$$r_0 + \left(\frac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}\right)^2 \text{ şi } r_1 + \left(\frac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}\right)^2 \text{ şi centre } I_0 \text{ şi } I_1.$$

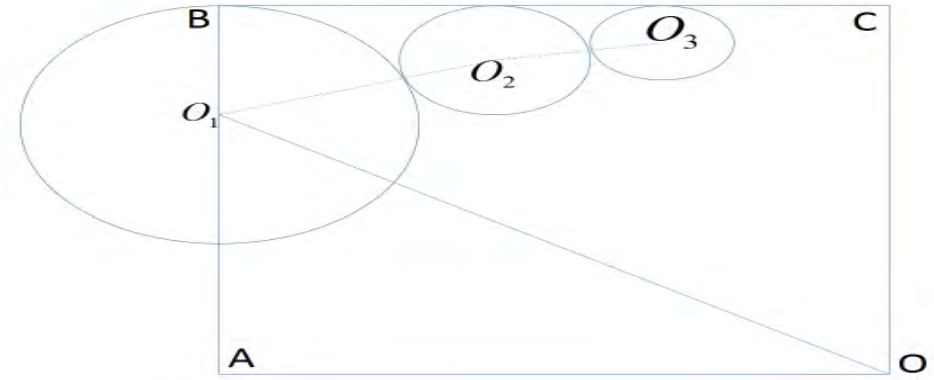
Fie acum cercurile $C_1, C_2,..., C_n,...$ înscrise în triunghiurile curbilinii $T_0V_1T_1, T_1V_2T_2,..., T_{n-1}V_nT_n,...$ având razele $\rho_1, \rho_2,..., \rho_n,...$; aplicând relația (3.3) obținem:

$$\rho_1 = \left(\frac{\sqrt{r_0r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}\right)^2, \rho_2 = \left(\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}\right)^2, ..., \rho_n = \left(\frac{\sqrt{r_{n-1}r_n}}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}}\right)^2, ...$$

şi ținând seama de relația (2.1) deducem

$$\rho_n = \frac{\sqrt{k\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{n-1}}}{\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{1-\sin\frac{A}{2}}} = \frac{\sqrt{k\sin\frac{A}{2}}}{\sqrt{1+\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{1-\sin\frac{A}{2}}}\left(\frac{1-\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ (3.4).}$$

**Aplicaţie.** Se consideră un pătrat $ABCO$ cu latura egală cu $r$ şi se construieşte cercul cu centrul în punctul $O$ şi de rază $r$ care determină în pătrat arcul $AC$. Cu centrul pe segmentul $AB$ se construieşte un cerc $C_1$ de centru $O_1$ tangent în $B$ la dreapta $BC$ şi tangent la arcul $AC$. Se construieşte cercul $C_2$ tangent la cercul $C_1$, tangent la arcul $AC$ şi tangent la latura $BC$. Analog se construiesc cercurile $C_3, C_4, ..., C_n, ...$. Să se determine razele lor.




**Soluţie.** Notăm razele cercurilor $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ cu $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ Din $\Delta O_1AO$ cu teorema lui Pitagora obţinem: $(r-r_1)^2 + r^2 = (r+r_1)^2 \Leftrightarrow 4rr_1 = r^2 \Leftrightarrow r_1 = \frac{r}{4} \Leftrightarrow r_1 = \frac{r}{2^2}$.

Cu formula (3.3) deducem $r_2 = \left( \frac{\sqrt{\frac{r}{4} \cdot r}}{\sqrt{\frac{r}{4}} + \sqrt{r}} \right)^2 = \frac{r}{3^2}$.

Presupunem prin inducţie că $r_{n-1} = \frac{r}{n^2}$ şi demonstrăm că $r_n = \frac{r}{(n+1)^2}$.

Într-adevăr, $r_n = \left( \frac{\sqrt{r_{n-1} \cdot r}}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\frac{r}{n^2} \cdot r}}{\sqrt{\frac{r}{n^2}} + \sqrt{r}} \right)^2 = \frac{r}{(n+1)^2}, \ \forall n \in N$.

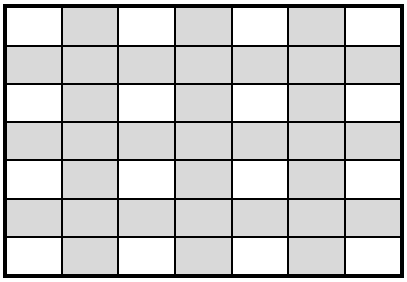
Folosind această modalitate putem să înscriem cercuri şi în triunghiurile curbilinii $BT_0A''$ şi $CA''T_0'$ realizându-se aşadar o acoperire cu cercuri tangente a triunghiului $ABC$.

Problema prezentată în această lucrare are şi o valoare practică dacă considerăm o placă triunghiulară de metal şi se cer un anumit număr de discuri astfel încât rebuturile să fie minime.

---

**Caleidoscop matematic**

**Înscrie în acest pătrat de 7x7 unităţi, un alt pătrat astfel încât lungimea laturilor sale să fie un număr întreg de unităţi, iar vârfurile sale să se afle pe laturile pătratului iniţial pornind dintr-un punct de intersecţie ale dreptelor.**



---

# Dezvoltări din Crux Mathematicorum 1994

## Aplicații ale Problemei 1940 din Crux Mathematicorum Vol 20 n04, April 1994

Marin Chirciu[1]

În revista canadiană **Crux Mathematicorum** Vol 20 n04 din April 1994 este propusă următoarea problemă: 1940. Proposed by Ji Chen, Ningbo University, China.
Show that $x, y, z > 0$ ,

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

**Soluție** ( Vo Quang Ba Can).
Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x \geq y \geq z$ .
Problema se rezolvă în doi paşi:

**Pasul 1.** $$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{1}{4xy}+\frac{2}{(x+z)(y+z)}.$$

**Demonstrație.**
Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}-\frac{2}{(x+z)(y+z)}\geq\frac{1}{4xy}-\frac{1}{(x+y)^2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{z+x}\right)^2\geq\frac{(x-y)^2}{4xy(x+y)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2}{(y+z)^2(z+x)^2}\geq\frac{(x-y)^2}{4xy(x+y)^2}.$$

Cum $(x-y)^2\geq 0$ rămâne să arătăm că $4xy(x+y)^2\geq(y+z)^2(z+x)^2$.
Într-adevăr:
Din $x\geq y\geq z>0$, rezultă că $4xy\geq 4y^2\geq(y+z)^2$ şi $(x+y)^2\geq(x+z)^2$ , de unde
$4xy(x+y)^2\geq(y+z)^2(z+x)^2$.

**Pasul 2.** $$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{4xy}+\frac{2}{(x+z)(y+z)}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

**Demonstrație.**
Efectuînd calculele inegalitatea se scrie:

$$\frac{1}{4}+\frac{yz+zx}{4xy}+\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+z)(y+z)}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{z(x+y)}{4xy}+\frac{2(xy+yz+zx)}{z^2+xy+yz+zx}\geq 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{z(x+y)}{4xy}+\frac{2(xy+yz+zx)}{z^2+xy+yz+zx}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{z(x+y)}{4xy}-\frac{2z^2}{(x+z)(y+z)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\dfrac{z(x+y)}{4xy}\geq\dfrac{2z^2}{(x+z)(y+z)}\Leftrightarrow(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$, care rezultă imediat din inegalitatea mediilor.
Legând cele două inegalități din pasul 1 şi pasul 2 obținem inegalitatea din enunț.
Egalitatea are loc dacă şi numai $x=y=z$ .

Articolul prezintă aplicații în triunghi, folosind această inegalitate, cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea „Iran 1996”, deoarece problema a fost în pregătirea lotului național al Iranului în 1996, vezi **Iran 1996 TST**.

---

[1] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu”, Piteşti

**Aplicația 1.** In $\Delta ABC$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{9}{4r(4R+r)}$.

Crux Mathematicorum,V21,n03, Mar1995, Walter Janous, Innsbruck, Austria

Soluție. Punem în „Iran 1996”, $x=p-a, y=p-b, z=p-c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum(p-b)(p-c)=r(4R+r)$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{a^2}$.

Rezultă $4r(4R+r)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{9}{4}$, de unde concluzia.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 2.** În $\Delta ABC$, $\frac{r_a^2}{a^2}+\frac{r_b^2}{b^2}+\frac{r_c^2}{c^2}\geq\frac{9}{4}$.

Crux Mathematicorum,V21, n03, Mar1995,

Mitrinovic, Pecaric, Volonec, Recent Advances in Geometric Inequalities, 1989

**Soluție.**

Avem $r_a(r_b+r_c)=\frac{S}{p-a}\left(\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\right)=pa$ şi $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$, de unde

$a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}$.

Punând $a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}$ şi analoagele în inegalitatea de demonstrat $\frac{r_a^2}{a^2}+\frac{r_b^2}{b^2}+\frac{r_c^2}{c^2}\geq\frac{9}{4}$,

aceasta este echivalentă cu:

$(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)\left(\frac{1}{(r_a+r_b)^2}+\frac{1}{(r_b+r_c)^2}+\frac{1}{(r_c+r_a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$, evident din „Iran 1996”.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 3.** In $\Delta ABC$, $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{8R(4R+r)}$.

**Soluție.** Punem în „Iran 1996”, $x=a, y=b, z=c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum bc=p^2+r(4R+r)$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(b+c)^2}$.

Rezultă $(p^2+r^2+4Rr)\sum\frac{1}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}$.

Deoarece $p^2+r^2+4Rr\leq 2R(4R+r)$, adevărată din inegalitatea lui Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$ şi inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$, obținem concluzia. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 4.** In $\Delta ABC$, $\frac{1}{(r_a+r_b)^2}+\frac{1}{(r_b+r_c)^2}+\frac{1}{(r_c+r_a)^2}\geq\frac{9}{4p^2}$.

**Soluție.** Punem în „Iran 1996”, $x=r_a, y=r_b, z=r_c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum r_br_c=p^2$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(r_b+r_c)^2}$.

Rezultă $p^2\sum\frac{1}{(r_b+r_c)^2}\geq\frac{9}{4}$, de unde concluzia. .

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 5.** In $\Delta ABC$ , $\frac{1}{(h_a+h_b)^2}+\frac{1}{(h_b+h_c)^2}+\frac{1}{(h_c+h_a)^2}\geq\frac{9R}{8p^2r}$.

**Soluție.** Punem în „Iran 1996”, $x=h_a, y=h_b, z=h_c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum h_bh_c=\frac{2p^2r}{R}$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(h_b+h_c)^2}$.

Rezultă $\frac{2p^2r}{R}\sum\frac{1}{(r_b+r_c)^2}\geq\frac{9}{4}$, de unde concluzia. .

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 6.** In $\Delta ABC$ , $\frac{1}{(l_a+l_b)^2}+\frac{1}{(l_b+l_c)^2}+\frac{1}{(l_c+l_a)^2}\geq\frac{9}{4p^2}$.

**Soluție.** Punem în „Iran 1996”, $x=l_a, y=l_b, z=l_c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum l_bl_c$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(h_b+h_c)^2}$.

Deoarece $\sum l_bl_c\leq p^2$ , adevărată din $l_a\leq\sqrt{p(p-a)}$ şi inegalitatea CBS, obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 7.** In $\Delta ABC$ , $\frac{1}{(m_a+m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a)^2}\geq\frac{3}{2R(4R+r)}$.

**Soluție.** Punem în „Iran 1996”, $x=m_a, y=m_b, z=m_c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum m_bm_c$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(m_b+m_c)^2}$.

Deoarece $\sum m_bm_c\leq\frac{3}{2}R(4R+r)$, adevărată din $m_bm_c\leq\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{4}$,

$$\sum m_bm_c\leq\sum\left(\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{4}\right)=\frac{1}{2}\sum a^2+\frac{1}{4}\sum bc=\frac{1}{2}\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+\frac{1}{4}\left(p^2+r^2+4Rr\right)=$$

$=\frac{1}{4}\left(5p^2-3r^2-12Rr\right)\leq\frac{3}{2}R(4R+r)$, inegalitatea Gerretsen $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$

şi inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ , obținem concluzia.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicația 8.** In $\Delta ABC$ , $\frac{1}{(s_a+s_b)^2}+\frac{1}{(s_b+s_c)^2}+\frac{1}{(s_c+s_a)^2}\geq\frac{3}{2R(4R+r)}$.

**Soluție.**

Simediana $s_a$ verifică relația $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a$ . Avem $s_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a\leq m_a$.

Punem în „Iran 1996”, $x=s_a, y=s_b, z=s_c$.

Obținem $xy+yz+zx=\sum s_bs_c$ şi $\sum\frac{1}{(y+z)^2}=\sum\frac{1}{(s_b+s_c)^2}$.

Deoarece $s_a\leq m_a$ şi $\sum m_bm_c\leq\frac{3}{2}R(4R+r)$, adevărată din $m_bm_c\leq\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{4}$,

$$\sum m_bm_c\leq\sum\left(\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{4}\right)=\frac{1}{2}\sum a^2+\frac{1}{4}\sum bc=\frac{1}{2}\cdot 2\left(p^2-r^2-4Rr\right)+\frac{1}{4}\left(p^2+r^2+4Rr\right)=$$

$=\frac{1}{4}\left(5p^2-3r^2-12Rr\right)\le\frac{3}{2}R\left(4R+r\right)$, inegalitatea Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$

şi inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ ,rezultă că $\sum s_b s_c\le\frac{3}{2}R\left(4R+r\right)$, de unde obţinem concluzia.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicaţia 9.** In $\Delta ABC$ , $\sum\frac{1}{\left(\sin B+\sin C\right)^2}\ge 1$.

Revista Electronică Mateinfo.ro, Problema lunii Martie 2017,
D.M.Bătinețu-Giurgiu, Neculai Stanciu, România

**Soluţie.** Punem în „Iran 1996”, $x=\sin A, y=\sin B, z=\sin C$.

Obţinem $\sum yz=\sum\sin B\sin C=\frac{p^2+r\left(4R+r\right)}{4R^2}$ şi $\sum\frac{1}{\left(y+z\right)^2}=\sum\frac{1}{\left(\sin B+\sin C\right)^2}$.

Deoarece $\sum\sin B\sin C=\frac{p^2+r\left(4R+r\right)}{4R^2}\le\frac{9}{4}$, adevărată din inegalitatea Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ şi inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ , obţinem concluzia.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Aplicaţia 10.** In $\Delta ABC$ , $\sum\frac{1}{\left(\cos B+\cos C\right)^2}\ge 3$.

**Soluţie.** Punem în „Iran 1996”, $x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$.

Obţinem $\sum yz=\sum\cos B\cos C=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$ şi $\sum\frac{1}{\left(y+z\right)^2}=\sum\frac{1}{\left(\cos B+\cos C\right)^2}$.

Deoarece $\sum\cos B\cos C=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\le\frac{3}{4}$, adevărată din inegalitatea Gerretsen $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ şi inegalitatea lui Euler $R\ge 2r$ , obţinem concluzia. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

**Bibliografie**

Ji Chen, Crux Mathematicorum, Vol 20 n04, April 1994.
Vo Quang Ba Can, Solution Problem 1940, Crux Mathematicorum 4/1994.
O.Bottema, R.Z.Djordjevic, R.R.Janic, D.S.Mitrinovic, P.M.Vasic,
Geometric Inequalities, Groningen 1969, The Netherlands.
Marin Chirciu, Inegalităţi algebrice, de la iniţiere la performanţă, Editura Paralela 45, Piteşti, 2014.

## Generalizarea unei inegalităţi algebrice din AoPS/2016 şi revizitată în SM 21/2018

**de Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

Scopul acestei note este generalizarea inegalităţii $\sum_{cyc}\frac{1}{(a+1)(a+2)}\ge 1$, pentru orice numere pozitive $a,b,c$ cu $abc=1$.

Vom demonstra că pentru orice numere pozitive $a,b,c$ cu $abc=1$ şi $n\ge 2$ este adevărată inegalitatea:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a+1)(a+2)...(a+n)}\ge\frac{3}{(n+1)!}.$$ Considerăm funcţia

$$f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n)}-\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\ln x-\frac{1}{(n+1)!}$$

Avem:

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x+3)...(x+n)+(x+1)(x+3)...(x+n)+...+(x+1)(x+2)...(x+n-1)}{(x+1)^2(x+2)^2...(x+n)^2}-$$

$$-\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{x}=$$

$$=-\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n)}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{x+n}\right)-\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{x}.$$

Deoarece $f'$ este crescătoare rezultă că pentru $x>1$, $f'(x)>f'(1)=0$, iar pentru $x<1$, $f'(x)<f'(1)=0$. Rezultă că $x=1$ este punct de minim pentru $f$, deci $f(x)\geq f(1)=0$.

Deci, $\frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n)}\geq\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\ln x+\frac{1}{(n+1)!}$, (1).

Sumând în (1) pentru $x=a, x=b, x=c$ rezultă

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a+1)(a+2)...(a+n)}\geq\frac{3}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{3}{(n+1)!},\text{ q.e.d.}$$

**Biblliografie:**

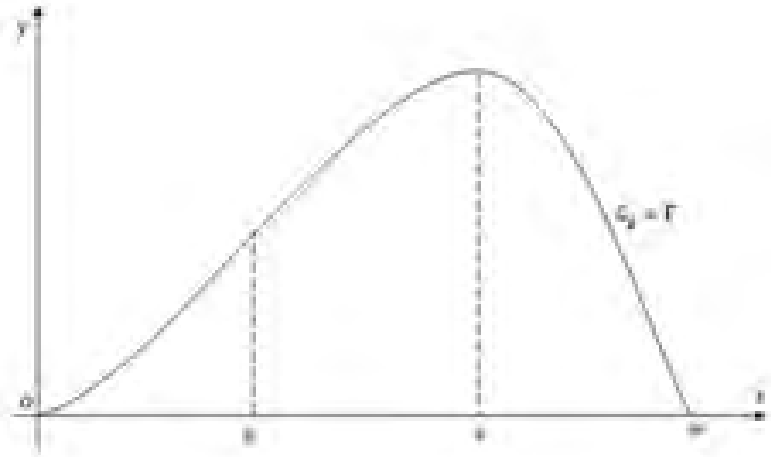
1. **Marin Chirciu**, *În legătură cu o inegalitate din AoPS*, SM 21, 6-7.

## Aplicații ale integralei definite

**Avram Mădălin**, Curtea de Argeş

În manualele de la noi, ca aplicații ale integralei definite sunt prezentate ariile subgraficelor unor funcții continue sau volumele corpurilor de rotație obținute prin rotirea subgraficelor unor funcții continue în jurul axei $Ox$. Ar trebui prezentată şi situația în care subgraficul unei funcții continue se roteşte **în jurul axei $Oy$**, iar funcția nu e inversabilă. Astfel de probleme apar la "bacalaureatul ştiințific" din Italia. Contextul în care apare o astfel de întrebare e unul legat de aspectul practic al problemelor de analiză matematică şi nu numai (având în vedere şi restul problemelor ce se dau în Italia), menit să trezească interesul elevilor, abordare care ar fi de dorit şi în programa şcolară şi manualele de la noi. Se pleacă de la un desen, adică ceva concret, căruia îi sunt ataşate anumite informații şi se cer alte lucruri concrete. Iată un exemplu:

În figura alăturată este desenat graficul **Γ** al funcției $g(x)=\int_0^x f(x)dx$, unde $f$ este o funcție definită pe intervalul $[0,w]$, continuă şi derivabilă. **Γ** este tangent axei $Ox$ în origine şi prezintă o inflexiune şi un maxim în punctele de abscisă $x=h$ şi respectiv $x=k$.



1)Determinați $f(0)$ și $f(k)$; precizați dacă graficul funcției *f* are puncte de maxim sau de minim şi dacă i se poate urmări evoluția (adică reprezentarea grafică)

2)Să presupunem, de asemenea şi la punctele **3)** şi **4)**, că $g(x)$ se exprimă pe intervalul considerat ca o funcție polinomială de gradul 3. Arătați, în acest caz, că numerele $h$ şi $k$ împart intervalul în trei părți egale.

3)Determinați expresia lui $g(x)$ în cazul $w = 3$ şi $g(1) = \frac{2}{3}$ şi scrieți ecuațiile normalelor la garficul **Γ** în punctele de intersecție ale acestuia cu dreapta $y = \frac{2}{3}$.

4)Notăm cu $R$ regiunea delimitată de **Γ** şi de axa $Ox$ şi cu $W$ solidul pe care ea o descrie în rotația completă în **jurul axei $Oy$**. Explicați de ce volumul corpului $W$ se poate obține calculând: $2\pi \int_0^3 xg(x)dx$

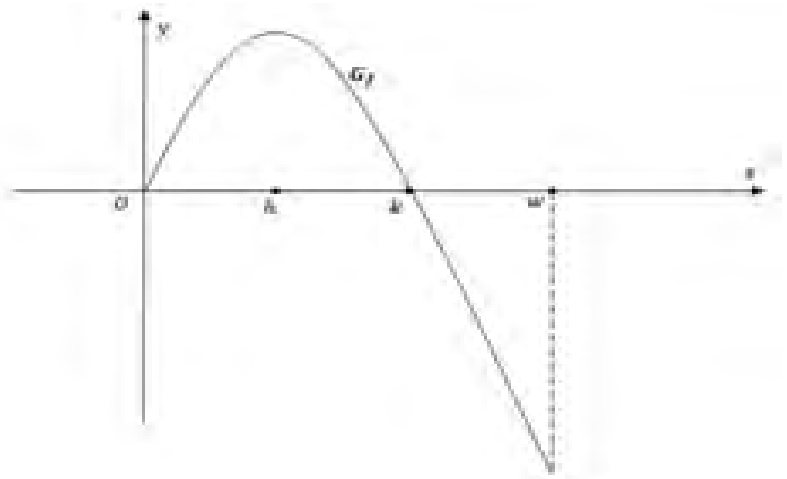
Presupunând că unitatea de măsură a sistemului $xOy$ este în decimetri, aflați capacitatea în litri a corpului $W$.

**REZOLVARE**

Deoarece $g(x) = \int_0^x f(x)dx$, rezultă că $g'(x) = f(x), (\forall)x \in [0, w]$.

Deci $f(0) = g'(0) = 0$ (pentru că $G_g$ e tangent axei $Ox$ în origine) şi $f(k) = g'(k) = 0$ (pentru că $x = k$ este punct de extrem pentru funcția $g$, conform ipotezei).

Deoarece $x = h$ este punct de inflexiune pentru graficul funcției *g*, $g''(h) = 0 \Rightarrow \Rightarrow f'(h) = 0$. Şi cum $G_g$, adică **Γ**, este convex pentru $x < h$ și concav pentru $x > h$, rezultă că $f'(x) = g''(x) > 0$ pentru $x < h$ și $f'(x) = g''(x) < 0$ pentru $x > h$, deci punctul $x = h$ este punct de maxim pentru funcția $f$ (care e crescătoare la stânga lui $h$ şi descrescătoare la dreapta). Aproximativ, graficul funcției $f$ arată astfel:




Presupunem că $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ cu\ a, b, c, d \in R, a \neq 0$. Din datele anterioare avem:

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(w) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g'(k) = 0 \\ g''(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ aw^3 + bw^2 + cw = 0 \\ c = 0 \\ 3ak^2 + 2bk + c = 0 \\ 6ah + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ w = -\frac{b}{a} \\ c = 0 \\ k = -\frac{2b}{3a} \\ h = -\frac{b}{3a} \end{cases}$$ deci numerele $h$ şi $k$ împart intervalul $[0, w]$ în trei părți egale.

Din punctul precedent, avem $g(x) = ax^3 + bx^2,\ a \neq 0$. Din datele de acum avem:

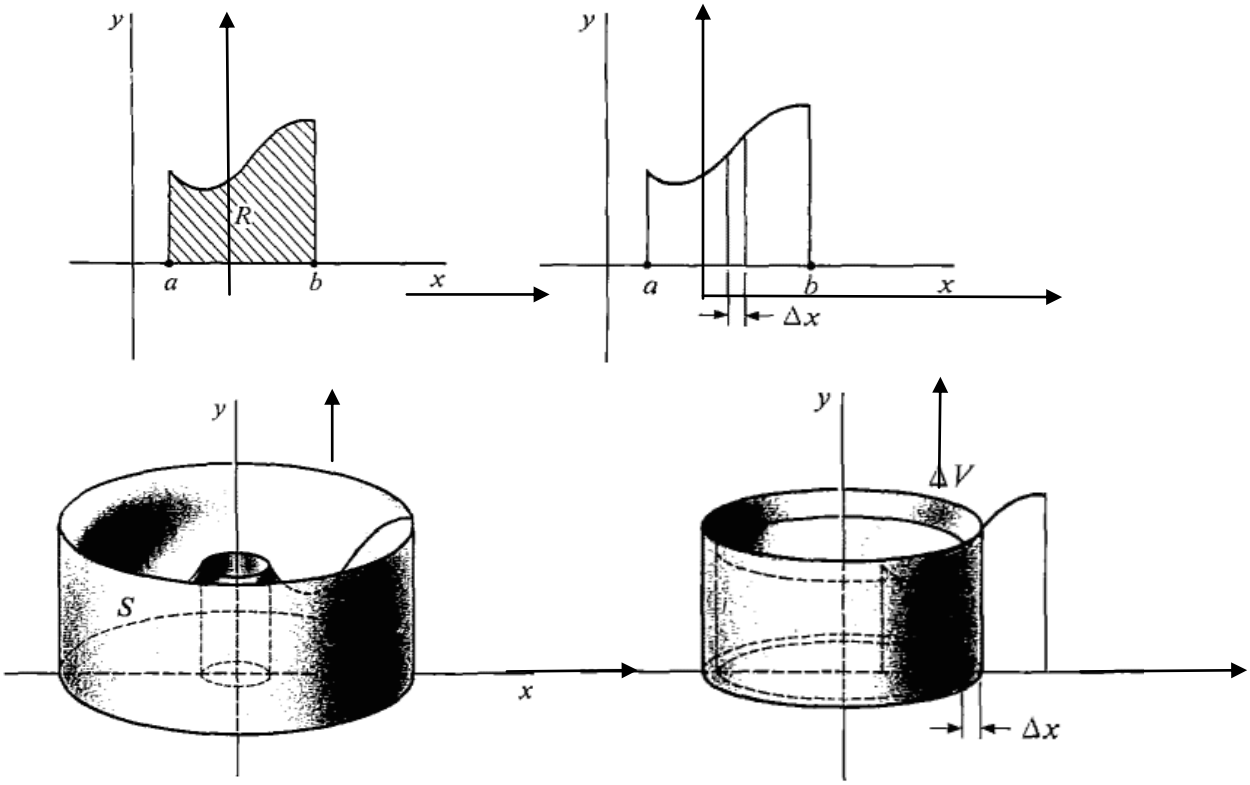
$$\begin{cases} g(3) = 0 \\ g(1) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ a + b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ și } b = 1, deci\ g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2, x \in [0,3].$$

Punctele de intersecție ale graficului funcției $g$ cu dreapta $y = \frac{2}{3}$ pe intervalul $[0,3]$ se obțin rezolvând sistemul: $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$. Se obțin punctele $P_1\left(1, \frac{2}{3}\right), P_2\left(1+\sqrt{3}, \frac{2}{3}\right)$

Având în vedere că normalele la $\Gamma$ vor fi perpendiculare pe tangentele la $\Gamma$ în aceste puncte, iar pantele normalelor şi ale tangentelor sunt legate de relația $m_1 \cdot m_2 = -1$, obținem că normalele au ecuațiile: $n_1: y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{g'(1)}(x-1) \Rightarrow obținem\ y = -x + \frac{5}{3}$

$$n_2: y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{g'(1+\sqrt{3})}\left(x - 1 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow obținem\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1-3\sqrt{3}}{6}$$

În general, dacă în cazul rotației subgraficului în jurul axei $Ox$ apar în calculul volumului nişte cilindri, în cazul rotației în jurul axei $Oy$ apar nişte coji cilindrice (ca în desenul de mai jos). Regiunea $R$, adică subgraficul funcției se poate împărți în fâşii infinitezimale de lățime $\Delta x$. Atunci când banda verticală este rotită în jurul axei $Oy$, se generează o coajă cilindrică de grosime $\Delta x$ şi volum $\Delta V$. Această coajă cilindrică este aproximativ diferența dintre un cilindru exterior de rază $R$ şi un cilindru interior de rază $r$. Ambii cilindrii au înălțime infinit aproape de $g(x)$.




$\Delta V \cong vol.\ cilindrului\ exterior - vol.\ cilindrului\ interior \cong$
$\cong \pi R^2 g(x) - \pi r^2 g(x) = \pi g(x)(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)g(x) =$
$= 2\pi \frac{(R+r)}{2} g(x)\Delta x.$

Adunând aceste volume, $V \cong \sum \Delta V$ şi trecând la limită cu $\Delta x \to 0$, obținem formula:

$$\boldsymbol{V = 2\pi \int_a^b xg(x)dx.}$$

În cazul particular al problemei de mai sus, efectuând calculele, obținem:

$$V = 2\pi \int_0^3 xg(x)dx = 2\pi \int_0^3 x\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx = 2\pi\left[-\frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^3 = \frac{81}{10}\pi\ dm^3 \cong 25{,}45\ l.$$

# Calculul unor sume de şiruri în progresie geometrică

**Ciobîcă Constantin, Ciobîcă Elena**, Fălticeni

**1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale în progresie geometrică, în care $q \neq \pm 1$. Demonstraţi că :**

$$\frac{1}{b_1\cdot b_3}+\frac{q^2}{b_3\cdot b_5}+\frac{q^4}{b_5\cdot b_7}+\ldots+\frac{q^{2n-2}}{b_{2n-1}\cdot b_{2n+1}}=\frac{q^{2n}-1}{\left(q^2-1\right)\cdot b_1\cdot b_{2n+1}};\forall n\in\mathbb{N}^*$$

**Rezolvare:** $b_3-b_1=b_1\cdot q^2-b_1=b_1\left(q^2-1\right)\Rightarrow \frac{1}{b_1\cdot b_3}=\frac{1}{b_1\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_3}\right)$

$$b_5-b_3=b_1\cdot q^4-b_1\cdot q^2=b_1\cdot q^2\left(q^2-1\right)\Rightarrow \frac{q^2}{b_3\cdot b_5}=\frac{1}{b_1\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_5}\right)$$

$$b_7-b_5=b_1\cdot q^6-b_1\cdot q^4=b_1\cdot q^4\left(q^2-1\right)\Rightarrow \frac{q^4}{b_5\cdot b_7}=\frac{1}{b_1\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_5}-\frac{1}{b_7}\right)$$

$$b_{2n+1}-b_{2n-1}=b_1\cdot q^{2n}-b_1\cdot q^{2n-2}=b_1q^{2n-2}\left(q^2-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{q^{2n-2}}{b_{2n-1}\cdot b_{2n+1}}=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_{2n-1}}-\frac{1}{b_{2n+1}}\right)$$

$$S=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_5}+\ldots+\frac{1}{b_{2n-1}}-\frac{1}{b_{2n+1}}\right)$$

$$S=\frac{1}{b_1\cdot\left(q^2-1\right)}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{2n+1}}\right)=\frac{1}{b_1\left(q^2-1\right)}\cdot\frac{b_1\left(q^{2n}-1\right)}{b_1\cdot b_{2n+1}}=\frac{q^{2n}-1}{\left(q^2-1\right)b_1\cdot b_{2n+1}}$$

**2. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale în progresie geometrică, în care $q \neq \pm 1$. Demonstraţi că:**

$$\frac{q^4}{b_5\cdot b_9}+\frac{q^8}{b_9\cdot b_{13}}+\frac{q^{12}}{b_{13}\cdot b_{17}}+\ldots+\frac{q^{4n}}{b_{4n+1}\cdot b_{4n+5}}=\frac{q^4\left(q^{4n}-1\right)}{\left(q^4-1\right)b_5b_{4n+5}};\forall n\in N^*$$

**Rezolvare:** $b_9-b_5=b_1q^4\left(q^4-1\right)\Rightarrow \frac{q^4}{b_5\cdot b_9}=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\left(\frac{1}{b_5}-\frac{1}{b_9}\right)$

$$b_{13}-b_9=b_1q^8\left(q^4-1\right)\Rightarrow \frac{q^8}{b_9\cdot b_{13}}=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\left(\frac{1}{b_9}-\frac{1}{b_{13}}\right)$$

$$b_{4n+5}-b_{4n+1}=b_1q^{4n}\left(q^4-1\right)\Rightarrow \frac{q^{4n}}{b_{4n+1}\cdot b_{4n+5}}=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\left(\frac{1}{b_{4n+1}}-\frac{1}{b_{4n+5}}\right)$$

$$S=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\left(\frac{1}{b_5}-\frac{1}{b_9}+\frac{1}{b_9}-\frac{1}{b_{13}}+\ldots+\frac{1}{b_{4n+1}}-\frac{1}{b_{4n+5}}\right)$$

$$S=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\left(\frac{1}{b_5}-\frac{1}{b_{4n+5}}\right)=\frac{1}{b_1\left(q^4-1\right)}\frac{b_1q^4\left(q^{4n}-1\right)}{b_5\cdot b_{4n+5}}=\frac{q^4}{q^4-1}\cdot\frac{q^{4n}-1}{b_5b_{4n+5}}$$

**3. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale în progresie geometrică, în care $q \neq 1$. Demonstraţi că:**

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}}+\frac{q}{\sum_{k+1}^{n}b_{k+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+2}}+\ldots+\frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n}b_{k+i}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}}=\frac{q^{i+1}}{(q-1)\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_{k+i+1}};\forall n\in N^*,i\in N$$

**Rezolvare**: $\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(b_1 q^k - b_1 q^{k-1}\right) = b_1(q-1)\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}} = \frac{1}{b_1(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+1}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k+2} - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(b_1 q^{k+1} - b_1 q^k\right) = b_1(q-1)\cdot q\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

$$\frac{q}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+2}} = \frac{1}{b_1(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+1}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+2}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1} - \sum_{k=1}^{n} b_{k+i} = \sum_{k=1}^{n}\left(b_1 q^{k+i} - b_1 q^{k+i-1}\right) = b_1(q-1)\cdot q^i\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

$$\frac{q^i}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}} = \frac{1}{b_1(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}\right)$$

$$S = \frac{1}{b_1(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}\right) = \frac{1}{b_1(q-1)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}\cdot\frac{b_1\left(q^{i+1}-1\right)\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}}{\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}} = \frac{q^{i+1}-1}{(q-1)\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{k+i+1}}$$

**O demonstrație cu Cauchy-Buniakovski-Schwarz a inegalității** $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$ **(*)**

**de Titu Zvonaru, Comăneşti**

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} + \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} + \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{bc}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{ac}} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}} + 2\sqrt{\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{bc}} + 2\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{ac}} \le 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} + 2\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}} + 2\sqrt{\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{bc}} +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{ac}} \le \frac{b+c-a}{2} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} + 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(b+c-a)\cdot\frac{1}{a}} + \sqrt{(c+a-b)\cdot\frac{1}{b}} + \sqrt{(a+b-c)\cdot\frac{1}{c}}\right)^2 \le (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$ adevărată.

# On the problem 12068 from AMM/2018

**by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Mihály Bencze and Daniel Sitaru**

In the American Mathematical Monthly (AMM), Vol. 125, No. 8, October 2018, p.756 was published the Problem 12068, proposed by *D.M. Bătinețu-Giurgiu*, ''Matei Basarab'' National College, Bucharest, Romania and *Neculai Stanciu*, ''George Emil Palade'' School, Buzău, Romania.

**Problem 12068.** If $ABC$ is a triangle with usual notations prove that

(a) $$\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2+\frac{h_c+h_a}{h_b}r_b^2+\frac{h_a+h_b}{h_c}r_c^2\ge 2s^2;$$

(b) $$\frac{r_b+r_c}{r_a}h_a^2+\frac{r_c+r_a}{r_b}h_b^2+\frac{r_a+r_b}{r_c}h_c^2\ge\frac{4s^2r}{R}.$$

**Solution for (a)**:We have $\sum_{cyclic}\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2+\sum_{cyclic}r_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{h_b+h_c}{h_a}+1\right)r_a^2=$

$$=(h_a+h_b+h_c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{r_a^2}{h_a}\overset{Bergstrom}{\ge}(h_a+h_b+h_c)\cdot\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{h_a+h_b+h_c}=$$

$$=(r_a+r_b+r_c)^2=\sum_{cyclic}r_a^2+2\sum_{cyclic}r_ar_b\ge 2\sum_{cyclic}r_ar_b,\ \sum_{cyclic}\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2\ge 2\sum_{cyclic}r_ar_b\ (1).$$

We have $r_a=\frac{F}{s-a}$ and other two similar. Therefore

$$\sum_{cyclic}r_ar_b=\sum_{cyclic}\frac{F^2}{(s-a)(s-b)}=F^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{(s-a(s-b)}=$$

$$=F^2\cdot\frac{s-c+s-a+s-b}{(s-a)(s-b)(s-c)}=F^2\cdot\frac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\overset{Heron}{=}\frac{F^2s^2}{F^2}=s^2,\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{h_b+h_c}{h_a}r_a^2\ge 2s^2$, q.e.d.

**Solution for (b):** We have $\sum_{cyclic}\frac{r_b+r_c}{r_a}h_a^2+\sum_{cyclic}h_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{r_b+r_c}{r_a}+1\right)h_a^2=$

$$=(r_a+r_b+r_c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{h_a^2}{r_a}\overset{Bergstrom}{\ge}(r_a+r_b+r_c)\cdot\frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{r_a+r_b+r_c}=$$

$$=(h_a+h_b+h_c)^2=\sum_{cyclic}h_a^2+2\sum_{cyclic}h_ah_b\ge 2\sum_{cyclic}h_ah_b,\ \sum_{cyclic}\frac{r_b+r_c}{r_a}h_a^2\ge 2\sum_{cyclic}h_ah_b\ (1).$$

We have

$$\sum_{cyclic}h_ah_b=\sum_{cyclic}\frac{ah_a\cdot bh_b}{ab}=4S^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}=4S^2\cdot\frac{a+b+c}{abc}=4S^2\cdot\frac{2s}{4SR}=\frac{2Ss}{R}=\frac{2rs^2}{R},\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{r_b+r_c}{r_a}h_a^2\ge 2\cdot\frac{2rs^2}{R}=\frac{4s^2r}{R}$, q.e.d.

Now we present certain problems similar to the problem from above.

**Problem 1.** If $ABC$ is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{w_b+w_c}{w_a}h_a^2+\frac{w_c+w_a}{w_b}h_b^2+\frac{w_a+w_b}{w_c}h_c^2\ge\frac{4s^2r}{R}.$$

**Solution**:We have $\sum_{cyclic}\frac{w_b+w_c}{w_a}h_a^2+\sum_{cyclic}h_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{w_b+w_c}{w_a}+1\right)h_a^2=$

$$=(w_a+w_b+w_c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{h_a^2}{w_a}\overset{Bergstrom}{\geq}(w_a+w_b+w_c)\cdot\frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{w_a+w_b+w_c}=$$

$$=(h_a+h_b+h_c)^2=\sum_{cyclic}h_a^2+2\sum_{cyclic}h_ah_b\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b\ ,\ \sum_{cyclic}\frac{w_b+w_c}{w_a}h_a^2\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b\ \ (1).$$

We have

$$\sum_{cyclic}h_ah_b=\sum_{cyclic}\frac{ah_a\cdot bh_b}{ab}=4S^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}=4S^2\cdot\frac{a+b+c}{abc}=4S^2\cdot\frac{2s}{4SR}=\frac{2Ss}{R}=\frac{2rs^2}{R}\ ,\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{w_b+w_c}{w_a}h_a^2\geq 2\cdot\frac{2rs^2}{R}=\frac{4s^2r}{R}$, q.e.d.

**Problem 2.** If $ABC$ is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{m_b+m_c}{m_a}h_a^2+\frac{m_c+m_a}{m_b}h_b^2+\frac{m_a+m_b}{m_c}h_c^2\geq\frac{4s^2r}{R}.$$

**Solution**: We have $\sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}h_a^2+\sum_{cyclic}h_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{m_b+m_c}{m_a}+1\right)h_a^2=$

$$=(m_a+m_b+m_c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{h_a^2}{m_a}\overset{Bergstrom}{\geq}(m_a+m_b+m_c)\cdot\frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{m_a+m_b+m_c}=$$

$$=(h_a+h_b+h_c)^2=\sum_{cyclic}h_a^2+2\sum_{cyclic}h_ah_b\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b\ ,\ \sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}h_a^2\geq 2\sum_{cyclic}h_ah_b\ \ (1).$$

We have $\sum_{cyclic}h_ah_b=\sum_{cyclic}\frac{ah_a\cdot bh_b}{ab}=4S^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{ab}=4S^2\cdot\frac{a+b+c}{abc}=4S^2\cdot\frac{2s}{4SR}=\frac{2Ss}{R}=\frac{2rs^2}{R}$, (2).

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}h_a^2\geq 2\cdot\frac{2rs^2}{R}=\frac{4s^2r}{R}$, q.e.d.

**Problem3.** If $ABC$ is a triangle with usual notations prove that

$$\frac{m_b+m_c}{m_a}r_a^2+\frac{m_c+m_a}{m_b}r_b^2+\frac{m_a+m_b}{m_c}r_c^2\geq 2s^2.$$

**Solution**:We have $\sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}r_a^2+\sum_{cyclic}r_a^2=\sum_{cyclic}\left(\frac{m_b+m_c}{m_a}+1\right)r_a^2=$

$$=(m_a+m_b+m_c)\cdot\sum_{cyclic}\frac{r_a^2}{m_a}\overset{Bergstrom}{\geq}(m_a+m_b+m_c)\cdot\frac{(r_a+r_b+r_c)^2}{m_a+m_b+m_c}=$$

$$=(r_a+r_b+r_c)^2=\sum_{cyclic}r_a^2+2\sum_{cyclic}r_ar_b\geq 2\sum_{cyclic}r_ar_b\ ,\ \sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}r_a^2\geq 2\sum_{cyclic}r_ar_b\ \ (1).$$

We have $r_a=\frac{F}{s-a}$ and other two similar. Therefore

$$\sum_{cyclic}r_ar_b=\sum_{cyclic}\frac{F^2}{(s-a)(s-b)}=F^2\cdot\sum_{cyclic}\frac{1}{(s-a(s-b)}=$$

$$=F^2\cdot\frac{s-c+s-a+s-b}{(s-a)(s-b)(s-c)}=F^2\cdot\frac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\overset{Heron}{=}\frac{F^2s^2}{F^2}=s^2,\ (2).$$

By (1) and (2) we obtain $\sum_{cyclic}\frac{m_b+m_c}{m_a}r_a^2\geq 2s^2$, q.e.d

**„ A fi simplu, dar cinstit e mai prețios decât a fi genial, dar necinstit.”**
**Balzac**
**(1799-1850)**

# 3. Probleme rezolvate

## ▪ Clasa a V-a

**G:830**. **Echipa olimpică la matematică a clasei a 5- a trimite rezolvări de probleme la Gazeta Matematică. De două ori numărul de rezolvări expediate de fiecare fată plus de 3 ori numărul de rezolvări expediate de fiecare băiat fac 56 probleme rezolvate. De 5 ori rezolvările înaintate de fiecare fată plus de patru ori rezolvările înaintate de fiecare băiat fac 98 probleme.Câte rezolvări a trimis o fată şi câte rezolvări a trimis un băiat ?**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:*** Fie f = numărul rezolvărilor trimise de o fată, b = numărul rezolvărilor trimise de un băiat. Metoda comparației: 2f + 3b = 56. ***și*** 5f + 4b = 98. Adun relațiile: 7f + 7b = 154. Împart cu 7. f + b = 22. Înmulțesc cu 2. 2f + 2b = 44. O scad din prima relație şi rezultă b = 12, apoi f = 10.

**G:831**. **Produsul a 2018 numere naturale este egal cu 2018. Aflați cea mai mica sumă posibilă a acestor numere.**

elev **Gobej Ştefan**, Curtea de Argeş

***Rezolvare:*** Numărul $2018 = 2 \cdot 1009$ iar $1009$ este număr prim. Aşadar produsul poate fi :
$2 \cdot 1009 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{de\,2016\,ori}$ sau $2018 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{de\,2017\,ori}$.
Prin calcul suma cea mai mică se obține pentru prima variantă şi este egală cu 3027.

**G:832**. a) **Calculați:$1^3 + 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$ .**
**b) Arătați că numărul $2018^{2017}$ se poate scrie ca o sumă de nouă cuburi perfecte diferite de zero.**

**Dârstaru Gheorghe**, Buzău

***Rezolvare***:
a) Calculul cuburilor $1^3, 1^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3$ ; $1^3 + 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2018$
b) $2018^{2017} = 2018 \cdot 2018^{2016} = (1^3 + 1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3) \cdot 2018^{2016} = (1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3) \cdot (2018^{672})^3 = 1^3 \cdot (2018^{672})^3 + 1^3 \cdot (2018^{672})^3 + 3^3 \cdot (2018^{672})^3 + 4^3 \cdot (2018^{672})^3 + 5^3 \cdot (2018^{672})^3 + 6^3 \cdot (2018^{672})^3 + 7^3 \cdot (2018^{672})^3 + 8^3 \cdot (2018^{672})^3 + 9^3 \cdot (2018^{672})^3 = (1 \cdot 2018^{672})^3 + (1 \cdot 2018^{672})^3 + (3 \cdot 2018^{672})^3 + (4 \cdot 2018^{672})^3 + (5 \cdot 2018^{672})^3 + (6 \cdot 2018^{672})^3 + (7 \cdot 2018^{672})^3 + (8 \cdot 2018^{672})^3 + (9 \cdot 2018^{672})^3$.

**G:833**. **Arătați că dacă numerele naturale $a, b, c, d, e, f$ verifică egalitatea $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + f^5 = 46656$, atunci**

$$\frac{(a+b+c+d+e+f)^6}{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+f^5} = 36^3.$$

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

**Rezolvare:** Observăm că $46656 = 6^6 = 6^5 \cdot 6 = 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5$, adică
$a = b = c = d = e = f = 6$. Deci, $\frac{(a+b+c+d+e+f)^6}{a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+f^5} = \frac{(6+6+6+6+6+6)^6}{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5} =$

$$=\frac{36^6}{6\cdot 6^5}=\frac{36^6}{6^6}=\frac{6^{12}}{6^6}=6^6=(6^2)^3=36^3.$$

**G:834**. **Să se arate că mărind suma** $S=0,01+0,11+1,11+11,11+111,11+....+11111111,11$ **cu 111111110, rezultatul este număr natural.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** Suma S se scrie $S=\frac{1}{100}+\frac{11}{100}+\frac{111}{100}+\frac{1111}{100}+.....+\frac{1111111111}{100}=\frac{n}{100}$, unde $n=1+11+111+1111+11111+....+1111111111$. Folosind scrierea în baza 10 scriem

$n=10\cdot 1+9\cdot 10+8\cdot 10^2+7\cdot 10^3+...+2\cdot 10^8+1\cdot 10^9=$

$=1\cdot 10^9+2\cdot 10^8+3\cdot 10^7+.....+6\cdot 10^4+7\cdot 10^3+9\cdot 10^2=1234567900$

Atunci, n+111111110 este evident natural.

**G:835**. **Aflați numerele naturale nenule** $x,y,z,t$, **dacă:** $\frac{56}{15}=x+\cfrac{1}{y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}}$. **Radu Diaconu,** Sibiu

***Rezolvare:*** Avem: $3+\frac{11}{15}=x+\cfrac{1}{y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}}$. Deoarece $\cfrac{1}{y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}}<1$, avem $x=3$,

$\cfrac{1}{y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}}=\frac{11}{15}\Rightarrow\frac{15}{11}=y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}\Leftrightarrow 1+\frac{4}{11}=y+\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}$. Cum

$1+\frac{4}{11}<2\Rightarrow y=1,\cfrac{2}{z+\cfrac{3}{t}}=\frac{4}{11}\Rightarrow z+\frac{3}{t}=\frac{11}{2}$. De aici convine doar $z+\frac{3}{t}=4+\frac{3}{2}\Rightarrow z=4,t=2$.

Deci, numerele căutate sunt: $\begin{cases}x=3,y=1,z=4,t=2\\x=3,y=1,z=5,t=6.\end{cases}$

**G:836**. **Determinați numerele** $\overline{abcd}$ **care verifică relația** $4\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$. **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare:***

- $a$ este 1 sau 2 deoarece prin înmulțirea cu 4 produsul trebuie să fie mai mic decât 10000; $a$ trebuie să fie par (rezultă din relația dată). Deci $a=2$.
- $d$ trebuie să fie 8 sau 9 deoarece produsul este mai mare decât $2000\cdot 4$; pentru că $d\cdot 4$ se termină în 2 urmează că $d=8$.
- Deoarece $4c+3$ este impar avem că $b$ trebuie să fie impar. Rezultă $b=1$ pentru a păstra produsul un număr de 4 cifre şi în final rezultă $c=7$.

Deci numărul căutat este 2178.

**G:837**. **Aflați numerele naturale m şi n, cu** $m\langle n$ **, astfel încât suma numerelor naturale mai mari ca m, dar mai mici decât n să fie 2019.**

**Marian Ciuperceanu**, Craiova

***Rezolvare:*** $(m+1)+(m+2)+...+(n-2)+(n-1)=2019\Leftrightarrow\left[(n-1)+(m+1)\right]\cdot(n-m-1)=2\cdot 2019$

Cum $n-m-1\langle n+m$ şi $2\cdot 2019=2\cdot 3\cdot 673$ rezultă următoarele posibilități:

$\begin{cases} n-m-1=1 \\ n+m=4038 \end{cases}$; $\begin{cases} n-m-1=2 \\ n+m=2019 \end{cases}$; $\begin{cases} n-m-1=3 \\ n+m=1346 \end{cases}$; $\begin{cases} n-m-1=6 \\ n+m=673 \end{cases}$;

Soluțiile sunt: $(m,n) \in \{(2020;2018),(1011;1008),(675;671),(340;333)$;

# ▪ Clasa a VI-a

**G:838**. **Determinați numerele întregi $x$ şi $y$, ştiind că:** $(3-2y)(x+2)+(y-1)(x+4)+6=0.$

**Radu Diaconu,** Sibiu

***Rezolvare:***

Ecuația este echivalentă cu $3x+6-2xy-4y+xy+4y-x-4+6=0 \Leftrightarrow 2x-xy+8=0$ rezultă

$x(y-2)=8 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y-2 \neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{8}{y-2}$. Dar,

$x \in Z \wedge y \in Z \Rightarrow (y-2) \mid 8 \Rightarrow y-2 \in \{-8,-4,-2,-1,1,2,4,8\} \Rightarrow y \in \{-6,-2,0,1,3,4,6,10\}$. Rezultă

$S=\{(-1,-6);(-2,-2);(-4,0);(-8,1);(8,3);(4,4);(2,6);(1,10)\}$.

**G:839**. **Se consideră şirul de numere naturale 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, ....**

**a) Găsiți al 2018-lea termen al şirului;**

**b) Aflați numerele din şir $a_m, a_n$ a căror diferență este 4037, $a_m - a_n = 4037$ .**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

a) Se observă că orice termen al şirului se formează după regula $a_n = n^2+1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, $a_{2108} = 2018^2+1 = 4072325$.

b) Observăm că

$4037 = 2018+2019 = (2019+2018)(2019-2018) = 2019^2-2018^2 = (2019^2+1)-(2018^2+1)$

Aşadar, $a_{2019}-a_{2018}=4037$. Arătăm că mai sunt şi alți termeni ai şirului cu această proprietate.

Fie $m \rangle n \geq 1$ cu $a_m - a_n = 4037 \Rightarrow$ $(m^2+1)-(n^2+1)=m^2-n^2=4037$. Cum $4037=11\cdot 367 \Rightarrow$

$m^2-n^2=4037 \Leftrightarrow (m-n)(m+n)=1\cdot 4037$ ( 1) şi $(m-n)(m+n)=11\cdot 367$. ( 2) .

Cum $m-n \langle m+n$ rezultă din (1) că m=2019 şi n= 2018 şi din ( 2) rezultă m=189 şi n=178.

Deci şi termenii $a_{189}$ şi $a_{178}$ au diferența 4037.

**G:840**. **Aflați x din** $\left\{\left[\left(x+\dfrac{1}{2018}\right):\dfrac{1}{2018}-1\right]+2018\right\}:2018=2019$. **Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare:***

$\{\ \}=2018\cdot 2019$, $[\ ]=2018^2$, $(\ ):\dfrac{1}{2018}=1+2018^2$, $2018x+1=1+2018^2 \Rightarrow x=2018$.

**G:841**. **Dacă numerele $a_1,a_2,...,a_n;b_1,b_2,...,b_k\ (n,k \in N^*)$ sunt numere intregi care nu se divid la 5, să se arate că fracția:** $\dfrac{a_1^4+a_2^4+...+a_n^4-n}{b_1^4+b_2^4+...+b_k^4+4k}$ **este o fracție reductibilă prin 5**.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**Rezolvare**: Vom pune mai întâi în evidență următorul rezultat: *dacă un număr întreg a care nu se divide la 5 atunci numărul* $a^4+4$ *se divide la 5.*

Dacă $a \in \mathbb{Z}$ şi a nu se divide la 5 atunci, unul din numerele
$a-2, a-1, a+1, a+2 \vdots 5 \Rightarrow (a-2)(a+2)(a-1)(a+1) \vdots 5 \Leftrightarrow (a^2-1)(a^2-4) \vdots 5 \Leftrightarrow a^4-5a^2+4 \vdots 5 \Leftrightarrow$
$a^4+4 \vdots 5$ sau se poate justifica uşor că ultima cifră a numărului $a^4+4$ este 5 sau 0.
Fracția se mai scrie şi sub forma:
$\dfrac{(a_1^4+4)+(a_2^4+4)+...+(a_n^4+4)+(-5n)}{(b_1^4+4)+(b_2^4+4)+...+(b_k^4+4)}$ şi cum fiecare termen de la numărător şi de la numitor se divide la 5, rezultă că fracția se simplifică prin 5.

**G:842**. Arătați că: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot.....\cdot\frac{9999}{10000} \langle\ 0,01$ . **Ciuperceanu Marian**, Craiova

***Rezolvare:*** Fie $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot.....\cdot\frac{9999}{10000}$ şi $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot.....\cdot\frac{10000}{10001}$. Atunci, $A\cdot B=\frac{1}{10001}$.
Cum $\frac{1}{2}\langle\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\langle\frac{4}{5},\ .....,\frac{9999}{10000}\langle\frac{10000}{10001} \Rightarrow A\langle B \Rightarrow\ A^2\langle A\cdot B=\frac{1}{10001}\langle\frac{1}{10000}=0,0001$. Atunci, $A\langle 0,01$.

**G:843**. **Să se demonstreze că numărul $11^{2010}+11^{2011}+11^{2012}+11^{2013}-2004$ are un număr par de divizori**.

**Titu Zvonaru, Comăneşti, şi Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare:*** Un număr are un număr par de divizori dacă şi numai dacă nu este pătrat perfect.
Vom arăta că numărul din enunț se divide cu 5 dar nu se divide cu 25.
*Lemă.* Dacă ultima cifră a lui $k$ este $k'$, atunci $11^k$ se termină cu cifrele $\overline{k'1}$.
*Demonstrație.* $11^k=(10+1)^k=M_{100}+10\cdot(M_{10}+k')+1=M_{100}+\overline{k'1}$.
Din lemă deducem că ultimile două cifre ale numărului din enunț sunt:
$\overline{01}+\overline{11}+\overline{21}+\overline{31}-\overline{04}=60$, şi atunci, conform criteriului de divizibilitate cu 25, se divide cu 5 dar nu cu 25.

**G:844**. **Cât este măsura unui unghi dacă măsura suplementului său este cu $63^0$ mai mare decât triplul măsurii complementului său ?**

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Notăm cu $a$ măsura unghiului căutat. Din enunț rezultă
$$180^0-a-63^0=3(90^0-a) \Leftrightarrow 117^0-a=270^0-3a \Leftrightarrow 2a=153^0 \Leftrightarrow a=76^0 30'.$$

**G:845**. **Arătați că: $A=4^{3n}+3\cdot 4^{2n}-4$ se divide cu 108, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.**

**Gobej Adrian** , Curtea de Argeş

***Rezolvare:*** Notăm $4^n=x \Rightarrow x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$
$4^n+2=(3+1)^n+2=(M_3+3)\vdots 3 \Rightarrow (4^n+2)^2\vdots 9 \qquad (4^n+2)\vdots 2 \Rightarrow (4^n+2)^2\vdots 4$ .
De asemenea $(4^n-1)\vdots 3$. Deoarece (4,9)=1, atunci 3·4·9=108 divide *A*.

**G:846**. **În triunghiul ABC cunoaştem că $m(A)=\alpha$, $0\ \langle\alpha\langle\ 90^0$ şi AC=2AB. Să se determine natura triunghiului ABC, în cazurile:**
a) $0\langle\alpha\langle 60^0$; b) $\alpha=60^0$; c) $60^0\langle\alpha\langle 90^0$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:**
a) Fie D mijlocul lui $(AC)$, deci AD=DC şi AC=2AB=2AD, de unde AB=AD, deci triunghiul ABD este isoscel. Atunci, $m(ABD)=m(ADB)=\frac{180-\alpha}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2}\rangle 60^0$. Cum $m(A)=\alpha\langle 60^0=m(ABD)\Rightarrow$
$BD\langle AD \Rightarrow BD\langle DC \Rightarrow m(DBC)\rangle\ m(BCD)$. Cum

$m(BDC)=m(BAD)+m(ABD)=\alpha+90^0-\frac{\alpha}{2}=90^0+\frac{\alpha}{2}$.

În triunghiul BDC avem: $m(DBC)+m(BCD)=180^0-m(BDC)=180^0-90^0-\frac{\alpha}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2}$.

Cum $m(BCD)\langle m(DBC)$ avem $90^0-\frac{\alpha}{2}=m(DBC)+m(BCD)\langle 2m(DBC)$ de unde

$m(DBC)\rangle 45^0-\frac{\alpha}{4}\rangle 30^0$. $m(ABC)=m(ABD)+m(DBC)=90^0-\frac{\alpha}{2}+m(DBC)\rangle 120^0-\frac{\alpha}{2}$. Triunghiul $\Delta ABC$ este obtuz unghic.

b) Dacă $\alpha=60^0$ atunci $\Delta ABD$ este echilateral, $\Delta BDC$ e isoscel cu $m(BDC)=120^0$ şi atunci $m(ABC)=90^0$, triunghiul $\Delta ABC$ fiind dreptunghic.

c) Dacă $60^0\langle\alpha\langle 90^0$ atunci $\Delta ABD$ este isoscel cu $m(ABD)=m(ADB)=90^0-\frac{\alpha}{2}\langle 60^0$. Rezultă $AD\langle BD$, $DC\langle BD$. Atunci, $m(ABC)=m(ABD)+m(DBC)=90^0-\frac{\alpha}{2}+m(DBC)\langle 90^0$, triunghiul fiind ascuțit unghic.

**G:847. În triunghiul ABC, AB<AC, punctul M este mijlocul laturii $[BC]$, punctul N ∈ (AC) astfel încât [NC] ≡[NB], MN∩AB = {P} şi BN∩PC = {R}.**

**a) Arătați că [PC] ≡ [PB] şi [NA] ≡ [NR];**

**b) Dacă pe latura [AB] se iau punctele distincte A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_{99}$, B în această ordine şi se colorează primul segment [$AA_1$] şi apoi fiecare al şaselea segment după cel colorat, adică [$A_7A_8$], [$A_{14}A_{15}$] etc. (se numără şi segmentele colorate întâlnite pe parcurs), demonstrați că segmentul [AB] poate fi colorat în două nuanțe.**

**Dârstaru Gheorghe**, Buzău

***Rezolvare:***

a) $\Delta NMC\equiv\Delta NMB\ (L.L.L)\Rightarrow\sphericalangle NMC\equiv\sphericalangle NMB,\ \sphericalangle MNC\equiv\sphericalangle MNB$.

$\Delta PMC\equiv\Delta PMB\ (L.U.L)\Rightarrow[PB]\equiv[PC],\ \sphericalangle MPC\equiv\sphericalangle MPB$.

$\Delta PNR\equiv\Delta PNA\ (U.L.U)\Rightarrow[NA]\equiv[NR]$.

b) Dacă A = $A_1$ şi B = $A_{101}$ şi colorăm cu o nuanță segmentul [$A_1A_2$], parcurgând o dată segmentele se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100},iar restul împărțirii lui n la 6 este 1, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 97, adică [$A_{97}A_{98}$]. Când parcurgem a doua oară segmentele se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, iar restul împărțirii lui n la 6 este 3, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 99,adică [$A_{99}A_{100}$]. La a treia parcurgere se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, iar restul împărțirii lui n la 6 este 5, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 95, adică [$A_{95}A_{96}$] . Observăm că procesul se repetă deci rămân necolorate segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, cu restul împărțirii lui n la 6 egal cu 0, 2, 4, în total 50 de segmente.

Dacă se colorează cu o altă nuanță segmentul [$A_2A_3$] parcurgând o dată segmentele se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100},iar restul împărțirii lui n la 6 este 2, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 98, adică [$A_{98}A_{99}$]. Când parcurgem a doua oară segmentele se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, iar restul împărțirii lui n la 6 este 4, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 100,adică [$A_{100}A_{101}$]. La a treia parcurgere se colorează segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, iar restul împărțirii lui n la 6 este 0, ultimul segment colorat la această parcurgere fiind segmentul numărul 96, adică [$A_{96}A_{97}$]. Observăm că procesul se repetă deci rămân necolorate segmentele [$A_nA_{n+1}$] cu n ∈{1,2,...,100}, cu restul împărțirii lui n la 6 egal cu 1, 3,5,

în total 50 de segmente.

# ▪ Clasa a VII-a

**G:848**. **Aflați** $x, y \in \mathbb{R}$ **astfel încât expresia** $x^{2018} + 2^{2018} \cdot y^{2018} - 2^{1010} \cdot x^{1009} + 2^{1010} \cdot y^{1009} + 2^{2018} + 1$ **să fie minimă.**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare***: $\left(x^{1009} - 2^{1009}\right)^2 + \left((2y)^{1009} + 1\right)^2 = 0$. Fiecare pătrat trebuie să fie 0. Rezultă x= 2, $y = -\frac{1}{2}$.

**G:849**. **Arătați că** $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{5}{3n}} + \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{4}{3n}} + \sqrt{\frac{7}{3} - \frac{3}{n}} < 4$ , $\forall n \in N, n \geq 2$.

**Radu Diaconu,** Sibiu

***Rezolvare:*** Inegalitatea dată se scrie astfel: $\sqrt{n+5} + \sqrt{8n+4} + \sqrt{7n-9} < 4\sqrt{3n}$.
Folosind inegalitatea dintre media pătratică şi media aritmetică pentru trei numere reale , avem:

$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ , cu egalitate pentru $a = b = c$. Considerând

$a = \sqrt{n+5}, b = \sqrt{8n+4}, c = \sqrt{7n-9}$ , rezultă

$$\frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{8n+4} + \sqrt{7n-9}}{3} \leq \sqrt{\frac{n+5+8n+4+7n-9}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{n+5} + \sqrt{8n+4} + \sqrt{7n-9} \leq 4\sqrt{3n}.$$

Dacă ar avea loc egalitatea, atunci: $n+5 = 8n+4 = 7n-9$. Din $n+5 = 8n+4$, obținem

$n = \frac{1}{7} \notin N$, prin urmare $\sqrt{n+5} + \sqrt{8n+4} + \sqrt{7n-9} < 4\sqrt{3n}$.

**G:850**. **Să se arate că dacă** $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \neq b$, **atunci numărul** $n = 2018a^2 + 2019b^2$ **se poate scrie ca suma a 2019 pătrate perfecte.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

$$n = 2018(a^2+b^2) + b^2 = 1009(2a^2+2b^2) + b^2 = 1009\left[(a+b)^2 + (a-b)^2\right] + b^2 =$$

$$= \underbrace{(a+b)^2 + (a+b)^2 + \ldots\ldots + (a+b)^2}_{1009\ termeni} + \underbrace{(a-b)^2 + (a-b)^2 + \ldots\ldots + (a-b)^2}_{1009\ termeni} + b^2$$ , adică suma a 201~~8~~9 pătrate perfecte.

**G:851**. **Să se demonstreze că** $\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+2}{\sqrt{a+1}} + \frac{a+3}{\sqrt{a+2}} + \ldots + \frac{a+1009}{\sqrt{a+1008}} > 2018$, $\forall a \in \mathbb{N}^*$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

***Rezolvare*** Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2, \ \forall x, y > 0 \ (1).$$

Dacă în (1) luăm pentru $x$ valorile $a, a+1, a+2, \ldots, a+1009$, iar $y = 1$, atunci obținem

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} > 2, \frac{a+2}{\sqrt{a+1}} > 2, \frac{a+3}{\sqrt{a+2}} > 2, \ldots, \frac{a+1009}{\sqrt{a+1008}} > 2, (2).$$

Dacă adunăm inegalitățile (2) membru cu membru, atunci obținem inegalitatea de demonstrat.

**G:852**. **Să se determine numerele naturale n şi k, pentru care numărul** $\sqrt{2^n + 4^k}$ **este rațional.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare***: Numărul $\sqrt{2^n+4^k}$ este rațional, dacă şi numai dacă numărul numărul $2^n+4^k$ este pătrat perfect.

Din $2^n+4^k=p^2, p\in N$, rezultă: $(p-2^k)(p+2^k)=2^n$, (1) de unde: $\begin{cases} p-2^k=2^s \\ p+2^k=2^t \end{cases}$

$s+t=n; s,t\in N^*$.

Rezolvând sistemul, obținem: $p=2^{s-1}+2^{t-1}$ şi $2^k=2^{s-1}(2^{t-s}-1)$. Din ultima relație, rezultă:
s = k + 1 şi $2^{t-s}-1=1 \Leftrightarrow 2^{t-s}=2 \Leftrightarrow$ t = 1 + s, şi atunci $p=3\cdot 2^{s-1}=3\cdot 2^k$, şi prin intermediul lui (1) , avem:
$2^n=(3\cdot 2^k-2^k)(3\cdot 2^k+2^k) \Leftrightarrow 2^n=2^{2k+3} \Leftrightarrow n=2k+3$.
Aşadar, numerele naturale sunt: k şi n = 2k + 3, k∈**N**.

**G:853**. **Determinați numerele $\overline{abc}$ ştiind că $\sqrt{\overline{abc}}=\overline{ab}-\sqrt{c}$.** **Gobej Adrian**, Curtea de Argeş

***Rezolvare:*** $\sqrt{\overline{abc}}\ge 0 \Rightarrow \overline{ab}-\sqrt{c}\ge 0 \Rightarrow \overline{ab}>0(\overline{ab}>9)$. Ridicând la pătrat, efectuând calculele şi stabilirea relației $\overline{ab}(\overline{ab}-10-2\sqrt{c})=0 \Rightarrow \overline{ab}-10-2\sqrt{c}=0 \Rightarrow \overline{ab}-10=2\sqrt{c}$, $\overline{ab}-10\in$ N $\Rightarrow \sqrt{c}\in$ N $\Rightarrow$ c∈ {0, 1, 4, 9}. Finalizare $\overline{abc}\in$ { 100, 121, 144, 169}.

**G:854**. **În triunghiul ABC, mediana $[BD]$ cu $D\in[AC]$ şi bisectoarea $[CE]$ cu $E\in[AB]$ se intersectează în M, iar AM intersectează BC în N. Arătați că:**
**a)** $EN \parallel AC$; **b) Triunghiul CEN este isoscel**. **Dârstaru Gheorghe**, Buzău

***Rezolvare:***
a) Aplicăm teorema lui Ceva în triunghiul ABC pentru dreptele AN, BD, CE :

$$\frac{EA}{EB}\cdot\frac{NB}{NC}\cdot\frac{DC}{DA}=1 \Rightarrow \frac{EB}{EA}=\frac{NB}{NC} \Rightarrow EN \parallel AC.$$

b) $[CE]$ bisectoare, $EN \parallel AC$, CE secantă , $\sphericalangle NCE \equiv \sphericalangle NEC$. Rezultă, triunghiul $\Delta CEN$ este isoscel.

**G:855**. **Un fermier are un teren triunghiular ca în figura de mai jos.**
**În zona de vest pot paşte 6 capre, în zona sudică 12 capre, iar în est 8 capre. Ştiind că toate caprele pot mânca aceeaşi cantitate de iarbă, aflați câte capre pot paşte în zona de nord a terenului?**
**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

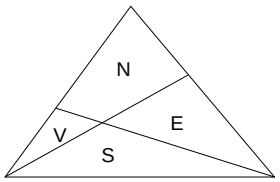
***Rezolvare***: Notăm terenul cu $ABC$ , $M\in AC, Q\in AB, BM\cap CQ=P$. De asemenea notăm cu $[XYZ]$ aria triunghiului $XYZ$ .

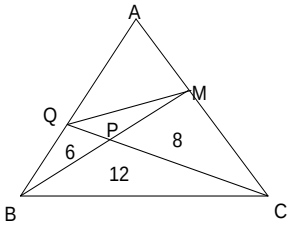
Avem $\frac{[MPC]}{[MPQ]}=\frac{PC}{PQ}=\frac{[BPC]}{[BPQ]}=\frac{12}{6} \Rightarrow [MPQ]=4$.

$\frac{[MAQ]}{[MQB]}=\frac{AQ}{QB}=\frac{[AQC]}{[BQC]} \Leftrightarrow \frac{[MAQ]}{10}=\frac{[MAQ]+12}{18} \Rightarrow [MAQ]=15$.

Deci în zona de nord pot paşte 19 capre.

**Generalizare:** $N=\frac{VE(2S+E+V)}{S^2-VE}$.



# ▪ Clasa a VIII-a

**G:856**. **Cercetați dacă** $2+\sqrt{3},\ 3+\sqrt{2},\sqrt{2(9+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$ **pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.**

**Ion Stănescu**, Smeeni, Buzău

***Rezolvare***:

Da, conform reciprocei teoremei lui Pitagora: $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(3+\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{2(9+2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}^2$.

**G:857**. **Fie** $x,y,z\ge -1$ **, astfel încât** $x+y+z=-1$. **Demonstrați că:** $x^3+y^3+z^3\ge -\frac{3}{2}$.

**Radu Diaconu ,** Sibiu

**Rezolvare.** Dacă $a\ge -1$, atunci $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2(a+1)\ge 0\Rightarrow\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)(a+1)\ge 0$

$\Rightarrow a^3+a^2-a^2-a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\ge 0\Rightarrow a^3-\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}\ge 0\Rightarrow a^3\ge\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}$. Cum $x,y,z\ge -1$, obținem:

$x^3\ge\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}, y^3\ge\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}, z^3\ge\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}$. Adunând aceste trei relații obținem:

$x^3+y^3+z^3\ge\frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$.

**G:858**. **Fie** $a,b,c\in[0;1]$ **şi notăm** $E(a;b;c)=\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{1+\sqrt{ab}}+\frac{b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}}{1+\sqrt{bc}}+\frac{c\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}}{1+\sqrt{ca}}$. **Să se arate că** $3abc\le E(a;b;c)\le a+b+c$.

**Emil C. Popa**, Sibiu

***Rezolvare:*** Pentru a=0, sau b=0 sau c=0 dubla inegalitate este evidentă.

Fie $a,b,c\in(0;1]$. Deoarece $\sqrt{ab}\le 1,\sqrt{bc}\le 1,\sqrt{ca}\le 1$, avem şi $ab\le\sqrt{ab}$ şi analoagele.

Prin urmare, $abc\le\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{2}\le\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{1+\sqrt{ab}}\le\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$.

Aşadar, $abc\le\frac{a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}}{1+\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$ şi analoagele.

Prin însumare obținem $3abc\le E(a;b;c)\le\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c$, ultima egalitate fiind evidentă cu inegalitatea mediilor.

**G:859**. **Să se rezolve în** $\mathbb{R}^3$ **sistemul de ecuații:** $\begin{cases}y^2-1=2xz\\ y-1=2x+z\\ (y+1)^2=2x(z+1)\end{cases}$.

**Radu Diaconu**, Sibiu

***Rezolvare*:** Înmulțind prima ecuație cu -1 şi adunând-o cu a treia ecuație a sistemului se obține:

$\begin{cases}-y^2+1=-2xz\\ y^2+2y+1=2xz+2x\end{cases}$ De aici, x=y+1 (1) care se înlocuieşte în prima ecuație şi dă $z=-(y+3)$ (2).

Înlocuind (1) şi (2) în prima ecuație obținem: $y^2-1=-2(y+1)(y+3)\Leftrightarrow 3y^2+8y+5=0$ cu soluțiile

$y_1=-1; y_2=-\frac{5}{3}$. Atunci, $x_1=0; x_2=-\frac{2}{3}$. $z_1=-2; y_2=-\frac{4}{3}$. $S=\left\{(0;-1;-2),(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3},-\frac{4}{3})\right\}$.

**G:860**. **Determinați numerele întregi x, care verifică ecuația** $x^2+(x+1)^2=\frac{4x^4+1}{41}$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** $(2x^2)^2+1=41(2x^2+2x+1)\Rightarrow (2x^2+1)^2-(2x)^2=41(2x^2+2x+1)\Leftrightarrow$
$(2x^2+1+2x)(2x^2+1-2x)=41(2x^2+2x+1)\Rightarrow 2x^2-2x+1=41\Leftrightarrow \quad 4x^2-4x+2=82\Rightarrow$
$(2x-1)^2=9^2\Rightarrow S=\{-4;5\}$.

**G:861**. **Să se demonstreze că dacă** $a+b+c+d=1009$**, cu** $a,b,c,d\in\mathbb{R}_+$**, atunci**
$\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(c+d+a)}+\sqrt{c(d+a+b)}+\sqrt{d(a+b+c)}\le 2018$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Din $a+b+c+d=1009$rezultă $b+c+d=1009-a$, $c+d+a=1009-b$, $d+a+b=1009-c$, $a+b+c=1009-d$. Inegalitatea din enunț devine $\sqrt{a(1009-a)}+\sqrt{b(1009-b)}+\sqrt{c(1009-c)}+\sqrt{d(1009-d)}\le 2018$, care rezultă imediat prin adunarea inegalităților $\sqrt{a(1009-a)}\le\frac{a+1009-a}{2}=\frac{1009}{2}$,

$$\sqrt{b(1009-b)}\le\frac{1009}{2},\sqrt{c(1009-c)}\le\frac{1009}{2},\ \sqrt{d(1009-d)}\le\frac{1009}{2}.$$

Altfel: $\sqrt{a(b+c+d)}\le\frac{a+b+c+d}{2}=1009$, analog pentru ceilalți termeni;

Se poate obține o inegalitate mai tare dacă se utilizează relația $\sqrt{3a(b+c+d)}\le\frac{3a+b+c+d}{2}$.

**G:862**. **Determinați numerele reale strict pozitive** $a,b,c$ **ştiind că**

$$\frac{6}{\sqrt{a+12-\sqrt{12a}}+\sqrt{b+6-\sqrt{20b}}+\sqrt{c+10-\sqrt{24c}}}\in\mathbb{N}.$$

**Gobej Adrian** , Curtea de Argeş

***Rezolvare:***

$\sqrt{a+12-\sqrt{12a}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)^2+9}\ge 3$, $\sqrt{b+6-\sqrt{20b}}=\sqrt{\left(\sqrt{b}-\sqrt{5}\right)^2+1}\ge 1$,

$\sqrt{c+10-\sqrt{24c}}=\sqrt{\left(\sqrt{c}-\sqrt{6}\right)^2+4}\ge 2$ şi cum numitorul este mai mare decât 6 iar fracția este număr natural, rezultă că numitorul $\le$ 6 . Atunci, a=3, b=5, c=6.

**G:863**. **a) Arătați că** $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\forall x,y\in\mathbb{R}_+$.

**b) Dacă** $x,y,z,t\ge 0$ **şi** $x+y+z+t=\sqrt{2}$ **demonstrați că**
$\sqrt{4x^2+9y^2}+\sqrt{16z^2+25t^2}+\sqrt{25x^2+16y^2}+\sqrt{9z^2+4t^2}\ge 7$

**Dârstaru Gheorghe**, Buzău

***Rezolvare***:
a) Se ridică la pătrat; b) Folosind rezultatul de la punctul a) avem:
$\sqrt{\frac{4x^2+9y^2}{2}}\ge\frac{2x+3y}{2}\Rightarrow\sqrt{4x^2+9y^2}\ge\frac{(2x+3y)\sqrt{2}}{2}$. Analog pentru ceilalți termeni, după care se adună.

**G:864**. **Să se rezolve în Z ecuația:** $a^2+3ab+3b^2=3a+5b$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare*** : Ecuația se mai scrie $3b^2+(3a-5)b+a^2-3a=0$, având soluții dacă discriminantul ecuației este pozitiv: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 9a^2-30a+25-12a^2+36a\ge 0\Leftrightarrow 3a^2-6a-25\le 0\Leftrightarrow 9a^2-18a-75\le 0\Leftrightarrow$
$(3a-3)^2-84\le 0\Leftrightarrow(3a-3)^2\le 84\Leftrightarrow|3a-3|\le 2\sqrt{21}\Leftrightarrow -2\sqrt{21}\le 3a-3\le 2\sqrt{21}\Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{21}}{3}\le a\le\frac{3+2\sqrt{21}}{3}$.

Cum a este un număr întreg , analizând toate situațiile în care $a \in \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$, rezultă :

1) Dacă $a=-2 \Rightarrow 3b^2-11b+10=0 \Rightarrow b=2;$ 2) Dacă $a=-1 \Rightarrow 3b^2-8b+4=0 \Rightarrow b=2;$

3) Dacă $a=0 \Rightarrow 3b^2-5b=0 \Rightarrow b=0;$ 4) Dacă $a=1 \Rightarrow 3b^2-2b-2=0 \Rightarrow b \in \varnothing$ ;

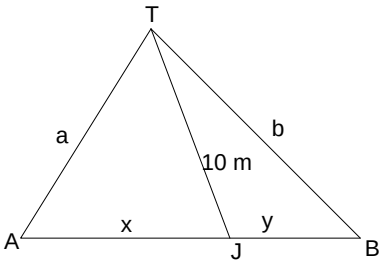
5) Dacă $a=2 \Rightarrow 3b^2+b-2=0 \Rightarrow b=-1;$ 6) Dacă $a=3 \Rightarrow 3b^2+4b=0 \Rightarrow b=0;$

7) Dacă $a=4 \Rightarrow 3b^2+7b+4=0 \Rightarrow b=-1;$

În concluzie mulțimea soluțiilor este $S=\{(-2;2),(-1;2),(0;0),(2;-1),(3;0),(4;-1)\}$ .

**G:865**. ***Tom* se află la 10 *m* distanță de *Jerry*. *Tom* aleargă cu 3 *m/s* iar *Jerry* alergă cu 2 *m/s*. *Jerry* este prins după ce parcurge $x$ metri într-o anumită direcție sau $y$ metri în direcția opusă. Să se arate că** $x+y \geq 8\sqrt{5}\ m$. **D.M. Bătinețu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

***Rezolvare:***




Avem $x=v_1t_1,\ a=v_2t_1 \Rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow a=\dfrac{3x}{2}$ şi

$y=v_1t_2,\ b=v_2t_2 \Rightarrow \dfrac{y}{b}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow b=\dfrac{3y}{2}$.

Aplicăm relația lui *Stewart* configurației de mai sus şi avem

$TA^2 \cdot JB + TB^2 \cdot JA = TJ^2 \cdot AB + AJ \cdot JB \cdot AB$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x^2}{4} \cdot y + \dfrac{9y^2}{4} \cdot x = 100(x+y) + xy(x+y) \Leftrightarrow 9xy(x+y) = 400(x+y) + 4xy(x+y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5xy(x+y) = 400(x+y) \Leftrightarrow xy = 80$, de unde conform cu inegalitatea mediilor $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$.

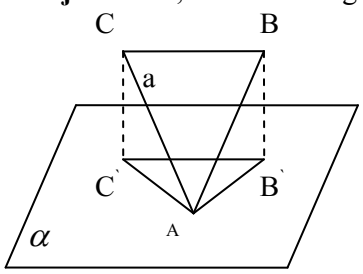
**Generalizare:** $x+y \geq \dfrac{2v_1d}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$; unde $v_1$ este viteza lui *Jerry* , $v_2$ este viteza lui *Tom* iar $d$ este distanța dintre *Tom* şi *Jerry*.

**G:866**. **Triunghiul $ABC$ dreptunghic isoscel cu $m(A)=90^0$ are vârful $A$ situat într-un plan $\alpha$. $AB$ şi $AC$ formează cu planul $\alpha$ unghiuri de aceeaşi măsură $u$. Fie $B', C'$ proiecțiile vârfurilor $B$, respectiv $C$ pe planul $\alpha$.**

**a) Demonstrați că $B'C' \| BC$.** **b) Determinați intervalul în care se află măsura $u$.**

**Gobej Adrian** , Curtea de Argeş

***Rezolvare***:




**a)** $\Delta C'AC \equiv \Delta B'AB$ (IU)

*Cum CBB'C'* dreptunghi $\Rightarrow CB \| B'C'$

**b)** Din inegalitatea triunghiului *AB'C'*, eventual degenerate, avem $B'C' \leq AB' + AC'$

Din $a\sqrt{2} \leq a\cos u + a\cos u \Leftrightarrow \cos u \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ deducem $0^0 \leq u \leq 45^0$.

# ▪ Clasa a IX-a

**L:638**. **Rezolvați ecuația:** $\left[\sqrt{n^2+8n+25}\right]=\frac{n^2+8}{3}$ **unde [a] reprezintă partea întreagă a lui a şi n∈ N.**

**Dârstaru Gheorghe,** Buzău

***Rezolvare:***

$(n+4)^2<n^2+8n+25<(n+5)^2 \Rightarrow$ n + 4 < $\sqrt{n^2+8n+25}$ < n + 5 $\Rightarrow$ $\left\lfloor\sqrt{n^2+8n+25}\right\rfloor$ = n + 4

n + 4 = $\frac{n^2+8}{3}$ cu soluțiile n = 4 ∈ **N** şi n = - 1 ∉ **N** .

**L:639**. **Rezolvați ecuația**: $\sqrt[3]{31x+1}=x+1$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Ridicăm la cub ambii membri ai ecuației şi obținem:

$$31x+1=(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-28x=0 \Leftrightarrow x(x^2+3x-28)=0.$$

Obținem soluțiile $x_1=0, x_2=4, x_3=-7$, care verifică ecuația din enunț.

**L:640**. **Să se determine partea fracționară a numărului** $A=\frac{7^{2018}+8^{2018}+9^{2018}}{10}$. **Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare***:

$7^{2018}=7^2\cdot\left(7^4\right)^{509}=49\cdot\left(\overline{....1}\right)^{509}=\overline{.....9}$; $\quad 8^{2018}=8^2\cdot\left(8^4\right)^{509}=64\cdot\left(\overline{....6}\right)^{509}=\overline{.....4}$;

$9^{2018}=9^2\cdot\left(9^4\right)^{509}=81\cdot\left(\overline{....1}\right)^{509}=\overline{.....1}$;

Cum ultima cifră a numărătorului este $u(7^{2018}+8^{2018}+9^{2018})=u(9+4+1)=u(14)=4$, rezultă că partea fracționară a numărului A este 0, 4.

**L:641**. **Să se rezolve sistemul de ecuații**: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{x-y}=6\\ 2x+2\sqrt{x-y}=19\end{cases}$, **unde** $x,y\in\mathbb{R}$.

**Diaconu Radu**, Sibiu

***Rezolvare***. Ultima ecuație se mai scrie $\sqrt{x-y}=\frac{19-2x}{2}$, iar prima $\sqrt{2x+y}=\frac{2x-7}{2}$. Astfel sistemul dat se poate înlocui cu echivalentul său:

$$\begin{cases}\sqrt{x-y}=\frac{19-2x}{2}\\ \sqrt{2x+y}=\frac{2x-7}{2}\end{cases}. \qquad (1)$$

Condițiile pentru existența soluțiilor reale sunt:

$$x-y\ge 0,\ 19-2x\ge 0,\ 2x+y\ge 0,\ 2x-7\ge 0. \qquad (2)$$

Raționalizând sistemul (1) , găsim sistemul:

$$\begin{cases}x-y=\frac{361-76x+4x^2}{4}\\ 2x+y=\frac{49-28x+4x^2}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-4y=361-76x+4x^2\\ 8x+4y=49-28x+4x^2\end{cases}.$$

Prin adunare, eliminând pe $y$, găsim ecuația în $x$: $\quad 4x^2-58x+205=0.$

Aceasta admite rădăcinile: $x_1=\frac{29-\sqrt{21}}{4}, x_2=\frac{29+\sqrt{21}}{4}$. Atunci:

$y_1=\frac{49-36x_1+4x_1^2}{4}=\frac{7-11\sqrt{21}}{8}$, $y_2=\frac{49-36x_2+4x_2^2}{4}=\frac{7+11\sqrt{21}}{8}$.

Perechile de numere $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ verifică toate condițiile (2), fiind soluțiile sistemului inițial. Deci:

$$S = \left\{ \left( \frac{29-\sqrt{21}}{4}, \frac{7-11\sqrt{21}}{8} \right), \left( \frac{29+\sqrt{21}}{4}, \frac{7+11\sqrt{21}}{8} \right) \right\}.$$

**L:642. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x} = 2 + \sqrt[4]{x-2}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

***Rezolvare***: Cu inegalitatea mediilor obținem

$$2 + \sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{(x-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} + \sqrt[4]{(3-x)\cdot 1\cdot 1\cdot 1} \le \frac{x-1+1+1+1+3-x+1+1+1}{4} = 2, \qquad S = \{2\}.$$

**L:643. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x + \frac{4}{x} = 2^{-x^4+7x^2+4x-18}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare***: Deoarece $x + \frac{4}{x} \ge 4$, trebuie să avem $2^{-x^4+7x^2+4x-18} \ge 2^2$, adică

$$x^4 - 7x^2 - 4x - 20 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+4x+5) \le 0,$$

care are loc numai dacă $x = 2$, care verifică ecuația.

**L:644. Un şir** $(a_n)_{n\ge 0}$ **de numere reale având** $a_0 \ne 0$ **cunoscut, verifică relația:**

$a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \cdot k \cdot a_{k-1}, \quad \forall n \ge 1.$ **Determinați formula temenului general.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** Se dau valori lui n: $n = 1 \Rightarrow a_0 = a_0$; $n = 2 \Rightarrow a_1 = -a_0 + 2a_1 \Rightarrow a_1 = a_0$;

$n = 3 \Rightarrow a_2 = a_0 - 2a_1 + 3a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$; $n = 4 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{3!}$. Se demonstrează prin inducție că

$P(n):\ a_n = \frac{a_0}{n!}, \forall n \ge 1.$

**L:645. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:**

$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \le \frac{2}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{c}}}$., **unde a, b, c; $l_a$, $l_b$, $l_c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ reprezintă notațiile consacrate în triunghi.**

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare:***. Avem pentru bisectoarea din A: $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ şi mediana din A:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2) - (b^2+c^2) + 2bc\cos A}{4} = \frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{4}.$$

Prelucrând în continuare relația medianei obținem:

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right) = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\cos^2\frac{A}{2} = (b-c)^2 + 4bc\cos^2\frac{A}{2} =$$

$$(b-c)^2 + 4bc\frac{l_a^2(b+c)^2}{4b^2c^2} = (b-c)^2 + \frac{l_a^2(b+c)^2}{bc}.$$

Din ultima formă a medianei deducem: $4m_a^2 = (b-c)^2 + \frac{l_a^2(b+c)^2}{bc} \ge \frac{(b+c)^2 l_a^2}{bc}$,

Adică $4m_a^2 \ge \frac{(b+c)^2 l_a^2}{bc} \Leftrightarrow 2m_a \ge \frac{(b+c)l_a}{\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \frac{l_a}{m_a} \le \frac{\sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}}.$

Egalitatea are loc numai dacă triunghiul este isoscel(b = c).
Scriind şi celalte relaţii analoage care prin adunare dau inegalitatea cerută.
Egalitatea în inegalitate are loc pentru triunghiul echilateral.

**L:646**. **Fie semidreptele** $(Ox,(Oy,(Oz$ **şi punctele** $A\in(Ox, B\in(Oy, C\in(Oz$ **. Dacă** $OA=x, OB=y, OC=1$ **şi** $(Ox\perp(Oy,(Oy\perp(Oz,(Oz\perp(Ox$ **, atunci să se determine** $x,y\in N^*$ **astfel încât** $m(\angle BAC)=60^0$ **. Poate fi** $\angle BAC$ **drept ?**

**Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**Rezolvare:** Cu teorema cosinusului aplicată în triunghiul $ABC$ avem

$\cos A=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc$, (1). Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile $AOB, BOC$ şi $COA$ obţinem $a^2=y^2+1, b^2=x^2+1, c^2=x^2+y^2$ care, înlocuite în (1) conduc succesiv la

$2x^2=\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow 4x^4=x^4+x^2y^2+x^2+y^2\Leftrightarrow y^2=x^2\left(3-\dfrac{4}{x^2+1}\right)\in N\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+1|4\Leftrightarrow x^2+1=1$ sau $x^2+1=2$ sau $x^2+1=4\Leftrightarrow x\in\{0,1,\sqrt{3}\}$. Convine doar $x=1\Rightarrow y=1$.

Dacă $AB\perp AC$, atunci $a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow y^2+1=x^2+1+x^2+y^2\Leftrightarrow x=0$, imposibil !

**L:647**. **Calculaţi:** $\sqrt{3}\left(\cos 5^0\right)^2+(\sin 10^0)^2+(\sin 20^2)^2$ . **Marian Ciuperceanu**, Craiova

***Rezolvare:***

$A=\sqrt{3}\left(\cos 5^0\right)^2+(\sin 10^0)^2+(\sin 20^2)^2=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1+\cos 10^0}{2}+\dfrac{1-\cos 20^0}{2}+\dfrac{1-\cos 40^0}{2}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^0+1-\dfrac{\cos 20^0+\cos 40^0}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$, deoarece

$\dfrac{\cos 20^0+\cos 40^0}{2}=2\cdot\dfrac{\cos 30^0\cdot\cos 10^0}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^0$. S-au folosit formulele:

$\cos a+\cos b=2\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}$. $\left(\cos x\right)^2=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\left(\sin x\right)^2=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

**L:648**. **În triunghiul** $ABC$ **,** $m(\hat{A})=75^\circ$. **Arătaţi că:** $\dfrac{S}{m_a^{\ 2}}<\dfrac{4}{5}$. **Diaconu Radu,** Sibiu

***Rezolvare.*** $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Folosind formulele pentru arie, mediana corespunzătoare laturii a şi teorema cosinusului avem:

$S=\dfrac{bc\sin\hat{A}}{2}$; $m_a^{\ 2}=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$; $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$, putem scrie:

$\dfrac{S}{m_a^{\ 2}}=\dfrac{2bc\sin\hat{A}}{2(b^2+c^2)-a^2}=\dfrac{bc(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4(b^2+c^2)-2a^2}=\dfrac{bc(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2b^2+2c^2+bc(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$. Inegalitatea cerută devine:

$\dfrac{bc(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2b^2+2c^2+bc(\sqrt{6}-\sqrt{2})}<\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 8[(b-c)^2+2bc]+bc(4\sqrt{6}-4\sqrt{2})>bc(5\sqrt{6}+5\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow 8(b-c)^2+bc(16-\sqrt{6}-9\sqrt{2})>0$, adevărată deoarece

$\sqrt{6}<2.45;\ \sqrt{2}<1.42;\ 16-\sqrt{6}-9\sqrt{2}>16-2.45-9\cdot 1.42=0.77>0.$

**L:649**. **Fie triunghiul** $ABC$ **dreptunghic în A cu** $B=\frac{\pi}{16}$ **şi** $AB=1$. **Să se arate că** $r<0.09$, **unde** $r$ **este raza cercului înscris în triunghiul** $ABC$ . **Diaconu Radu,** Sibiu

***Rezolvare:***

***Rezolvare.*** Raza cercului înscris în triunghiul $ABC$ se exprimă cu formula $r=\frac{S[ABC]}{p[ABC]}$, unde $S[ABC]$ este aria triunghiului $ABC$, iar $p[ABC]=\frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului $ABC$ de laturi $BC=a, AC=b, AB=c.$ Avem

$a=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}}, b=tg\frac{\pi}{16}, c=1.$ Atunci $r=\frac{S[ABC]}{p[ABC]}=\frac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{bc}{a+b+c}=\frac{\sin\frac{\pi}{16}}{1+\sin\frac{\pi}{16}+\cos\frac{\pi}{16}}.$ Dar

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \quad \sin\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ \cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\end{cases}$$

Prin calcul se arată că : $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<0.09$.

**L:650**. **Într-un triunghi de laturi a.b.c notăm cu** $h_a$ **şi** $w_a$ **lungimile înălțimii , respectiv a bisectoarei interioare aferente laturii a ,etc , celelalte notații fiind cele uzuale . Demonstrați că :**

$\frac{w_a}{h_a}\cdot\frac{w_b}{h_b}\cdot\frac{w_c}{h_c}\ge\frac{(4R+r)^2}{3p^2}$. **Vasile Jiglău** , Arad

***Rezolvare***: Cu formula $w_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ se verifică imediat identitatea

$\frac{R}{2r}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\cdot\frac{w_a}{h_a}\cdot\frac{w_b}{h_b}\cdot\frac{w_c}{h_c}$ . (1) de unde : $\frac{w_a}{h_a}\cdot\frac{w_b}{h_b}\cdot\frac{w_c}{h_c}=\frac{R}{r}\cdot\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ .

astfel că inegalitatea din enunț devine echivalentă cu :

$\frac{R}{r}\cdot\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{(4R+r)^2}{3p^2}$ . (2)

Cu substituțiile $x=p-a.y=p-b, z=p-c$ se deduc imediat identitățile

$\prod(x+y)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)=\prod[(\sum x)+x]=2(\sum x)^3+(\sum x)(\sum xy)+xyz$

$\frac{R}{r}=\frac{abcp}{4S^2}=\frac{\prod(x+y)}{4xyz}$.

$4R+r=\frac{\prod(x+y)}{\sqrt{xyz\sum x}}+\frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{\sum x}}=\frac{(\sum x)(\sum xy)}{\sqrt{xyz\sum x}}\Rightarrow\frac{4R+r}{p}=\frac{(\sum x)(\sum xy)}{\sqrt{xyz(\sum x)^3}}$

Ținând cont de (2) , inegalitatea din enunț devine echivalentă cu :

$$\frac{R}{r}\cdot\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{(4R+r)^2}{3p^2}\Leftrightarrow\frac{\prod(x+y)}{4xyz}\cdot\frac{4\prod(x+y)}{\prod(2x+y+z)}\geq\frac{(\sum x)^2(\sum xy)^2}{3xyz(\sum x)^3}$$

$$\Leftrightarrow 3(\sum x)\prod(x+y)^2\geq(\sum xy)^2\prod(2x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\sum x^5y^2+\sum x^5z^2+2\sum x^5yz+2\sum x^4y^3+2\sum x^4z^3+2\sum x^4y^2z+2\sum x^4yz^2\geq 2\sum x^3y^3z+10\sum x^3y^2z^2$$

inegalitate ce rezultă imediat din aplicarea inegalității mediilor urmată de aplicarea lemei lui Muirhead , conform cărora avem :

$$\sum x^5y^2+\sum x^5z^2\geq 2\sum x^5yz\geq 2\sum x^3y^3z;$$

$$2\sum x^5yz\geq 2\sum x^3y^2z^2;2\sum x^4y^3+2\sum x^3y^4\geq 4\sum x^3y^2z^2;$$

$$2\sum x^4y^2z+2\sum x^4yz^2\geq 4\sum x^3y^2z^2$$

Observație : Din identitatea (1) rezultă imediat că $\frac{R}{r}\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc}$ (3)

inegalitate dată în anul 1985 la Olimpiada de Matematică – etapa județeană . Având în vedere că $\frac{4R+r}{p\sqrt{3}}=\frac{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}{4\sqrt{3}S}\geq 1$ ( inegalitatea lui Finsler-Hadwiger) ,

rezultă că problema propusă arată că (3) poate fi îmbunătățită la :

$$\frac{R}{2r}\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\cdot\left(\frac{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}{4\sqrt{3}S}\right)^2$$

**L:651**. **Să se demonstreze egalitatea:** $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{2\pi}{11}-4\cos\frac{4\pi}{11}=2$ .

**Vasile Mircea Popa**, Sibiu

***Rezolvare***: Utilizăm relația: $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos\frac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$ (1)

care se demonstrează utilizând numerele complexe sau prin inducție matematică.

În cazul particular n = 5, $x=\frac{\pi}{11}$, obținem:

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\cos\frac{6\pi}{22}\cdot\sin\frac{5\pi}{22}\cdot\operatorname{cosec}\frac{\pi}{22}$$ , sau:

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{22}-\frac{1}{2}\qquad(2)$$

De asemenea, utilizăm şi egalitatea: $\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}$ .

Pentru a demonstra această egalitate, notăm:

$$E=\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}.$$

Calculând $E\cdot\sin\frac{\pi}{11}$ şi transformând produsele care apar în sume, se obține $E=\frac{1}{2}$ .

Scăzând membru cu membru relațiile (2) şi (3) obținem egalitatea cerută în enunțul problemei.

# ▪ Clasa a X-a

**L:652**. **Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, astfel încât** $a^2+b^2+c^2=\sqrt{3}+3$, **să se arate că** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\langle\frac{2\sqrt[4]{2}}{abc}$.

**Radu Diaconu**, Sibiu

***Rezolvare:*** Din $(a-b+c)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2-2(ab-ac+bc)\ge 0\Rightarrow 2(ab-ac+bc)\le\sqrt{3}+3$. De aici, $ab-ac+bc\le\frac{\sqrt{3}+3}{2}$. Mai rămâne de arătat că $\frac{\sqrt{3}+3}{2}\le 2\sqrt[4]{2}\,\big|()^2\Rightarrow$

$12+6\sqrt{3}\langle 16\sqrt{2}\,\big|:2\Rightarrow 6+3\sqrt{2}\langle 8\sqrt{2}\,\big|()^2\Rightarrow 36\sqrt{3}\langle 65$, adevărat.

**L:653**. **Fie** $z\in\mathbb{Q},\ |z|\le\frac{5}{6}$. **Să se arate că**

$$\left|(1+i)z^3+z^2+(1-i)z+\frac{3}{20}i\right|\langle\ |1+z|+\frac{36}{25}\cdot|1-z^2|+\frac{36}{25}\cdot|1-z^3|$$

**Emil C. Popa, Radu Diaconu**, Sibiu

***Rezolvare:***

$\left|(1+i)z^3+z^2+(1-i)z+\frac{3}{20}i\right|\le\sqrt{2}\cdot\frac{125}{216}+\frac{25}{36}+\frac{5\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{20}=\frac{1525\sqrt{2}+912}{1080}$. Pe de altă parte

$2=|1-z^2+1+z^2|\le|1-z^2|+|1-z^3+z^3+z^2|\le|1-z^2|+|1-z^3|+|1-z^2|+|z^2|\cdot|1+z|\le$

$\le|1-z^2|+|1-z^3|+\frac{25}{36}\cdot|1+z|$. Înmulțind cu $\frac{36}{25}$ rezultă $\frac{72}{25}\le|1+z|+\frac{36}{25}\cdot|1-z^2|+\frac{36}{25}\cdot|1-z^3|$.

Prin calcul se arată că $\frac{1525\sqrt{2}+912}{1080}\langle\frac{72}{25}$.

**L:654**. **Să se arate că: a)** $\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+.....+\frac{1}{C_n^n}\ge\frac{(n+1)^2}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{N}$;

b) $\frac{1}{\left(C_n^0\right)^2}+\frac{1}{\left(C_n^1\right)^2}+.....+\frac{1}{\left(C_n^0\right)^2}\ge\frac{(n+1)^2}{C_{2n}^n},\ \forall n\in\mathbb{N}$;

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

a) Utilizând inegalitatea mediilor $\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\ge\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+....+\frac{a}{a_n}},\ \forall a_i\rangle 0,\ i=\overline{1,n}$ pentru numerele

$a_1=C_n^0;\ a_2=C_n^1;\ .....a_n=C_n^{n-1};\ a_{n+1}=C_n^n$ şi ştiind că

$a_1+a_2+....+a_{n+1}=C_n^0+C_n^1+C_n^2+.....C_n^n=2^n$, rezultă inegalitatea cerută.

b) Analog, se aplică inegalitatea mediilor pentru $a_1=\left(C_n^0\right)^2;\ a_2=\left(C_n^1\right)^2;\ .....a_n=\left(C_n^{n-1}\right)^2;\ a_{n+1}=\left(C_n^n\right)^2$

ştiind că $a_1+a_2+....+a_{n+1}=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^{n-1}\right)^2+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

Altfel, se poate utiliza inegalitatea lui Bergström: $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+.....+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+.....+a_n)^2}{b_1+b_2+....+b_n}$.

**L:655**. **Să se rezolve ecuația :** $2^x - x\cdot 2^x = x+1$. **Dârstaru Gheorghe**, Buzău

***Rezolvare:*** $2^x - x\cdot 2^x - x - 1 = 0$ Notăm $2^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - xt - x - 1 = 0$ Rezolvăm ecuația în t şi obținem $t_1 = x+1$ şi $t_2 = -1 < 0$

Pentru t = x + 1 ⇒ecuația $2^x = x + 1$ are cel mult două soluții deoarece $2^x$ este o funcție strict convexă , iar x + 1este o funcție liniară , soluțiile sunt x = 0 şi x = 1. Doar x = 0 verifică

**L:656**. **Să se determine** $n \in \mathbb{N}^*$ **astfel încât** $\sin x + tgx = \dfrac{n\cdot tg\dfrac{x}{2}}{1 - tg^n\dfrac{x}{2}}, -\forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:***

Pentru $x = \dfrac{\pi}{3} \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ egalitatea din enunț devine $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \dfrac{\dfrac{n\sqrt{3}}{3}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}^n}{3^n}} \Leftrightarrow 3^{n+1} - 3\sqrt{3}^n = 2n\cdot 3^{n-1}$

$3^{n-1}(3^2 - 2n) = 3\sqrt{3}^n \Rightarrow (9-2n)3^{n-2} = \sqrt{3}^n$. (*) Din $9 - 2n \rangle 0 \Rightarrow n \langle \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow n \in \{1;2;3;4\}$. Se constată că doar n=4 verifică (*).

**L:657**. **Fie** $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2017} \in [2;3]$, **demonstrați că:**

$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + ... + \log_{a_{2016}}(5a_{2017} - 6) + \log_{a_{2017}}(5a_1 - 6) \ge 4034$.

**Gobej Adrian** , Curtea de Argeş

***Rezolvare:*** Din $a_k \in [2;3], \forall k \in \overline{1,2017} \Rightarrow (a_k - 2)(a_k - 3) \le 0, \forall k \in \overline{1,2017}$.

Ultima inegalitate se scrie $5a_k - 6 \ge a_k{}^2, \forall k \in \overline{1,2017}$ şi prin logaritmare obținem:

$\log_{a_1}(5a_2 - 6) \ge \log_{a_1} a_2^2$, $\log_{a_2}(5a_3 - 6) \ge \log_{a_2} a_3^2$, ……..., $\log_{a_{2016}}(5a_{2017} - 6) \ge \log_{a_{2016}} a_{2017}^2$

$\log_{a_{2017}}(5a_1 - 6) \ge \log_{a_{2017}} a_1^2$. Prin adunare, obținem:

$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + ... + \log_{a_{2016}}(5a_{2017} - 6) + \log_{a_{2017}}(5a_1 - 6) \ge$

$\ge 2(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + ... + \log_{a_{2017}} a_1) \ge$

$\ge 2\cdot(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + ... + \log_{a_{2017}} a_1) \ge 2\cdot 2017\cdot \sqrt[2017]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 ... \cdot \log_{a_{2017}} a_1} = 4034$.

**L:658**. **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $\dfrac{x}{x^2+1} = \log_4(x^n - nx + n + 1)$, **unde** $n \ge 1, n \in \mathbb{N}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare:** Cu inegalitatea MA-MG obținem

$\dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$ şi $x^n + n - 1 = x^n + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-1} \ge n\cdot\sqrt[n]{x^n\cdot 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1} = nx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^n - nx + n + 1 \ge 2 \Leftrightarrow \log_4(x^n - nx + n + 1) \ge \dfrac{1}{2}$. Rezultă că $x = 1$, este unica soluție

**L:659**. **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $\log_3 \dfrac{x}{x^2+2} = x^4 - 5x^2 + 3$, $x > 0$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

**Rezolvare:** Dacă $x \in (1,2)$, atunci $x^4 - 5x^2 + 3 < -1$ şi $\dfrac{x}{x^2+2} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x}{x^2+2} > -1$;

Dacă $x \in (0,1) \cup (2,\infty)$, atunci $x^4 - 5x^2 + 3 > -1$ şi

$$\frac{x}{x^2+2}<\frac{1}{3}\Leftrightarrow \log_3\frac{x}{x^2+2}<-1. \quad S=\{1,2\}$$

**L:660**. **Să se rezolve ecuația** $C_{x+3}^{x^2-3x+6}+C_{3x}^{x^2-2x+4}=37.$ **Adrian Stan**, Buzău

***Rezolvare***:

Se pun condițiile de existență $x+3\ge x^2-3x+6\ge 0$ şi $3x\ge x^2-2x+4\ge 0$ de unde $x\in[1;3]$, $x\in[1;4]$ şi cum $x\in\mathbb{N}$ se obține $x\in\{1;2;3\}$. Dând valori lui x, singura soluție este 3.

**L:661**. **Să se rezolve ecuația:** $\log_{ax}^{a}+\log_{ax}^{a}\log_{ax^2}^{a}+...+\log_{ax^n}^{a}\log_{ax^{n+1}}^{a}=\frac{n+1}{n+2}, a>0, a\ne 1, n\in N^*.$

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

***Rezolvare :*** Ecuația se rescrie:

$$\frac{1}{\log_a^{ax}}+\frac{1}{\log_a^{ax}\log_a^{ax^2}}+\frac{1}{\log_a^{ax^2}\log_a^{ax^3}}+...+\frac{1}{\log_a^{ax^n}\log_a^{ax^{n+1}}}=\frac{n+1}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\log_a^x+1}+\frac{1}{(\log_a^x+1)(2\log_a^x+1)}+\frac{1}{(2\log_a^x+1)(3\log_a^x+1)}+...+\frac{1}{(n\log_a^x+1)[(n+1)\log_a^x+1]}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Notăm $\log_a^x=y\ne 0$($x=1$ nu este soluție a ecuației) şi ecuația devine:

$$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y+1)(2y+1)}+\frac{1}{(2y+1)(3y+1)}+...+\frac{1}{(ny+1)[(n+1)y+1]}=\frac{n+1}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{y+1}+\frac{y}{(y+1)(2y+1)}+\frac{y}{(2y+1)(3y+1)}+...+\frac{y}{(ny+1)[(n+1)y+1]}=\frac{(n+1)y}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$1-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+1}-\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{2y+1}-\frac{1}{3y+1}+...+\frac{1}{ny+1}-\frac{1}{(n+1)y+1}=\frac{(n+1)y}{n+2}\Leftrightarrow$$

$$1-\frac{1}{(n+1)y+1}=\frac{(n+1)y}{n+2}\Leftrightarrow\frac{(n+1)y}{(n+1)y+1}=\frac{(n+1)y}{n+2}\Rightarrow(n+1)y+1=n+2\Leftrightarrow y=1\Rightarrow$$

$\log_a^x=1\Leftrightarrow x=a.$ Ecuația admite soluția x =a.

# ▪ Clasa a XI-a

**L:662**. **Se consideră funcția** $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\frac{1}{x}$ **. Definim distanța de la un punct** $A$ **la graficul funcției** $f$ **notat cu** $G_f$ **, astfel:** $d(A,G_f)=\min\limits_{M\in G_f}\{AM\}$**. Calculați această distanță dacă** $A(-1,0)$**.**

**Constantin Rusu, Râmnicu Sărat**

***Rezolvare***: Fie $M(x,f(x))$, atunci $AM=\sqrt{(-1-x)^2+f^2(x)}$. Considerăm funcția $g:(0,\infty)\to R$, $g(x)=\sqrt{(-1-x)^2+\frac{1}{x^2}}$ pentru care avem $g'(x)=\frac{x^2+x-1}{\sqrt{(1+x)^2x^2+1}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

$g'(x)<0,\forall x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\Rightarrow g$ este descrescătoare; $g'(x)>0,\forall x\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)\Rightarrow g$ este crescătoare. Deci, funcția $g$ are un minim $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}(\sqrt{5}+1\right)$ şi $d(A,G_f)=\min\limits_{x\in(0,\infty)}g(x)=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

**L:663**. **a) Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(2x^2+x+1)-ax$ este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Pentru $a=-\frac{9}{4}$, ştiind că $2.3978<\ln 11<2.3979$, să se afle valoarea lui $\frac{1}{4}\cdot f(2)$ cu patru zecimale exacte.**

**b) Să se discute numărul de soluții reale ale ecuației $e^x=a\cdot\left(2x^2+x+1\right)$ după valorile parametrului real $a$. Pentru $a=\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}$ să se arate că ecuația are o rădăcină reală în intervalul $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.**

**Radu Diaconu** , Sibiu

***Rezolvare.*** a) Funcția $f$ este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Calculăm

$$f'(x)=\left[\ln\left(2x^2+x+1\right)-ax\right]'=\frac{4x+1}{2x^2+x+1}-a=\frac{-2a\cdot x^2-(a-4)\cdot x-(a-1)}{2x^2+x+1}.$$

Rezultă condiția $-2a\cdot x^2-(a-4)\cdot x-(a-1)\ge 0$ pentru orice $x\in R$. Pentru $a=0$ această condiție nu este îndeplinită. Pentru $a\ne 0$ se impun condițiile:

$$\begin{cases}-2a>0,\\ \Delta=a^2-8a+16-8a\cdot(a-1)\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in(-\infty,0),\\ -7a^2+16\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(-\infty,0),\\ a\in\left(-\infty,-\frac{4}{\sqrt{7}}\right]\cup\left[\frac{4}{\sqrt{7}},+\infty\right).\end{cases}$$

Rezultă $a\in\left(-\infty,-\frac{4}{\sqrt{7}}\right]$.

Pentru $a=-\frac{9}{4}$ obținem $\frac{1}{4}\cdot f(2)=\frac{1}{4}\cdot(\ln 11+4.5)$. Rezultă $1.72445<\frac{1}{4}\cdot f(2)<1.724475$.

Valoarea lui $\frac{1}{4}\cdot f(2)$ cu patru zecimale exacte este $1.7244$.

b) Folosim şirul lui Rolle. Se observă că $2x^2+x+1>0$. Atunci ecuația se mai scrie: $\frac{e^x}{2x^2+x+1}=a$. Fie funcția $f:R\to R, f(x)=\frac{e^x}{2x^2+x+1}-a$. Calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-a$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{2x^2+x+1}-a\right)'=\frac{e^x\cdot\left(2x^2+x+1-4x-1\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(2x^2-3x\right)}{\left(2x^2+x+1\right)^2}.$$

$f'(x)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{3}{2}$. Atunci $f(0)=1-a, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{7}-a\approx 0.64-a$.

Tabloul asociat este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-a$ | $1-a$ | $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{7}-a$ | $+\infty$ |

Mai departe se discută după valorile lui a.

Fie $g:\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\to R, g(x)=e^x-\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}\cdot\left(2x^2+x+1\right)$, continuă. Cum $g(-1)\cdot g\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, rezultă că există $x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ astfel încât $g(x_0)=0$. Rezultă ecuația $e^x=\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}\cdot\left(2x^2+x+1\right)$ are o rădăcină reală în intervalul $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

**L:664**. **Arătați că dacă** $A, B,$ **şi** $C$ **sunt unghiurile unui triunghi ascuțitunghic, atunci:**

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq 6.$$

**Titu Zvonaru,** Comăneşti, şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare*** **:** Fie $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$, $f(x)=\frac{1}{\cos x}$. Avem:

$$f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x};\ f''(x)=\frac{\cos^3 x-\sin x(-2\cos x\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}>0.$$

Deci $f$ este o funcție convexă şi aplicând inegalitatea lui Jensen obținem:

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right),\text{ adică:}$$

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{3}{\cos\frac{\pi}{3}}=6.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $A=B=C$, adică $\Delta ABC$ este echilateral.

**L:665**. **Calculați limita şirului** $(a_n)_{n\geq 0}$ **cu** $a_0=a>0$ **şi** $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$ **pentru orice număr natural n.**

**Dârstaru Gheorghe**, Buzău

**Rezolvare:** $a_n=\frac{ax_n+y_n}{az_n+t_n}$ unde $x_n$, $y_n$, $z_n$ şi $t_n$ sunt elementele matricei $A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ z_n & t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}^n$

Ecuația caracteristică a matricei A este $\lambda^2-3\lambda+2=0$ cu soluțiile 1 şi 2, deci $A^n=1^nB+2^nC$, unde B şi C $\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, iar ele se determină pentru n= 1 şi n = 2$\Rightarrow\begin{cases}B+2C=A\\ B+4C=A^2\end{cases}$ de unde $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi

$C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ de unde $A^n=B+2^nC$, $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1+2^n & 2^n\end{pmatrix}$ adică

$a_n=\frac{a}{(2^n-1)a+2^n}$. Deci $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=0$

**L:666**. **Fie** $(a_n)_{n\geq 1}$ **un şir de numere reale strict pozitive cu** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=r\in\mathbb{R}_+^*, u,v\in\mathbb{R}$ **cu** $u+v=1$ **Dacă notăm** $a_n!=a_1a_2...a_n$, $G_n=(a_n!)^{\frac{1}{n}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, **atunci să se calculeze:**

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}-n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\right).$$

**D.M. Bătinețu – Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**Rezolvare:** Avem:

**(1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=r$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a_n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)=\frac{r}{e}$;unde $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{G_n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{G_n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{e_n}\right)\overset{(2)}{=}\frac{r}{e^2}$;

$$(4)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{G_n!}}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\overset{(3)}{=}\frac{r}{e^2}\cdot\frac{e^2}{r}\cdot 1=1;$$

$$(5)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}!}{G_n!}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}\right)\overset{(2)}{\underset{(3)}{=}}\frac{r}{e}\cdot\frac{e^2}{r}=e.$$

$$B_n=\left((n+1)^u\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}-n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\right)=n^u\sqrt[n]{(G_n!)^v}\,(w_n-1)=\left(\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}\right)^v\cdot\frac{w_n-1}{\ln w_n}\cdot\ln w_n^n,\forall n\geq 2,\text{unde}$$

$$w_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^u\frac{\sqrt[n+1]{(G_{n+1}!)^v}}{\sqrt[n]{(G_n!)^v}}.\ \text{Deci, }\lim_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{G_n!}}{n}\right)^v\cdot 1\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}w_n^n\right)\overset{(3)}{=}$$

$$=\left(\frac{r}{e^2}\right)^v\cdot\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{un}\cdot\left(\frac{\sqrt[n+1]{G_{n+1}!}}{\sqrt[n]{G_n!}}\right)^{nv}\right)\overset{(5)}{=}\frac{r}{e^2}\cdot\ln\left(e^ue^v\right)==\left(\frac{r}{e^2}\right)^v\cdot\ln\left(e^{u+v}\right)=\left(\frac{r}{e^2}\right)^v.$$

**L:667. a) Stabiliți domeniul maxim de definiție şi semnul funcției** $f(x)=(2-x)\ln(2-x)-(1+x)\ln(1+x)$**.**

**b) Stabiliți monotonia şi extremele funcției** $g:\left(\frac{1}{e},e^2\right)\to\mathbb{R},\quad g(x)=\ln(1+\ln x)\cdot\ln(2-\ln x)$ **.**

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

***Rezolvare:*** a) $D_f=(-1;2)$; Cun funcția ln x este strict crescătoare avem:

$x\in(-1;0]$. Rezultă $(2-x)\ln(2-x)\rangle 0\geq(1+x)\ln(1+x)\Rightarrow\ f(x)\rangle 0$;

$x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Rezultă $0\langle(1+x)\ln(1+x)\langle(2-x)\ln(1+x)\langle(2-x)\ln(2-x)\Rightarrow\ f(x)\rangle 0$;

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=0;$

$x\in\left(\frac{1}{2};1\right]$. $\quad 0\leq(2-x)\ln(2-x)\langle(1+x)\ln(2-x)\langle(1+x)\ln(1+x)\Rightarrow\ f(x)\langle 0.$

b) Funcția g(x) se mai poate scrie ca $g(x)=(h\circ\ln)x$, unde $h:(-1;2)\to\mathbb{R},\ h(y)=\ln(1+y)\ln(2-y)$ care este derivabilă cu $h^I(y)=\frac{f(y)}{(x+y)(2-y)}$, unde f este funcția de la a) . Semnul lui $h^I(y)$ este dat de semnul funcției f(y). ( vezi punctul a)) .

Atunci, funcția $g^I(x)$ are semnul pozitiv pe $\left(\frac{1}{e};\sqrt{e}\right)$, deci g (x) este crescătoare şi negativ pe $\left(\sqrt{e};e^2\right)$, deci g este descrescătoare.

**L:668. Dacă** $A,B\in M_n(C)$ **astfel încât** $ABA=BA+A$**, atunci:** $AB^kA=(BA)^2(BA-I_n)^{k-2},\forall k\in N,k\geq 2.$

**Gheorghe Ghiță, Buzău**

***Rezolvare:*** Pentru k = 2, avem:

$AB^2A=ABBA=AB(BA)=AB(ABA-A)=ABABA-ABA=(ABA)(BA)-ABA=$

$=(BA+A)BA-ABA=(BA)^2=(BA)^2(BA-I_n)^0.$

Presupunând egalitatea adevărată pentru $k\in N.k\geq 2$, avem:

$AB^{k+1}A=AB^kBA=AB^k(ABA-A)=AB^kABA-AB^kA=AB^kA(BA-I_n)==$

$(BA)^2(BA-I_n)^{k-2}(BA-I_n)=(BA)^2(BA-I_n)^{k-1}$, şi egalitatea este demonstrată.

**L:669**. **Să se afle numărul real $a$ astfel încât dreptele** $\begin{cases} ax+y-1=0 \\ x-ay+1=0 \\ x+3y-a=0 \end{cases}$ **să fie concurente.**

**Tănase Gabriel**, Buzău

***Rezolvare*:** Trebuie să existe un punct ale cărui coordonate x şi y să verifice cele trei ecuații, deci trebuie ca sistemul format cu cele trei ecuații să fie compatibil.

Putem lua ca determinant principal $\delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -\left(a^2+1\right) \neq 0$ deoarece $a \in \mathbb{R}$. Anulând determinantul caracteristic obținem: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = -a^3+3a+2 = -(a-2)(a+1)^2$.

$-(a-2)(a+1)^2 = 0$ rezultă $a=2$ sau $a=-1$.

Pentru $a=2$ punctul de concurență este $A\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$ iar pentru $a=-1$ punctul de concurență este $A(-1,0)$.

**L:670**. **Dacă $a,b,c$ sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, atunci volumul său se poate calcula cu formula** $V = \frac{1}{8}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & 1 \end{vmatrix}$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

**Rezolvare:** Adunăm prima linie la toate celelalte linii, după care dezvoltăm după prima coloană::

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 0 & 2b & c+x & 1+y \\ 0 & 0 & 2c & 1+z \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ 0 & 2b & c+x & 1+y \\ 0 & 0 & 2c & 1+z \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 2b & c+x & 1+y \\ 0 & 2c & z+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8abc$$

Deci, $V = \frac{1}{8}\cdot 8abc = abc$, Q.E.D.

# ▪ Clasa a XII-a

**L:671**. **Aflați rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 - 63X^2 + 756X - 1728$ ştiind că $x_2$ este media geometrică a celorlalte două rădăcini $x_1$ şi $x_3$.**

**Nicolae Ivăşchescu,** Canada

***Rezolvare:*** Scriem relațiile lui Vieté

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 63 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 756 \\ x_1x_2x_3 = 1728 \end{cases}$, unde dacă ținem cont de $x_2^2 = x_1x_3$ obținem $x_2^3 = 1728$,

de unde $x_2 = \sqrt[3]{1728} = 12$. Găsim apoi câtul împărțirii polinomului $P(X)$ cu binomul $X-12$, adică $C(X) = X^2 - 51X + 144$. Deci, $P(X) = (X-12)(X^2-51X+144)$.

Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = 3, x_2 = 12, x_3 = 48$.

**L:672**. **Să se rezolve în $\mathbb{R}$, ecuația:**

$$x^{4034}+x^{4032}+x^{4030}+....+x^{2020}+x^{2018}-2018x^{2017}+x^{2016}+x^{2014}+....+x^4+x^2+1=0.$$

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**Rezolvare:** $x\le 0$ nu poate fi soluție a ecuației deoarece $-2018x^{2017}\ge 0$ şi tot membrul stâng este strict pozitiv. Fie $x\rangle 0$. Ecuația este una reciprocă şi se împarte cu $x^{2017}$. Atunci, ecuația dată devine:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+.....+\left(x^{2015}+\frac{1}{x^{2015}}\right)+\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)-2018=0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{1008}\left(x^{2k+1}+\frac{1}{x^{2k+1}}-2\right)=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{1008}\frac{(x^{2k+1}-1)^2}{x^{2k+1}}=0\Rightarrow\ (x-1)^2=(x^3-1)^2=...=(x^{2017}-1)^2=0,$$ aşadar, 1 este rădăcină dublă.

**L:673**. **Să se calculeze:** $$I=\int_2^3\frac{2x^5-19x^4+68x^3-125x^2+131x-81}{(x^2-x+2)\cdot(2x^2-9x+11)}\cdot\ln(x-1)dx.$$

**Radu Diaconu,** Sibiu

**Rezolvare**: Observăm că:

$$\frac{2x^5-19x^4+68x^3-125x^2+131x-81}{(x^2-x+2)\cdot(2x^2-9x+11)}=x-4+\frac{1}{x^2-x+2}-\frac{2}{2x^2-9x+11}.$$ Atunci,

$$I=\int_2^3(x-4)\cdot\ln(x-1)dx+\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-x+2}dx-2\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{2x^2-9x+11}dx=I_1+I_2-2I_3.$$

Prima integrală se calculează cu integrarea prin părți, utilizând apoi substituția $x-1=y\Rightarrow dx=dy$.Astfel,

$$I_1=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(y-3)^2}{y}dy=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^2\left(y-6+\frac{9}{y}\right)dy=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-6y+9\cdot\ln y\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}-4\ln 2.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=\frac{t+1}{t-1}\Rightarrow dx=-\frac{2}{(t-1)^2}dt$ ,integrala $I_2$ se scrie succesiv:

$$I_2=\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-x+2}dx=\int_3^2\frac{\ln\left(\frac{t+1}{t-1}-1\right)}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2-\frac{t+1}{t-1}+2}\cdot\frac{-2}{(t-1)^2}dt=\int_2^3\frac{\ln\frac{2}{t-1}}{\frac{2(t^2-t+2)}{(t-1)^2}}\cdot\frac{2}{(t-1)^2}dt=$$

$$=\int_2^3\frac{\ln 2-\ln(t-1)}{t^2-t+2}dt=\ln 2\int_2^3\frac{dx}{x^2-x+2}-\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x^2-x+2}dx=\ln 2\int_2^3\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}-I_2.$$

$$I_2=\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\Big|_2^3=\frac{\ln 2}{\sqrt{7}}\cdot\left(arctg\frac{5}{\sqrt{7}}-arctg\frac{3}{\sqrt{7}}\right)=\frac{\ln 2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\frac{\sqrt{7}}{11}.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=y+2\Rightarrow dx=dy$ şi integrala $I_3$ devine:

$$I_3=\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{2x^2-9x+11}dx=\int_0^1\frac{\ln(y+1)}{2y^2+8y+8-9y-18+11}dy=\int_0^1\frac{\ln(y+1)}{2y^2-y+1}dy=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{2x^2-x+1}dx.$$

Cu substituția $x=\frac{1-u}{1+u}\Rightarrow dx=-\frac{2}{(1+u)^2}du$ şi integrala $I_3$ se scrie succesiv:

$$I_3=\int_1^0\frac{\ln\left(\frac{1-u}{1+u}+1\right)}{2\cdot\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2-\frac{1-u}{1+u}+1}\cdot\frac{-2}{(1+u)^2}du=\int_0^1\frac{\ln\frac{2}{1+u}}{\frac{2-4u+2u^2-1+u^2+u^2+2u+1}{(1+u)^2}}\cdot\frac{2}{(1+u)^2}du,$$ etc.

**L:674**. **Să se calculeze** $\int_0^4 \frac{arctgx}{4x^2-4x+3}dx.$ **Radu Diaconu**, Sibiu

***Rezolvare.*** Cu schimbarea de variabilă $x=\frac{4-t}{1+4t} \Rightarrow dx=-\frac{17}{(1+4t)^2}dt$ şi integrala devine

$$I=\int_0^4 \frac{arctgx}{4x^2-4x+3}dx=\int_4^0 \frac{arctg\frac{4-t}{1+4t}}{4\cdot\frac{(4-t)^2}{(1+4t)^2}-4\cdot\frac{4-t}{1+4t}+3}\cdot\frac{-17}{(1+4t)^2}dt=\int_0^4 \frac{arctg4-arctgx}{4x^2-4x+3}dx,$$

de unde rezultă

$$I=\frac{arctg4}{4}\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{4}}-\int_0^4 \frac{arctgx}{4x^2-4x+3}dx \Rightarrow I=\frac{arctg4}{8}\cdot\int_0^4 \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{4}}.$$

Rezultă $I=\frac{arctg4}{8}\cdot\int_0^4 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{arctg4}{4\sqrt{2}}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big|_0^4=\frac{arctg4}{4\sqrt{2}}\cdot\left[arctg\frac{7}{\sqrt{2}}+arctg\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

**L:675**. **Să se arate că:** $3<2e^{\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2x^2+1}dx}<4$

**Emil C. Popa, Radu Diaconu,** Sibiu

**Rezolvare.** Folosim inegalitățile $e^t \ge t+1, \forall t\in R$ şi $x^2\le x, \forall x\in[0,1]$ şi obținem:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2x^2+1}dx>\int_0^1 \frac{-\frac{x}{2}+1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{-x+2}{2x+1}dx=\frac{5}{8}\cdot\ln 3-\frac{1}{4}>\frac{3\ln 3}{8}=\ln 3^{\frac{3}{8}}>\ln\frac{3}{2}.$$

Apoi, folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz şi inegalitatea $arctgx\le x, \forall x\ge 0$, găsim:

$$\left(\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2x^2+1}dx\right)^2\le\int_0^1 e^{-x}dx\cdot\int_0^1 \frac{dx}{(2x^2+1)^2}\le\int_0^1 \frac{dx}{x+1}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{(2x^2+1)^2}=\ln 2\cdot\int_0^1 \frac{dx}{(2x^2+1)^2}.$$ Dar

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arctg\sqrt{2}\cdot x\Big|_0^1+\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arctg\sqrt{2}+\frac{x}{4x^2+2}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot arctg\sqrt{2}+\frac{1}{6}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$ Deci

$$\left(\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2x^2+1}dx\right)^2<\ln 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\ln 2}{3}\Rightarrow\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2x^2+1}dx<\sqrt{\frac{2\ln 2}{3}}<\ln 2.$$

**L:676**. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **care are proprietatea** $f(x)+2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^4 x, \forall x\in\mathbb{R}$.

**Să se calculeze** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. **Constantin Rusu**, Râmnicu Sărat

**Rezolvare:** Avem $f(x)+2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^4 x, (1)$ unde dacă înlocuim pe $x$ cu $\frac{\pi}{2}-x$ obținem

$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^4 x$, (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow f(x)=\frac{\cos^4 x-2\sin^4 x}{3}$ care, se scrie

succesiv astfel $f(x)=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2-2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{24}(-3+12\cos 2x-\cos 4x)$.

Prin urmare, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left[\frac{1}{24}\left(-3x+6\sin 2x-\frac{\sin 4x}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{16}$.

**L:677. Se defineşte integrala având limita superioară infinită prin egalitatea:**

$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. **Să se calculeze integrala:** $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2}dx$.

**Vasile Mircea Popa**, Sibiu

***Rezolvare***: Notăm: $I=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2}dx$ ; $J=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg} x}{(x+1)^2}dx$.

Avem: $I+J=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x}{(x+1)^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$. (1)

În integrala J facem schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$ şi obţinem: $J=-\int_{\infty}^{0}\frac{\operatorname{arcctg}\frac{1}{t}}{(\frac{1}{t}+1)^2}\frac{1}{t^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} t}{(t+1)^2}dt=I$.

Rezultă $I=\frac{\pi}{4}$.

**Observaţie:** Integrala se mai poate calcula folosind primitiva (formula Leibniz-Newton) sau integrarea prin părţi, adaptate situaţiei din problema noastră (limita superioară de integrare tinde la infinit).

**L:678. Calculaţi** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln(\sin x+\cos x)dx$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

***Rezolvare:*** Facem schimbarea de variabilă $x=\frac{\pi}{2}-t$ şi avem $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(\sin x+\cos x)dx$.

Deci $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)\ln(\sin x+\cos x)dx$, unde facem schimbarea de variabila $x=\frac{\pi}{4}+t$ şi obţinem

$$2I=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\ln(\sqrt{2}\cos t)dt=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t(\ln(\sqrt{2})+\ln(\cos t))dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt+\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\ln(\cos t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot I_1,\text{ unde}$$

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\ln(\cos t)dt=(\sin t\ln(\cos t))\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt,\text{ etc. } I=-1+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

**„ Felul cum dai prețuieşte mai mult decât ceea ce dai.”**
**Corneille**
**(1606-1684)**

# 4. Probleme propuse

## ▪ Clasa a V-a

**G:867.** Arătați că dacă suma cifrelor numărului natural $N$ este aceiaşi cu suma cifrelor $2012\cdot N$, atunci 9 divide pe $N$.

**Neculai Stanciu,** Buzău

**G:868.** Raportul mărimilor unui dreptunghi este $\frac{(1+2+...+2019):(2+4+...+4038)}{(2+4+.....+4038):(1+2+...+2019)}$, iar perimetrul are valoarea 5. Aflați aria dreptunghiului. **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

**G:869.** a) Fie numărul $x=2^{2018n+2}\cdot 5^{2018n+6}-7,\ n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle n ştiind că: suma cifrelor numărului x este 36348.
b) Determinați câtul şi restul împărțirii numărului $7^{2018}$ la $8\cdot 7^{2015}$.

**Prof. Iuliana Traşcă,** Olt

**G:870.** Determinați $A\in\mathbb{N}$ care are produsul divizorilor săi naturali egali cu $7^{2039190}$.

**Adrian Gobej, Curtea de Argeş**

**G:871.** Se dă numărul $A=\overline{2019a_1a_2a_3.....a_n2019}$, unde $a_1,a_2,.....,a_n$ sunt cifre în baza 10. Determinați cel mai mic număr A care are suma cifrelor 2019.

**Adrian Gobej, Curtea de Argeş**

**G:872.** Stabiliți paritatea numărului $A=(n+2011)(3n+5)(n+2018)+7^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

**Prof. Iuliana Traşcă,** Olt

**G:873.** Găsiți la ce numere trebuie împărțit numărul $3\cdot 2^{2019}$, pentru a obține restul $2^{2018}$.

**Ionel Tudor ,** Călugăreni , Giurgiu

**G:874.** Să se arate că $\underbrace{\overline{abcabc...abc}}_{2019\,litere}+\underbrace{\overline{bcabca...bca}}_{2019\,litere}+\underbrace{\overline{cabcab...cab}}_{2019\,litere}=\underbrace{\overline{aa...a}}_{de\,2019\,ori}+\underbrace{\overline{bb...b}}_{de\,2019\,ori}+\underbrace{\overline{cc...c}}_{de\,2019\,ori}$

**Constantin şi Elena Ciobîcă,** Fălticeni

## ▪ Clasa a VI-a

**G:875.** Rezolvați, în Z, ecuația $x^2+2xy=4-x-2y$. **Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

**G:876.** Fie $p=2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot ....\cdot 9^9$. Arătați ca "p" se divide cu $210^5$ şi găsiți ultima cifră nenulă a lui p. **Petre Păunescu,** Roşiorii de Vede, Teleorman

**G:877.** Să se rezolve în Z ecuația: $x^2+y^2=x^3+xy$ .

**Gheorghe Ghiță,** Buzău

**G:878.** Câte numere naturale sunt divizibile cu 2013 şi au exact 2013 divizori naturali ?

**Neculai Stanciu,** Buzău

**G:879.** Să se arate că numărul $A=12^n-2^{n+1}\cdot 3+3^{n+1}\cdot 2^n-18$ este divizibil cu 10 pentru orice n număr natural nenul.

**Adrian Gobej,** Curtea de Argeş

**G:880.** Arătați că numărul A nu este pătrat perfect, unde

$A=\left[2560+1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+....+99\cdot 100-(2^2+3^2+4^2+....+100^2)\right]^{10}+2$.

**Adrian Gobej,** Curtea de Argeş

**G:881.** Se consideră numărul $a=\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+2019}\right)^n\cdot\frac{x}{2^n}$, unde $n$ şi $x$ sunt numere naturale.

Să se determine cel mai mic număr natural $x$ pentru care numărul $a$ este natural nenul.

Determinați $n$ pentru care numărul $a$ găsit la punctul a) , are 121 divizori naturali.

**Ionel Tudor ,** Călugăreni , Giurgiu

## ▪ Clasa a VII-a

**G:882.** Fie x , y , z $\in$ [0 ; 1] . Arătați că $\frac{x^{2019}}{1+x+xyz}+\frac{y^{2019}}{1+y+xyz}+\frac{z^{2019}}{1+z+xyz}\le 1$.

În ce caz avem egalitate ?

**Tuțescu Lucian, Roxana Vasile,** Craiova

**G:883.** Fie a,b,c > 0. Arătați că $\max\left\{\frac{a^2+1}{2b},\frac{b^2+1}{2c},\frac{c^2+1}{2a}\right\}\ge 1$

**Cremeneanu Luiza, Prunaru Constantina,** Craiova

**G:884.** Numerele naturale $a_1,a_2,...,a_{2019}$ sunt invers proporționale cu numerele $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{2019}$ şi $a_1+a_3+...+a_{2019}=2020^2$. Determinați numerele naturale $a_1,a_2,...,a_{2019}$.

**Elena şi Constantin Ciobîcă,** Fălticeni

**G:885.** Fie $k>0$. Arătați că dacă aria unui patrulater convex este $2k^2$, iar suma diagonalelor este $4k$, atunci patrulaterul este ortodiagonal.

**Neculai Stanciu,** Buzău şi **Titu Zvonaru,** Comăneşti

**G:886.** . Să se determine triungiurile ABC de laturi $a=\sqrt{n},\ b=(n+1)\sqrt{n},\ c=n\sqrt{2n+1},\ n\in\mathbb{N}^*$.

**Gheorghe Ghiță, Buzău**

**G:887.** a)Să se arate că: $\frac{1}{4n}\langle\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot....\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2\langle\frac{3}{4(2n+1)},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$, ecuația: $\left[5\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot...\cdot(2n-1)}{4\cdot6\cdot8\cdot...\cdot(2n)}\right]=1$, unde prin $[a]$ se notează partea întreagă a unui număr real $a$.

**Ionel Tudor**, Călugăreni, Giurgiu

**G:888.** Cât la sută din aria cercului circumscris triunghiului echilateral ( $A_1$) este aria cercului înscris corespunzător ($A_2$)? b) Verificați relația $2^{2019}A_1 = 2^{2023}A_2$

**Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

# ▪ Clasa a VIII-a

**G:889.** Fie $n=\sqrt{(x+y+11)^2}+\sqrt{(x+y-14)^2}, x\in(-6;5),\ y\in(-5;9)$. Arătați că $\sqrt{n}$ este număr întreg.

**Daniela Badea**, Ploieşti

**G:890.** Fie $a,b>0$ cu proprietatea $a^3+b^3=2$. Arătați că $b+\frac{2}{ab}\geq\sqrt{3(a^2+2b^2)}$.

**Nela Ciceu,** Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

**G:891.** Să se demonstreze că dacă $n>1$ este un număr natural şi $p$ un număr prim astfel încât $n|p-1$ şi $p|n^3-1$, atunci $n^2+n+1$ este număr prim şi $p+n$ este pătrat perfect.

**Neculai Stanciu**, Buzău

**G:892.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive sistemul:

$$\begin{cases} xy^2+7=8z \\ y^2z^4+1=2x \\ z^4x+3=4y \end{cases}.$$

**Cătălin Cristea**, Craiova

**G:893.** Aflați $m\in\mathbb{R}$ dacă ecuația $(m-2)x^2-2(m+2)x+m=0$ are soluții reale.

**Ion Stănescu,** Smeeni, Buzău

**G:894.** Arătați că există numere naturale m şi n distincte , astfel încât numărul $x=3^m+3^n+3^{46}+3^{57}$ , să fie cub perfect.

**Ionel Tudor ,** Călugăreni , Giurgiu

**G:895.** Să se rezolve ecuația $[nx]+\{(n+1)x\}=n+2,\ n\in\mathbb{N}^*$.

**Gheorghe Ghiță, Buzău**

**G:896.** Se consideră funcția $f:[1,\sqrt{12}]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{12-x^2}$.

Să se compare $f(x)$ şi $f(y)$ pentru $1\leq x<y\leq\sqrt{12}$.

Să se rezolve în R , ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{12-x^2}=\sqrt{2}$.

**Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

**G:897.** O prismă dreaptă ABCDA′B′C′D′ cu baza pătratul ABCD de latură 12cm are măsura unghiului dintre BD′ şi planul (AA′B) egală cu $x$.

a) Arătați că $x<45^0$;

b) Calculați cos $x$ pentru care paralelipipedul ABCDA′B′C′D′ este cub ;

c) Se secționează paralelipipedul ABCDA′B′C′D′ cu planul (D′AM) unde M este mijlocul muchiei CC′. Calculați aria secțiunii obținute în cazul în care CC′=12 cm.

**Daniela Badea,** Ploieşti

# ▪ Clasa a IX-a

**L:679.** Fie a , b , c , a+b+c numere raționale care nu sunt întregi . Arătați că există k $\in\mathbb{N}^*$ astfel încât ka , kb , kc nu este număr întreg 1 < {ka} + {kb} + {kc} < 2 , unde {x} reprezintă partea fracționară a numărului real x.

**Alina Ghiță**, Craiova, **Mădălina Giurgescu,** Bucureşti

**L:680.** Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ definite prin $a_n = 8n-4,\ b_n = 2^{a_n},\ n\in\mathbb{N}^*$;

a) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_1+a_2+.....+a_n = 2020^2$;

b) Calculați suma $S = b_1+b_2+....+b_{2020}$. **Adrian Stan,** Buzău

**L:681.** Calculați $S = 2^2+3^2+5^2+6^2+7^2+8^2+...+\left((n^2-2n+2)^2+...+(n^2-1)^2\right)$.

**Petre Păunescu,** Roşiorii de Vede

**L:682.** Fie $(a_n)$ o progresie aritmetică cu $a_2=5$ şi $a_{10}=21$. Calculați $S_n$;

Arătați că $\frac{a_1^2}{1}+\frac{a_2^2}{2}+.....+\frac{a_{2019}^2}{2019}\geq\frac{2019\cdot2021^2}{1010}$ . **Laura Tănase,** Buzău

**L:683.** Fie a,b,c > 0. Arătați că $\max\left\{\frac{a^4+6a^2+1}{4b(b^2+1)},\frac{b^4+6b^2+1}{4c(c^2+1)},\frac{c^4+6c^2+1}{4a(a^2+1)}\right\}\geq1$.

**Claudiu Ciurcu, Anicuța Bețiu**, Craiova

**L:684.** Fie $a,b,c,d>0$. Să se demonstreze că inegalitatea

$$\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}}+\frac{d\sqrt{d}}{a\sqrt{a}}\geq\frac{4\cdot\sqrt[4]{(a+2b)(b+2c)(c+2d)(d+2a)}}{3\cdot\sqrt[4]{abcd}}.$$

**Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău şi **Nela Ciceu**, Bacău

**L:685.** Numerele reale strict pozitive $x_1$ , $x_2$ , ... , $x_{25}$ verifică $x_1 + x_2 + ... + x_{25} = 25$ . Arătați că

$\frac{x_1}{2x_1^2+3}+\frac{x_2}{2x_2^2+3}+....+\frac{x_{25}}{2x_{25}^2+3}\leq5$ . În ce caz avem egalitate ?

**Ion Pătraşcu, Alina Georgiana Ghiță**, Craiova

**L:686.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ , ecuația : $\frac{3^x-2^y}{5^z+2^y}+\frac{5^z-3^x}{2^y+3^x}=\frac{5^z-2^y}{5^z+3^x}$ .

**Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

**L:687.** Să se demonstreze prin metode elementare egalitățile:

$$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}\ ;\qquad \sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}=\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

**Vasile Mircea Popa**, Sibiu

(în legătură cu articolul „Sume gaussiene şi consecințe trigonometrice” din GM-B, nr. 7 / 2006).

**L:688.** Să se arate că: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\geq\frac{2n}{3n+1},\forall n\in N^*$. **Gheorghe Ghiță,** Buzău

**L:689.** Dacă $a_1,a_2,...,a_n$ sunt numere reale strict pozitive cu $a_1a_2...a_n=1$ şi notăm $s=a_1+a_2+...+a_n$ , să se demonstreze că avem inegalitatea:

$$\frac{a_1^2}{s-a_1+1}+\frac{a_2^2}{s-a_2+1}+...+\frac{a_n^2}{s-a_n+1}\geq1$$

**Vasile Mircea Popa**, Sibiu

(în legătură cu problema O: 1172 din Gazeta Matematică nr. 10/2007).

**L:690.** Să se arate că, în orice triunghi ascuțitunghic sau dreptunghic ABC, are loc inegalitatea: $\frac{(a+m_a)^2}{b^2c^2}+\frac{(b+m_b)^2}{c^2a^2}+\frac{(c+m_c)^2}{a^2b^2}<5\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ notațiile fiind cele uzuale.

**Cătălin Cristea,** Craiova

**L:691.** L. 691. Arătați că nu există numere reale $x$ şi numere raționale $y$ astfel încât: $\frac{x}{y^2(1-y)}=3$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L:692.** Fie $ABC$ un triunghi, $\Gamma$ cercul său circumscris şi $M$ mijlocul laturii $BC$. Paralele prin $A$ la $BC$ intersectează cercul $\Gamma$ în punctul $P$, iar dreapta $PM$ intersectează acelaşi cerc în punctul $Q$. Să se demonstreze că $AB\cdot QC=AC\cdot BQ$.

**Nela Ciceu,** Bacău şi **Roxana Mihaela Stanciu,** Buzău

**L:693.** Fie $a,b,c\in(0;\infty)$ cu $a^2+b^2+c^2\le 3$. Să se arate că

$$\frac{a}{b+(1+\sqrt{b}+\sqrt[3]{b})\cdot b^2}+\frac{b}{c+(1+\sqrt{c}+\sqrt[3]{c})\cdot c^2}+\frac{c}{a+(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})\cdot a^2}\ge\frac{3}{4}.$$

**Emil C. Popa,** Sibiu

## ▪ Clasa a X-a

**L:694.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $8x^3-6x-1=0$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu,** Bucureşti şi **Neculai Stanciu,** Buzău

**L:695.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația: $\frac{3\cdot\sqrt{x+2}-4\cdot\sqrt[3]{2x+1}}{2\cdot\sqrt{x+2}-3\cdot\sqrt[3]{2x+1}}=1$.

**Adrian Stan,** Buzău

**L:696.** Fie $n\in N^*, n\ge 2$ şi numerele $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\infty)$. Să se demonstreze că

$$\frac{x_1^2+x_2}{x_1x_2+x_2}+\frac{x_2^2+x_3}{x_2x_3+x_3}+...+\frac{x_n^2+x_1}{x_nx_1+x_1}\ge n.$$

**Cătălin Cristea,** Craiova

**L:697.** Dacă $a,b,c,d\ge 0$, demonstrați inegalitatea $\frac{1+a^3}{1+abc}+\frac{1+b^3}{1+bcd}+\frac{1+c^3}{1+cda}+\frac{1+d^3}{1+dab}\ge 4$.

**Roxana Mihaela Stanciu**, Buzău şi **Nela Ciceu**, Bacău

**L:698.** Să se compare numerele :

$a=nC_{2n+1}^0+\frac{n-1}{2}C_{2n+1}^1+\frac{n-2}{3}C_{2n+1}^2+....+\frac{1}{n}C_{2n+1}^{n-1}$, $b=\frac{1}{n+2}C_{2n+1}^{n+1}+\frac{2}{n+3}C_{2n+1}^{n+2}+....+\frac{n}{2n+1}C_{2n+1}^{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

**Ionel Tudor** , Călugăreni , Giurgiu

**L:699.** Dacă într-un triunghi ABC are loc relația $S=\frac{\pi}{e}\cdot R^2$, demonstrați inegalitatea $r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2\ge\frac{112\pi^2}{27e^2}\cdot R^2$, notațiile fiind cele cunoscute într-un triunghi.

**Radu Diaconu**, Sibiu

**L:700.** Dacă într-un triunghi ABC are loc relația $S=6\sqrt{5}$, demonstrați inegalitatea: $(m_a+m_b+m_c)^2\ge 162\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}$, notațiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

**Radu Diaconu**, Sibiu

**L:701.** Să se arate că are loc egalitatea: $C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+...+\frac{1}{n}C_n^n=1+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}+...+\frac{2^n-1}{n}, n\in N^*$.

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:702.** Se consideră funcția $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}, f(n) = n\left(\sin\frac{3\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right)$. Să se studieze : injectivitatea funcției f ; mărginirea funcției f ; Rezolvați în $\mathbf{N}^*$, ecuația $f(2n) = n$.

**Ionel Tudor ,** Călugăreni , Giurgiu

## ▪ Clasa a XI-a

**L:703.** Să se calculeze $A^n$, unde $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ d & e & a \end{pmatrix}, a\neq c.$

**Gheorghe Ghiță**, Buzău

**L:704.** Fie $f: R\to R$, o funcție continuă şi strict crescătoare. Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir definit de $a_0 = x,\ a_1 = f(x),\ a_{n+1} = f(a_n)\ \forall n\geq 1$ şi $a_{n+2}+a_{n+1} = 2a_n + a\ \forall n\geq 0$, atunci determinați legea $f(x)$ care defineşte funcția $f$ şi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L:705.** Să se calculeze limitele:

**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^4+e^{4x}+4^x)}{\ln(x^3+e^{3x}+3^x)}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)\sqrt{x}-3x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$;

**Adrian Stan,** Buzău

**L:706.** Să se determine toate perechile $(x,n)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ , soluții ale ecuației: $(x+n)^x - x^{x+n} = n$.

**Ionel Tudor** , Călugăreni, Giurgiu

**L:707.** Dacă l(x)este limita şirului $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}(4sin^2\frac{x}{2^k}+cos\frac{x}{2^k}-2)$, calculați $l\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

**Laura Tănase**, Buzău

## ▪ Clasa a XII-a

**L:708.** Să se calculeze $\int_2^3 \ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$

**Adrian Stan**, Buzău

**L:709.** Să se calculeze $\int_a^{\frac{2}{a}} \frac{x\ln x}{(x^2+2x+2)^2}dx,\ a\rangle 0$ .

**Gheorghe Ghiță, Buzău**

**L:710.** Dacă ecuația $x^3+2013x-2012=0$, are rădăcinile $\alpha,\beta,\gamma$ atunci calculați $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

**D.M. Bătinețu-Giurgiu**, Bucureşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău

**L:711.** Se consideră ecuația $x^5 - 110x^3 - 384 = 0$

Stabiliți numărul rădăcinilor reale ale ecuației. Să se rezolve ecuația în C , ştiind că are două rădăcini cu produsul 16.

**Ionel Tudor ,** Călugăreni , Giurgiu

**L:712.** Pe o mulțime nevidă M este dată o lege de compoziție asociativă şi fie $a\in M$ . Dacă $M = a^2Ma$ să se determine $x\in M$ astfel ca $axa = a$.

**Emil C. Popa** , Sibiu

**„ Time is really the only capital that any human being has, and the only thing he can not afford to lose."**
**Thomas Edison**
**(1847-1931)**

# 5. QUICKIES

**A Quickie should have an unexpected, succinct solution. Submitted quickies should not be under consideration for publication elsewhere. We invite readers to submit solutions-quickies and new proposals-quickies, accompanied by solutions mailed electronically (ideally MS Word 2003 or PDF file) to stanciuneculai@yahoo.com. All communications should include the reader's name, full address, and an e-mail address. Submited solutions should arrive before** September**March 30, 2019.**

## PROPOSALS – QUICKIES

**Q50. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

Let $(a_n)_{n\geq 1}$ be a positive real sequence sequence such that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{na_n}=a\in R_+^*$. Find $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt[k]{a_k}}$.

**Q51. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

Compute $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1+\ln x)\sin x-x\cos x\ln x}{\sin^2 x+x^2\ln^2 x}dx$.

**Q52. Proposed by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

If $ABCD$ is a bicentric quadrilateral, then prove that

$$\sum_{cyc}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)^t\geq 2^{2-t}\text{, for } t\geq 2 \text{ and reverse for } t<2.$$

**Q53. Proposed by Mihály Bencze, Bucharest, Romania.**

If $a,b,c$ are positive real numbers, then prove the following inequalities

(i) $\sum a^2b^2\left(\sum a^2+\sum ab\right)\geq 18a^2b^2c^2$; (ii) $\sum\frac{1}{a^2b+bc^2+2}\leq\frac{3}{4}$.

**Q54. Proposed by Marin Chirciu, Pitești, Romania.** Prove that in any triangle $\Delta ABC$ holds

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\leq\sqrt{\frac{6R}{r}}.$$

## SOLUTIONS – QUICKIES

**Q45. Proposed by D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania.**

Let $a,b\in[0,\infty), a<b, P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$, $n$ is positive integer.

Find $\int\limits_a^b\frac{x^n+n!(\sin x-\cos x)}{e^x+\sin x+P_n(x)}dx$.

**Solution.** Let $f:R\to[0,\infty)$, $f(x)=e^x+\sin x+P_n(x)$. We have $f'(x)=e^x+\cos x+P_{n-1}(x)$, so

$$f(x)-f'(x)=\sin x-\cos x+\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{n!}(x^n+n!(\sin x-\cos x)).$$

Therefore, $\int_a^b \frac{x^n+n!(\sin x-\cos x)}{e^x+\sin x+P_n(x)}dx=\int_a^b \frac{n!(f(x)-f'(x))}{f(x)}dx=n!\int_a^b\left(1-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx=$

$$=n!\left(x-\ln f(x)\right)\Big|_a^b=n!(b-a)-\ln\frac{f(b)}{f(a)}=n!\left(b-a-\ln\left(\frac{e^b+\sin b+P_n(b)}{e^a+\sin a+P_n(a)}\right)\right).$$

**Q46. Proposed by Mihály Bencze, Bucharest, Romania.**

If $a,b,c>0$, then prove that $\sum\frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)}\ge 3$.

**Solution 1 by Titu Zvonaru, Comăneşti, Romania.**

We have $\sum\frac{a(2a+3b+3c)}{(b+c)(2a+b+c)}\ge 3\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+c}+2\sum\frac{a}{2a+b+c}\ge 3$, (1).

$$\sum\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)\ge 2\sum\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2a+b+c}\right)\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\ge\sum\frac{(a-b)^2}{(2a+b+c)(a+2b+c)}$$

$$\sum\frac{(a-b)^2(2a^2+2b^2+4ab+2bc+2ac)}{(a+c)(b+c)(2a+b+c)(a+2b+c)}\ge 0.$$

Inegalitatea (1) este problema OBJ. 30 din RMT 1/2013 (o soluție diferită de cea de mai sus se găseşte în RMT 2/2013).

**Solution 2 by Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

We use the identities $\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}$ and

$$\sum\frac{a}{2a+b+c}-\frac{3}{4}=-\sum\frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

Indeed $\sum\frac{a}{2a+b+c}-\frac{3}{4}=\sum\left(\frac{a}{2a+b+c}-\frac{1}{4}\right)=\sum\frac{a-b+a-c}{4(2a+b+c}=$

$$=\sum\frac{a-b}{4(2a+b+c)}+\sum\frac{a-c}{4(2a+b+c)}=\sum\frac{a-b}{4(2a+b+c)}+\sum\frac{b-a}{4(a+2b+c)}=$$

$$=\sum\frac{a-b}{4}\left(\frac{1}{2a+b+c}-\frac{1}{a+2b+c}\right)=-\sum\frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

The inequality from the statement becomes successively

$$\sum\frac{a(2a+b+c)+a(2b+2c)}{(b+c)(2a+b+c)}\ge 3\Leftrightarrow\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}-2\sum\frac{a}{2a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}\ge 2\sum\frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)}.$$

So, it suffices to show that $\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}\ge\frac{(a-b)^2}{(2a+b+c)(a+2b+c)}$.

If $a=b$ we have equality; if $a\ne b$ it remains to prove that

$(2a+b+c)(a+2b+c)\ge(b+c)(c+a)$, true because

$2a+b+c>b+c$ and $a+2b+c>c+a$.

The proof is complete.

**Also solved by Daniel Văcaru, Piteşti, Romania.**

**Q47. Proposed by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania and Marius Drăgan, Bucharest, Romania.**

**(i) If** $x,y,z\in(0,e)$ **such that** $x+y+z=1$**, then prove that** $(xyz)^3\ge x^{\frac{1}{x}}y^{\frac{1}{y}}z^{\frac{1}{z}}$**;**

**(ii) If** $x,y,z>0$ **such that** $x+y+z=1$**, then prove that**

$$(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3\ge(x+1)^{\frac{1}{x}}(y+1)^{\frac{1}{y}}(z+1)^{\frac{1}{z}}.$$

**Solution by authors**. (i) We consider the function $f:(0,e)\to R$ , $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ with $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$.

So $f$ is increasing on $(0,e)$ and it follows that $(x,y,z)$ is in the same ordered like $(f(x),f(y),f(z))$.

Hence by Chebyshev inequality we have $\sum xf(x)\ge\dfrac{1}{3}\sum x\sum f(x)$ or

$$\ln(xyz)^3\ge\sum\frac{1}{x}\ln x \text{ or } (xyz)^3\ge x^{\frac{1}{x}}y^{\frac{1}{y}}z^{\frac{1}{z}}, \text{ Q.E.D.}$$

(ii) We consider the function $f:(-1,\infty)-\{0\}\to R$ , $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ with $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}<0$.

So $f$ is decreasing on $(-1,\infty)-\{0\}$ and it follows that $(x,y,z)$ is not the same ordered like $(f(x),f(y),f(z))$. Hence by Chebyshev inequality we have $\sum xf(x)\le\dfrac{1}{3}\sum x\sum f(x)$ i.e.

$$(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3\ge(x+1)^{\frac{1}{x}}(y+1)^{\frac{1}{y}}(z+1)^{\frac{1}{z}}, \text{ Q.E.D.}$$

**Q48. Proposed by Marian Cucoaneş, Mărăşeşti, Romania**

**Prove that in any triangle** $ABC$ **holds the following inequality** $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\le 4\cdot\dfrac{R}{r}-2$**.**

**Solution by author**. $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}=\sqrt{\dfrac{a}{p-a}}\sqrt{\dfrac{b}{p-b}}+\sqrt{\dfrac{b}{p-b}}\sqrt{\dfrac{c}{p-c}}+\sqrt{\dfrac{c}{p-c}}\sqrt{\dfrac{a}{p-a}}\le$

$$\le\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=4\cdot\frac{R}{r}-2.$$

Above we used well-known inequality $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$, $\forall x,y,z\in R$ and well-known trigonometric formulas.

**Solution by Marin Chirciu, Piteşti, Romania.** By CBS inequality we obtain:

$$\left(\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)^2=\left(\sum\frac{1}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}\right)^2=\left(\sum\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}\right)^2\le\sum bc\sum\frac{1}{(p-b)(p-c)}=$$

$$=\left(p^2+r^2+4Rr\right)\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{r^2}\le\frac{4R^2+4Rr+3r^2+r^2+4Rr}{r^2}=\frac{4(R+r)^2}{r^2}.$$

If we used the facts:

$\sum bc=p^2+r^2+4Rr$ , $\sum\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}=\dfrac{1}{r^2}$ and $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ (Gerretsen) we deduce

$\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \le \frac{2(R+r)}{r}$. So it remains to show that $\frac{2(R+r)}{r} \le 4\cdot\frac{R}{r} - 2 \Leftrightarrow R \ge 2r$, true.

The equality occurs if and only if the triangle is equilateral.

Remark ( a refinement of Q48.) In any triangle $\Delta ABC$ holds $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \le 2\cdot\frac{R}{r} + 2$, which yields by the solution from above where we proved that $\sum \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} \le \frac{2(R+r)}{r}$, q.e.d.

**Q49. Proposed by Marin Chirciu and Octavian Stroe, Pitești, Romania.**
**Let $a,b,c,n$ be positive real numbers such that $ab+bc+ca=3abc$. Prove that**

$$\frac{1}{na^2+b^2} + \frac{1}{nb^2+c^2} + \frac{1}{nc^2+a^2} \le \frac{3}{n+1}.$$

**Solution by authors**. We have $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

Note $\frac{1}{a}=x, \frac{1}{b}=y, \frac{1}{c}=z$, we obtain $x+y+z=3$.

Inequality is written:

$$\frac{1}{\frac{n}{x^2}+\frac{1}{y^2}} + \frac{1}{\frac{n}{y^2}+\frac{1}{z^2}} + \frac{1}{\frac{n}{z^2}+\frac{1}{x^2}} \le \frac{3}{n+1} \Leftrightarrow \frac{x^2y^2}{x^2+ny^2} + \frac{y^2z^2}{y^2+nz^2} + \frac{z^2x^2}{z^2+nx^2} \le \frac{3}{n+1}, (1).$$

Because $x+y+z=3$ and $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3}$, we obtain $x^2+y^2+z^2 \ge 3$, (2).

Using (1) and (2) it is enough to show that:

$$\sum \frac{x^2y^2}{x^2+ny^2} - \sum x^2 \le \frac{3}{n+1} - 3 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{x^2y^2}{x^2+ny^2} - y^2\right) \le \frac{-3n}{n+1} \Leftrightarrow \sum \frac{y^4}{x^2+ny^2} \ge \frac{3}{n+1},$$

which is true of Bergström inequality:

$$\sum \frac{y^4}{x^2+ny^2} \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(n+1)(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{n+1} \ge \frac{3}{n+1}.$$

Equality occurs if and only if $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Remark. For $n=2$, we obtain Problem J446-Mathematical Reflections Nr.3/2018, proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University Of Science, Vietnam

**„ Claritatea şi precizia în idei, puterea de analiză şi de sinteză sunt calităţi ale spiritului omenesc caracteristice gândirii matematice şi care se dezvoltă prin exerciţiul ei”**
**Simion Stoilov**
**(1887-1961)**

# 6. Caleidoscop matematic

## Două mii nouăsprezece
## Bencze Mihály, Braşov şi Kovács Béla, Satu Mare
## ( I )

2019 cu cifre romane: MMXIX = MIX+MX
2019 număr natural impar, produsul a două numere prime: $2019 = 3 \cdot 673$
Se poate scrie folosând o singură cifră: $2019 = (1111 - 111 + 11) \cdot (1 + 1) - 1 - 1 - 1$

$2019 = 2222 - 222 + 22 - 2 - \frac{2}{2}$

$2019 = 333 \cdot (3 + 3) + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3$

$2019 = (444 + 44 + 4 \cdot 4) \cdot 4 + 4 - \frac{4}{4}$

$2019 = 555 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 - \frac{5}{5}$

$2019 = (66 \cdot 6 - 66 + 6) \cdot 6 + \frac{6+6+6}{6}$

$2019 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + \frac{7+7+7}{7}$

$2019 = 888 + (88 + 8 \cdot 8) \cdot 8 - 88 + \sqrt{8 + \frac{8}{8}}$

$2019 = 999 + 999 + 9 + 9 + \sqrt{9}$

Folosind toate cifrele o singuă dată: $2019 = 1 + 2345 - 6 \cdot 7 \cdot 8 + 9$

$2019 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 : 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 + 1$

Suma pătratelor a trei numere naturale: $2019 = 1^2 + 13^2 + 43^2$

$2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$

$2019 = 7^2 + 11^2 + 43^2$

$2019 = 7^2 + 17^2 + 41^2$

$2019 = 11^2 + 23^2 + 37^2$

$2019 = 13^2 + 13^2 + 41^2$

$2019 = 13^2 + 25^2 + 35^2$

$2019 = 17^2 + 19^2 + 37^2$

$2019 = 23^2 + 23^2 + 31^2$

Sunt în total 9 posibilităţi, dintre care în 6 cazuri numai cu numere prime.

Suma pătretelor a patru numere naturale: $2019 = 5^2 + 15^2 + 20^2 + 37^2$

$2019 = 7^2 + 9^2 + 17^2 + 40^2$

$2019 = 13^2 + 15^2 + 20^2 + 35^2$

$2019 = 13^2 + 21^2 + 25^2 + 28^2$

$2019 = 17^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2$

**„ Semeni un gând, culegi o faptă; semeni o faptă culegi un obicei; semeni un obicei, culegi un caracter; semeni un caracter, culegi un destin. ”**
**Nicolae Iorga**
**(1817-1940)**

# 7. Poşta redacţiei

Dragi cititori, elevi şi profesori, a apărut **numărul 23** al revistei de matematică „ **SCLIPIREA MINTII**”, o revistă care promovează studiul matematicii în rândul elevilor noştri, şi care, sperăm noi, va aduna tot mai mulți elevi şi profesori împreună, pentru a face din obiectul matematicii o activitate atractivă şi performantă.

Profesorii şi elevii care doresc să trimită materiale pentru revistă, constând în articole, **exerciții şi probleme cu enunț şi rezolvare completă**, materiale pentru „caleidoscop matematic”, sau orice alte sugestii pentru a îmbunătății calitatea acestei reviste, o pot face trimițând materialele membrilor colectivului de redacție sau pe adresa de e_mail: **ady_stan2005@yahoo.com,** fie materiale tehnoredactate( **salvate în Word 2003**) , fie scrise de mână şi scanate. **Materialele primite trebuie să fie originale şi să nu mai fi fost trimise sau să mai fie trimise şi către alte reviste**. Dreptul de autor al materialelor trimise spre publicare, aparține redacției.

Data finală până când profesorii pot trimite materialele, rezolvările şi comenzile pentru **numărul 24** al revistei **„ SCLIPIREA MINTII”** va fi **1 OCTOMBRIE 2019**. Vă urăm succes şi vă aşteptăm.

## ELEVI REZOLVITORI

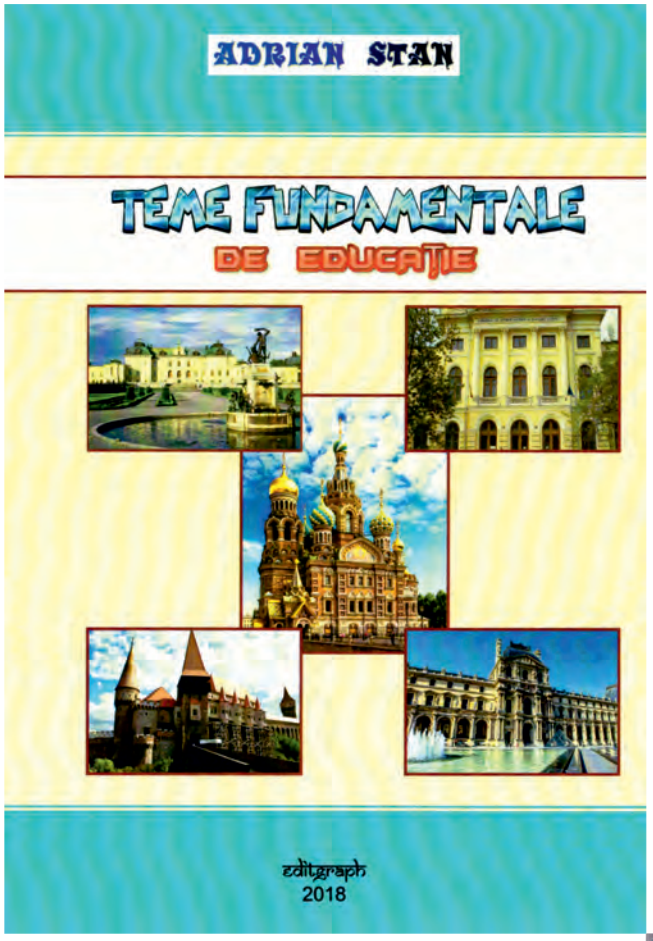
**Scoala Gimnazială “Gh. Popescu” Mărgineni- Slobozia, Scornicești, Olt**
**Clasa a VII-a:** . Mindreanu Florentina, Vlaicu Liliana; **Clasa a VIII-a**: . Sima Iuliana, Screciu Iuliana; **Prof. Iuliana Trașcă.**

**Scoala Gimnazială Viperești, Buzău**
**Clasa a VI-a:** Vîrlan Ioana, Musceleanu Elena, Tăbăcaru Andrei, Stan Ioana, Udrea Ştefania, Costea Alexandra, Dedu Mircea, Spirea Ştefan**; Clasa a VII-a:** State Elena, Văcar Andrei, Cosma Roxana, Țapu Alexandra**; Clasa a VIII-a:** Ariciu Daiana, Urmuzache Ramona**; Prof. Neculai Stanciu**;

**Scoala Gimnazială ” Rareş Vodă” Ploieşti, Prahova**
**Clasa a VI-a:** Păduraru Cătălina, Mihai Alexandra, Găitănaru Andreea, Călinescu Alin, Nițoiu Vlad, Boboc Gabriel, Savu Gabriel**. Prof. Daniela Badea**

**Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu”, Buzău**:
**Clasa a IX-a :** Ştirbu Cătălin, Dobre Anca, Dobre Ioana, Chiricioiu Georgiana, Cană Cristina, Macsim Mihaela; **Clasa a X-a:** Axinte Ionuț, Deacănu Andreea; Catinca Teodora; Moise Andrei**; Clasa a XI-a:** Vizitiu Anamaria, Gheorghiță Ruxandra**; Clasa a XII-a:** Pascu Elena; Dumitrache Mihaela, Pantazi Gabriela**; Prof. Adrian Stan.**

# APARIȚII EDITORIALE




Această carte reprezintă o pledoarie pentru educație, atât pentru elevi cât și pentru cadrele didactice, care sunt datori să caute cele mai bune căi de a realiza un demers educativ de calitate în rândul elevilor și pentru aceasta este nevoie de o pregătire adecvată, de găsirea celor mai importante și necesare teme educative care să stârnească interesul adolescenților.

Cartea cuprinde teme utile înțelegerii de către adolescenți a importanței educației și a învățăturii, a felului cum trebuie să-și petreacă timpul liber și cum să se raporteze la problematica violenței școlare, de asemenea să ia cunoștință de fenomenul traficului de persoane, dar și de faptul că trebuie să dăm importanță respectării drepturilor omului și a copiilor, drepturi care vin o dată cu anumite responsabilități.

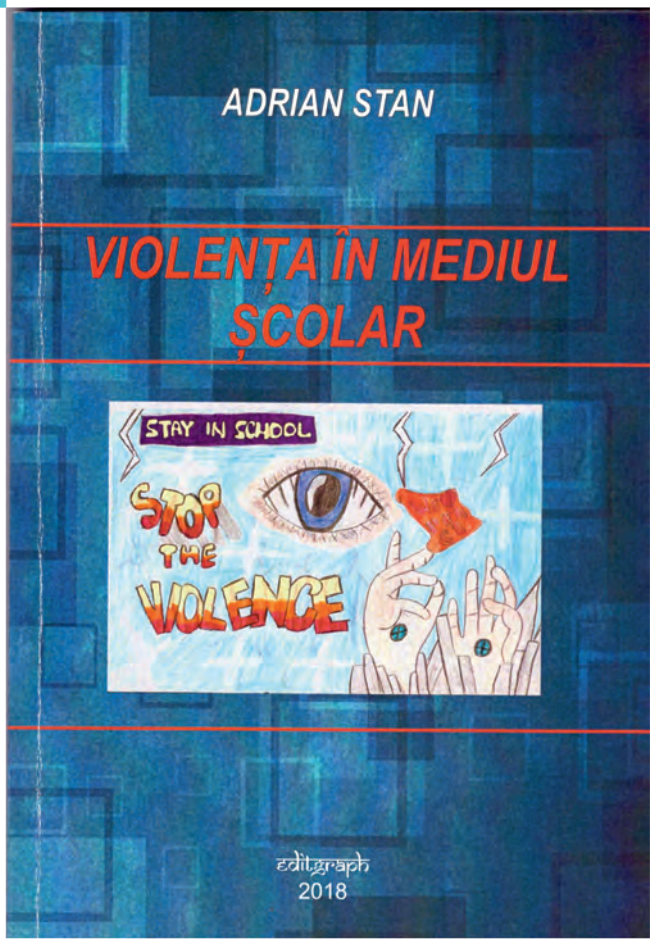
Având 185 de pagini, cartea este realizată în condiții excelente la Editura Editgraph Buzău.

Având la bază un proiect educațional desfășurat de către autor la nivel județean, cartea se constituie ca o aprofundare a fenomenului problematicii violenței școlare prin tratarea tuturor acelor cauze care contribuie la apariția unor incidente în mediul școlar din punct de vedere comportamental.

Determinarea formelor de violență, stabilirea măsurilor care se impun pentru combaterea violenței și analiza studiului de caz de la nivelul propriei școli, constituie un bun reper pentru analiza la nivel general al acestui fenomen al violenței școlare.

Pe de altă parte cartea ne introduce în universul poveștelor și al vorbelor de duh ale înaintașilor pe care le găsim în diverse povestiri cu tâlc despre violență în general și despre comportamente necorespunzătoare.

Apărută într-o ediție de excepție la Editura Editgraph Buzău, cartea ne îndeamnă la o mai bună reflecție asupra acestui fenomen al violenței în mediul școlar.



REVISTA SCLIPIREA MINȚII
NR. 23 ANUL XII - APRILIE 2019

## Cuprins

IN MEMORIAM „ CONSTANTIN RUSU” ..... 1

**1. Istoria matematicii**

Mari matematicieni români – Simion Stoilov
de Adrian Stan ..... 3

**2. Articole și note matematice**

Cercuri tangente înscrise într-un triunghi
de Constantin Rusu ..... 4

Dezvoltări din Crux Mathematicorum
de Marin Chirciu ..... 9

Generalizarea unei inegalități algebrice din Aops/2016
de Marius Drăgan și Neculai Stanciu ..... 12

Aplicații ale integralei definite
de Mădălin Avram ..... 13

Calculul unor sume de șiruri în progresie geometrică
de Elena și Constantin Ciobîcă ..... 16

O demonstraţie cu Cauchy-Buniakovski-Schwarz a unei
inegalităţi de Titu Zvonaru ..... 17

On the problem 12068 from AMM/2018
by D.M.Bătinețu-Giurgiu, Mihaly Bencze, Daniel Sitaru ..... 18

**3. Probleme rezolvate** ..... 20

**4. Probleme propuse** ..... 45

**5. Quickies** ..... 51

**6. Caleidoscop matematic** ..... 55

**7. Poșta redacției** ..... 56

VIZITATI SI REVISTA ONLINE DE MATEMATICA MATEINFO.RO

editgraph

LEI 12 RON

ISSN 2247 – 6601
ISSN-L 2247 – 6601