BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 22

Prof: Cristea Maria

♦ Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{2^{1005}}(1+i)^{2010}=\frac{1}{2^{1005}}[(1+i)^2]^{1005}=i^{1005}$	3p
	$i^{1005}=(i^2)^{502}\cdot i=(-1)^{502}\cdot i=i$	2p
2.	Condiţii de existenţă: $x-2\geq 0$, $x-3\geq 0$, $3x-5\geq 0$	1p
	Domeniul de definiţie: $D=[3,\infty)$	1p
	$1+\sqrt{x-2}=\frac{\sqrt{x-3}+2+\sqrt{3x-5}}{2}$	1p
	$2\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-5}$	
	$4(x-2)=x-3+3x-5+2\sqrt{(x-2)(3x-5)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-3)(3x-5)}=0$	
	$x-3=0\Rightarrow x=3\epsilon D$ sau $3x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}\notin D$	2p
	$S=\{3\}$.	
3.	$4^x-2^x-12=0\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-12=0$	1p
	Notăm $2^x=a$	
	Ecuaţia devine: $a^2-a-12=0\Rightarrow a_1=4,\ a_2=-3$	2p
	$2^x=4\Leftrightarrow 2^x=2^2\Rightarrow x=2$	2p

	$2^x = -3$ imposibil $S = \{2\}$.	
4.	Mulţimea A are 7 elemente, deci numărul de submulţimi ale mulţimii A este: $C_7^0 + C_7^1 + \cdots + C_7^7 = 2^7 = 128$. Prin urmare mulţimea A posedă $128 - C_7^0 = 127$ submulţimi nevide. Submulţimile care au toate elementele pare sunt submulţimi ale mulţimii $B = \{2,4,6\}$. Deoarece mulţimea B are 3 elemente , va avea $2^3 - 1 = 7$ submulţimi nevide. Probabilitatea cerută este $P = \frac{7}{127}$.	2p 2p 1p
5.	Vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4$ şi $\vec{v} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt perpendiculari dacă are loc relaţia: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ Prin urmare $(m-3) \cdot 8 + 4(m-15) = 0$, adică $12m = 84$ cu soluţia $m = 7$.	2p 2p 1p
6.	Se observă că numerele 6, 8 şi 10 sunt pitagorice. $10^2 = 6^2 + 8^2$, deci triunghiul este dreptunghic. În acest caz lungimea razei cercului circumscris este egală cu jumatate din lungimea ipotenuzei, adică $R = \frac{10}{2} = 5$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Legea de compoziţie " $*$" este bine definită dacă $\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$. $x, y \in G \Leftrightarrow x, y \in (1,2) \cup (2, \infty) \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$ are sens şi că $(x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} > 0$.Deci $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} > 1$. Pentru a arăta că $x * y \neq 2$ presupunem contrariu. Din $x * y = 2 \Rightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1$, relaţie adevărată doar dacă $x - 1 = 1$ sau $\ln\sqrt{y-1} = 0$, de unde $x = 2$ sau $y = 2$. Deoarece	2p 2p

	$x, y \in (1,2) \cup (2,\infty)$, rezultă că presupunerea facută este falsă, deci $x * y \neq 2$. Prin urmare legea de compoziţie “ $*$” este bine definită.	1p
b)	Legea de compoziţie “ $*$”este comutativă dacă $x * y = y * x, \forall x\,, y \epsilon G = (1,2) \cup (2,\infty)$. Se observă că : $x * y - 1 = (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}}$, oricare ar fi $x, y \in G$. $y * x - 1 = (y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$ oricare ar fi $x, y \in G$. Pentru a demonstra comutativitatea logaritmăm expresiile de mai sus. $\ln(x * y - 1) = \ln\sqrt{y-1}\ln(x-1) = \frac{1}{2}\ln(y-1)\ln(x-1)$, iar $\ln(y * x - 1) = \ln\sqrt{x-1}\ln(y-1) = \frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1)$, ceea ce conduce la $x * y = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Deci, legea de compoziţie “ $*$”este comutativă.	1p 1p 2p 1p
c)	Pentru a rezolva ecuaţia ecuaţia $x * e_1 = 2$, aflăm mai întâi elemtul neutru e_1. $\exists e_1$ astfel încât $x * e_1 = e_1 * x = x, \forall x \in G$. Întrucât legea “ $*$”este comutativă vom considera doar $x * e_1 = x \Leftrightarrow$ $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}} = x \Leftrightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{e_1-1}} = x-1$, cum $x-1 \neq 1 \Rightarrow \ln\sqrt{e_1-1} = 1$ de unde $e_1 = x^2 + 1 \epsilon G$. $x * e_1 - 1 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^{\ln\sqrt{e^2}} = 2 \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$.	1p 2p 2p
2. a)	Funcţia polinomială $f(x) = x^4 - 4x^2 + 9 = (x^2+3)^2 - 10x^2 = (x^2 - \sqrt{10}x + 3)(x^2 + \sqrt{10}x + 3)$ $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{10}x + 3 = 0$ cu soluţiile $x_{1,2} = \frac{\sqrt{10} \pm i\sqrt{2}}{2}$ şi $x^2 + \sqrt{10}x + 3 = 0$ cu soluţiile $x_{3,4} = \frac{-\sqrt{10} \pm i\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare $a = \frac{\sqrt{10} - i\sqrt{2}}{2}$ este una dintre soluţiile lui $f(x) \Rightarrow f(a) = 0$.	1p 3p 1p
b)	Din punctul anterior se observă că funcţia $f(x) = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = \frac{\sqrt{10} \pm i\sqrt{2}}{2}$ şi	2p

	$x_{3,4}=\frac{-\sqrt{10}\pm i\sqrt{2}}{2}$. Putem descompune $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, cu $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ stabilite anterior. Deci polinomul f este reductibil peste $\mathbb{C}_{[x]}$. Dar funţia $f(x)$ poate fi descompusă şi astfel $f(x)=x^4-4x^2+9=(x^2+3)^2-10x^2=\left(x^2-\sqrt{10}x+3\right)\left(x^2+\sqrt{10}x+3\right)$. Deoarece coeficienţii aparţin mulţimii $\mathbb{R}$ rezultă că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{R}_{[x]}$. Din cele stabilite anterior se observă cu uşurinţă că polinomul f nu este reductibil peste $\mathbb{Q}_{[x]}$.	2p 1p
c)	Notăm cu $S_n=a_1^n+a_2^n+a_3^n+a_4^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. a_1 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_1^4-4a_1^2+9=0$ a_2 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_2^4-4a_2^2+9=0$ a_3 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_3^4-4a_3^2+9=0$ a_4 soluţie a funcţiei $f(x)\Rightarrow a_4^4-4a_3^2+9=0$ Prin adunarea acestor relaţii se obţine: $(a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4)-4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+36=0 \Leftrightarrow S_4-4S_2+36=0$ Deoarece $S_2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=8 \Rightarrow S_4=-36+4\cdot 8=-4$ Se deduce că $S_6-4S_4+36S_2=0 \Rightarrow S_6=4\cdot(-4)-36\cdot 8=-304$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Se verifică prin calcul. $f'(x)=[\ln(1+x)-x]'=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-1-x}{1+x}=\frac{-x}{1+x}$ $g'(x)=\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$	3p 2p

b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'_{(x)} > 0, \forall x \in (-1,0)$ şi $f'(x) < 0, \forall x \in [0,\infty) \Rightarrow x = 0$ este punct de maxim, deci $f(0)$ este valoare maximă, prin urmare $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0, \forall \epsilon(-1,\infty)$ $g'(x) > 0, \forall x \in (-1,0)$ şi $g'(x) > 0, \forall x \in [0,\infty) \Rightarrow x = 0$ este punct de minim, deci $g(x) > 0$ este valoare minimă, prin urmare $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$. Deci $f(x) < 0 < g(x), \forall x > 0$.	2p 2p 1p
c)	Din punctul anterior avem $\ln(1+x) - x < 0 < \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -x < -\ln(1+x) < -x + \frac{x^2}{2}$ $\Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0$. Vom avea $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$ $\frac{3}{n^2} - \frac{3^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{3}{n^4}\right) < \frac{3}{n^2}$ .... $\frac{2n-1}{n^2} - \frac{(2n-1)^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{2n-1}{n^2}$ Adunând aceste inegalităţile de mai sus obţinem: $\frac{1}{n^2}(1+3+\cdots+2n-1) - \frac{1}{2n^4}(1+3^2+\cdots+(2n-1)^2) < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) +$ $+ \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}(1+3+\cdots+2n-1) \Leftrightarrow$ $1 - \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} < \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) < 1$.Trecând la limită şi aplicând teorema cleştelui , obţinem $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2}\right) = 1$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n(4n^2-1)}{6n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{6n^3} = 0$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	Avem $f(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 =$ $= 2003$.	3p 2p
b)	$F'_{(x)} = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)' = \left(F_{(t)}\Big\vert_0^x\right)' = \left(F_{(x)} - F_{(0)}\right)' =$ $= f(x) - 0 = f(x)$.	3p 2p

c)	Pentru a calcula $\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$, ştiind că funcţia $g(x) = F_{(x)}^{-1}$ facem schimbarea de variabilă $g(x) = t \Rightarrow x = F_{(t)}$ şi $dx = f(t)\,dt$	2p
	Pentru $x = 0$ avem $F_{(t)} = 0$, deci $t = 0$ iar pentru $x = a$, avem $F_{(t)} = a = F_{(1)}$, adică $t = 1$, deoarece $F_{(x)} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2003}}{2003}$. Deci	1p
	$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t + t^2 + t^3 + \dots + t^{2003})\,\mathrm{d}t \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + \frac{t^{2004}}{20}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004}$	2p