BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 31

Prof: Gaga Loghin.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\dots\cdot i^{20}=i^{1+2+3+\dots+20}=i^{\frac{20\cdot 21}{2}}=i^{210}$	2p
	$210=4\cdot 52+2$	1p
	$i^{210}=i^{4\cdot 52+2}=i^2=-1$	2p
2.	O funcție este injectivă pe un interval dacă este strict monotonă pe acel interval	1p
	$f'(x)=3x^2+1>0$	2p
	Derivata întâi este pozitivă, strict, deci funcția f(x) fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică injectivă	2p
3.	$16^x+5\cdot 4^{x+1}-21=0\Leftrightarrow 4^{2x}+20\cdot 4^x-21=0$	1p
	Notez $4^x=t;t>0\Rightarrow t^2+20t-21=0\Rightarrow t_1=1,t_2=-21$, care nu corespunde	2p
	Din $4^x=1\Rightarrow 4^x=4^0\Rightarrow x=0$	2p
4.	$p=\frac{c_f}{c_p}$; $c_p=900$, numărul de numere de câte 3 cifre.	1p
	Conform enunțului, avem următoarele forme de numere: numere de forma $\overline{aab}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$. Numere de forma $\overline{aba}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$. Numere de forma $\overline{baa}$. Numărul de numere de această formă este $9\cdot 9=81$.	3p
	Deci, numărul de cazuri favorabile este $c_f=81\cdot 3=243$, iar $p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}=0,27$	1p
5.	Mediana din vârful A cade pe mijlocul laturii BC. Fie M mijlocul laturii BC. Avem	2p

	$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2, y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4-2}{2}=1$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2=0$. Ecuația dreptei AM este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2=0$	3p
6.	$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$ $tg\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=3$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det M=m+m-1-m^2=-m^2+2m-1=-\left(m^2-2m+1\right)=-\left(m-1\right)^2$	5pp
b)	Pentru $m=1\Rightarrow rangM=2$. Necunoscute principale: y, z; necunoscuta secundară $x=a\in\mathbb{R}$. Ecuații principale: primele două. Sistemul devine $\begin{cases} y+z=3-a \\ y=-1-a \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=4 \\ y=-1-a \end{cases}\Rightarrow S\{a,-1-a,4\}$	3p 2p
c)	Sistemul este incompatibil dacă rangul matricei sistemului este $\neq$ de rangul matricei extinse. Pentru $m\neq1\Rightarrow rangM=3$. Fie matricea extinsă $\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ m & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $d_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=0-1+3m-0-3+m=4m-4=4\left(m-1\right)\neq0$ $d_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=0-1+3m-0-3+m=4m-4=4\left(m-1\right)\neq0$, deci rang $\overline{M}$ =3 și sistemul este	1p 2p 2p

	compatibil, $\forall m \in \mathbb{R}$.	
2. a)	$x * y = 2xy - 4x - 4y + 8 + 5a - 8 = 2x(y-2) - 4(y-2) + 5a - 8 =$ $= 2(x-2)(y-2) + 4(a-2) + a > a,\ \forall a > 2$	5p
b)	Se verifică imediat că operația este corect definită, că este asociativă și comutativă. Elementul neutru este unic și avem: $x * e = x \Rightarrow 2xe - 4x - 4e + 5a = x \Leftrightarrow 2e(x-2) = 5(x-a) \Rightarrow a = 2$ și $e = \frac{5}{2}$ Elementul simetrizabil se verifică imediat	2p 3p
c)	f este bijectivă, fiind funcție de gradul I, strict crescătoare. $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ Verificăm relația $f(x * y) = 2(2xy - 4x - 4y + 10) - 4 = 4xy - 8x - 8y + 16$ $f(x) \cdot f(y) = (2x-4) \cdot (2y-4) = 4xy - 8x - 8y + 16$ $f(x * y) = 2(2xy - 4x - 4y + 10) - 4 = 4xy - 8x - 8y + 16$ $f(x) \cdot f(y) = (2x-4) \cdot (2y-4) = 4xy - 8x - 8y + 16$ Deci grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2}$ $f''(x) = \frac{4(x+1)^2 - 8x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{4(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4} = \frac{4(1-x)}{(x+1)^3}$	2p 3p
b)	Monotonia depinde de semnul derivatei I. Pentru $x \geq 0$ f(x) este crescătoare; pentru $x < 0$, f(x) este descrescătosre Determinăm semnul derivatei a doua și obținem: pentru $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$, $f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ f(x) este concavă; pentru $x \in (-1, 1)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f(x) este convexă	2p 2p 1p

c)	$g\left(x^k\right)=f\left(x^k\right)+f\left(\frac{1}{x^k}\right)=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{\frac{1}{x^{2k}}-1}{\frac{1}{x^{2k}}+1}=\frac{x^{2k}-1}{x^{2k}+1}+\frac{1-x^{2k}}{x^{2k}+1}=0$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+\dots+g\left(x^{2011}\right)+x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{2013}}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to 2}x=2$	3p 2p
2. a)	$I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big\|_0^1=\frac{\pi}{4}$ $I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u'}{u}dx=\frac{1}{2}\ln\|u\|\Big\|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$	2p 3p
b)	Fie $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x^n\ge x^{n+1}$. Deoarece $\Rightarrow\frac{x^n}{x^2+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\Rightarrow\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\ge\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}$ $I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}\le 2I_n\Rightarrow I_n\ge\frac{1}{2(n+1)}$ $\frac{1}{n-1}=I_n+I_{n-2}\ge 2I_n\Rightarrow I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$ $\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)},\ n\ge 2$	2p 1p 2p
c)	$\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}\Big\|\cdot n\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{2(n-1)}\ \Big\|-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\le nI_n-\frac{1}{3}\le\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n+1)}-\frac{1}{3}\right]\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n-1)}-\frac{1}{3}\right]$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{6(n+1)}\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{6(n+1)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(nI_n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$	2p 3p