REVISTA ELECTRONICĂ MATEINFO.RO

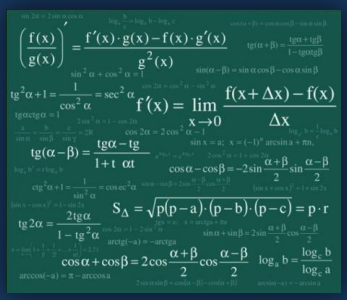
ISSN 2065-6432 - FERUARIE 2016

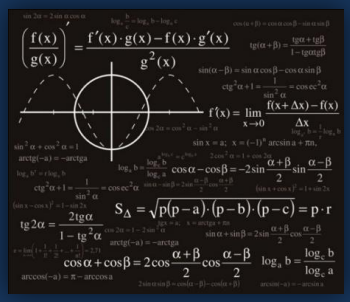
www.mateinfo.ro

REVISTĂ LUNARĂ

DIN FEBRUARIE 2009

revista@mateinfo.ro





COORDONATOR: ANDREI OCTAVIAN DOBRE

REDACTORI PRINCIPALI ŞI SUSŢINĂTOR PERMANENŢI AI REVISTEI

NECULAI STANCIU, ROXANA MIHAELA STANCIU ŞI NELA CICEU

1. **Some solutions to some problems from Octogon Mathematical Magazine…pag. 2**
Neculai Stanciu, Titu Zvonaru

2. **Numere celebre (II) ... pag.12**
George Florin Șerban

3. **Cum arătăm că două drepte sunt paralele...pag. 15**
Mihaela Molodeț

4. **Matematica, o lume a contrastelor ... pag. 22**
Mihaela Molodeț

5. **Soluții - Problema lunii ianuarie IANUARIE 2016 ... pag. 24**
Propusa de Andrei Octavian Dobre

6. **CONCURS - Problema lunii FEBRUARIE 2016 ... pag. 29**
Constantin Telteu

7. **Simulare BAC Matematică – profil mate-info FEBRUARIE 2016 ... pag. 30**
8. **Simulare Evaluare Națională Matematică – FEBRUARIE 2016 ... pag. 35**

1. SOME SOLUTIONS TO SOME PROBLEMS FROM OCTOGON MATHEMATICAL MAGAZINE

- *Dedicated to 80th Anniversary of D.M. Bătineţu-Giurgiu* -

By Neculai Stanciu, ''G. E. Palade'' School, Buzău, Romania and
Titu Zvonaru, Comănești, Romania

PP. 22345. If $a_k > 0$ $(k = 1,2,...n)$, then $\sum_{cyclic} \frac{(2a_1 + a_2)(3a_1^2 + a_1a_2 + 2a_2^2)}{2a_1^2 + a_2^2} \le 6\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution. We have inequality

$$\frac{(2x+y)(3x^2+xy+2y^2)}{2x^2+y^2} \le 3(x+y),\ x, y > 0 .$$

Indeed,

$$\frac{(2x+y)(3x^2+xy+2y^2)}{2x^2+y^2} \le 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + 3x^2y + xy^2 + 2y^3 \le 6x^3 + 3xy^2 + 6x^2y + 3y^3$$

$$\Leftrightarrow y^3 + x^2y \ge 2xy^2 \Leftrightarrow y(x-y)^2 \ge 0 \text{, true.}$$

Hence

$$\sum_{cyclic} \frac{(2a_1 + a_2)(3a_1^2 + a_1a_2 + 2a_2^2)}{2a_1^2 + a_2^2} \le \sum_{cyclic} 3(a_1 + a_2) = 6\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ , and we are done.}$$

PP. 22346. If $a_k > 0$ $(k = 1,2,..., n)$, then $\sum_{cyclic} \frac{2a_1^3 + 2a_1^2 - a_1a_2^2 + a_2^3}{(a_1 + a_2)(2a_1 + a_2)} \ge \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solution. The inequality is not true; if we take $a_k = 1,\ k = 1,2,..., n$ yields the $\frac{2n}{3} \ge n$.

PP. 22347. If $x_k > 0$ $(k = 1,2,..., n)$, then $\sum_{cyclic} \sqrt{x_1(x_1 + 2x_2)} \le \sqrt{3}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Solution. Using AM-GM inequality we have

$$\sqrt{x_1(x_1+2x_2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(3x_1)(x_1+2x_2)} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3x_1 + x_1 + 2x_2}{2} = \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \text{ and then}$$

$$\sum_{cyclic} \sqrt{x_1(x_1+2x_2)} \le \sum_{cyclic} \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{n} x_k = \sqrt{3}\sum_{k=1}^{n} x_k \text{ , and we are done.}$$

PP. 22348. If $a,b>0$, then

$$\frac{(3a^2+ab+2b^2)(2a^2+ab+3b^2)}{(a+b)^2}\le\frac{9(2a^2+b^2)(2b^2+a^2)}{(2a+b)(2b+a)}.$$

Solution 1. After some algebra

$$\frac{(3a^2+ab+2b^2)(2a^2+ab+3b^2)}{(a+b)^2}\le\frac{9(2a^2+b^2)(2b^2+a^2)}{(2a+b)(2b+a)}$$

$\Leftrightarrow 3a^6-2a^5b-a^4b^2-a^2b^4-2ab^5+3b^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(3a^4+4a^3b+4a^2b^2+4ab^3+3b^4)\ge 0$, true.

Solution 2. By AM-GM inequality we have

$(2a+b)(2b+a)\le\left(\frac{2a+b+2b+a}{2}\right)^2=\frac{9(a+b)^2}{4}$ and then it remains to prove that

$$(3a^2+ab+2b^2)(2a^2+ab+3b^2)\le 4(2a^2+b^2)(2b^2+a^2)$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(2a^2-ab+2b^2)\ge 0$, true because

$$2a^2-ab+2b^2=a^2+b^2+\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0.$$

We are done.

PP. 22349. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $2^n\prod_{cyclic}\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\le\prod_{cyclic}\frac{4a_1^2-a_1a_2+3a_2^2}{2a_1+a_2}$.

Solution. We have the inequality $\frac{2(x^2+y^2)}{x+y}\le\frac{4x^2-xy+3y^2}{2x+y}$, $x,y>0$.

Indeed,

$$\frac{2(x^2+y^2)}{x+y}\le\frac{4x^2-xy+3y^2}{2x+y}$$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(4x+2y)\le(x+y)(4x^2-xy+3y^2)\Leftrightarrow y(x-y)^2\ge 0$.

Hence

$$2^n\prod_{cyclic}\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\le\prod_{cyclic}\frac{4a_1^2-a_1a_2+3a_2^2}{2a_1+a_2}.$$

The proof is complete.

PP. 22350. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $\sum_{cyclic}\frac{a_1(a_1+a_2)}{4a_1^2+a_1a_2+a_2^2}\le\frac{n}{3}$.

Solution. The inequality yields by

$$\frac{a_1(a_1+a_2)}{4a_1^2+a_1a_2+a_2^2}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow 4a_1^2+a_1a_2+a_2^2\ge 3a_1^2+3a_1a_2\Leftrightarrow (a_1-a_2)^2\ge 0.$$

Remark. Since $4a_1^2+a_1a_2+a_2^2=3a_1^2+(a_1+\frac{a_2^2}{4})^2+\frac{3a_2^2}{4}\ge 0$, the given inequality is true for $a_k\in R, a_k\ne 0$.

The proof is complete.

PP. 22351. If $\lambda, a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then

$$\sum_{cyclic}\frac{(\lambda a_1^2+a_2^2)(\lambda a_2^2+a_1^2)}{a_1a_2}\ge(\lambda^2+1)(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2 .$$

Solution. We use the inequality

$$\frac{(\lambda x^2+y^2)(\lambda y^2+x^2)}{xy}\ge(\lambda^2+1)xy+\lambda(x^2+y^2),\ x,y>0,\ (1).$$

Indeed (1) is written successively

$$\lambda(x^4+y^4)+(\lambda^2+1)x^2y^2\ge(\lambda^2+1)x^2y^2+\lambda xy(x^2+y^2)$$

$\Leftrightarrow x^4+y^4\ge xy(x^2+y^2)\Leftrightarrow (x^3-y^3)(x-y)\ge 0$, true.

Writing (1) for the pairs of numbers $(a_1,a_2),(a_2,a_3)$, …, (a_1,a_n) and adding we obtain the desired result.

PP. 22353. If $a_k>0$ $(k=1,2,...,n)$, then $\prod_{cyclic}\left(\frac{2a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{2a_1}\right)\ge\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Solution. We have the inequality

$$\frac{2x}{x+y}+\frac{y}{2x}\ge\frac{3}{2},\ \forall x,y>0.$$

Indeed,

$$\frac{2x}{x+y}+\frac{y}{2x}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4x^2+xy+y^2\ge 3x^2+3xy\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0.$$

Hence,

$$\prod_{cyclic}\left(\frac{2a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{2a_1}\right)\ge\prod_{cyclic}\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$ and we are done.

PP. 22359. If $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, then $(1+2tg^2x)(1+2ctg^2x)\left(1+\frac{2}{\sin^2x\cos^2x}\right)\le\frac{1}{4}$.

Solution. The given inequality is false.

For $x=\frac{\pi}{4}$, we have $tgx=ctgx=1$, $\sin^2 x=\cos^2 x=\frac{1}{2}$ and then

$(1+2tg^2x)(1+2ctg^2x)\left(1+\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)=9\cdot\left(1+\frac{2}{\frac{1}{4}}\right)=81>\frac{1}{4}$, and we are done.

PP. 22375. If $a,b,c>0$, then $\frac{1}{27}\left(1+\frac{abc+\sum a^3}{2abc+\sum ab(a+b)}\right)^3\geq\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Solution. Since $2\sum a^3=\sum(a^3+b^3)\geq\sum ab(a+b)$, we have

$$\frac{abc+\sum a^3}{2abc+\sum ab(a+b)}=\frac{2abc+2\sum a^3}{2\left(2abc+\sum ab(a+b)\right)}\geq\frac{2abc+\sum ab(a+b)}{2\left(2abc+\sum ab(a+b)\right)}=\frac{1}{2},$$

and then it suffices to show that

$$\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\geq\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$, which is the inequality of Cesaro.

The proof is complete.

PP. 22376. If $a,b,c>0$, then $\sum\frac{a}{b+c}\geq 1+\frac{4abc}{2abc+\sum ab(a+b)}$.

Solution. Since $\sum\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$ (Nesbitt) it suffices to prove that

$\frac{1}{2}\geq\frac{4abc}{2abc+\sum ab(a+b)}\Leftrightarrow\sum ab(a+b)\geq 6abc$, which yields by AM-GM inequality

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc$, and the proof is complete.

PP. 22404. In all triangle ABC holds $\sum\frac{1}{m_am_b}\geq\frac{36}{5s^2-3r^2-12Rr}$.

Solution. By Bergström's inequality and the point (1) from PP.22197, we obtain

$$\sum\frac{1}{m_am_b}\geq\frac{9}{\sum m_am_b}\geq\frac{36}{5s^2-3r^2-12Rr},$$ and we are done.

PP. 22414. Prove that $\sum_{k=1}^{n}\frac{5k^2+7k+3}{(k^2+5k+6)(k^2+k)^3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n^2+5n+6)(n+1)^3}$.

Solution. Since

$$\frac{5k^2+7k+3}{(k^2+5k+6)(k^2+k)^3}=\frac{1}{k^3(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)^3(k+2)(k+3)}$$

we have a telescopic sum

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5k^2+7k+3}{(k^2+5k+6)(k^2+k)^3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^3(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)^3(k+2)(k+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)^3(n+2)(n+3)}=\frac{1}{6}-\frac{1}{(n^2+5n+6)(n+1)^3}$$, and we are done.

PP. 22416. Evaluate $\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)(k^2+k-1)k!$.

Solution. Since $(k^2+3k+2)k!=(k+1)(k+2)k!=(k+2)!$, we have

$$(k^2+3k+2)(k^2+k-1)k!=(k+2)!(-k+2+k^2+2k-3)=$$

$$=-(k-2)(k+2)!+(k+2)!(k-1)(k+3)=-(k-2)(k+2)!+(k-1)(k+3)!.$$

Hence

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)(k^2+k-1)k!=-(-1)\cdot 3!+0\cdot 4!-0\cdot 4!+1\cdot 5!-1\cdot 5!+2\cdot 6!-\ldots+$$

$$+\ldots-(n-3)(n+1)!+(n-2)(n+2)!-(n-2)(n+2)!+(n-1)(n+3)!=(n-1)(n+3)!+6,$$

and we are done.

PP. 22419= PP. 22422. If $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ and $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, then

$$\sum_{cyclic}\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_k+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}+2k}\le\frac{n}{4k}.$$

Solution. Since $a_1+\frac{1}{a_1}\ge 2$, $a_2+\frac{1}{a_2}\ge 2,\ldots,a_k+\frac{1}{a_k}\ge 2$, we have

$$\sum_{cyclic}\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_k+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}+2k}\le\sum_{cyclic}\frac{1}{\underbrace{2+2+\ldots+2}_{k}+2k}=\frac{n}{4k}.$$

The proof is complete.

PP. 22420. If $x,y,z>0$, then $\sum\frac{yz}{x(y+z)+2yz}\le\frac{3}{4}$.

Solution. We denote $a=yz, b=zx, c=xy$ and we have to prove that

$$\sum \frac{a}{2a+b+c} \le \frac{3}{4}.$$

Solution 1. We use the inequality $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, and we have

$$\sum \frac{a}{2a+b+c} = \sum \frac{a}{(a+b)+(a+c)} \le$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right) = \frac{3}{4}.$$

Solution 2. In the solution of PP. 21958 we prove the identity

$$\sum \frac{a}{2a+b+c} - \frac{3}{4} = -\sum \frac{(a-b)^2}{4(2a+b+c)(a+2b+c)},$$

which yields the conclusion.

PP. 22421. If $a,b,c>0$ and $abc=1$, then $\sum \frac{1}{(a+c)b+a+b+4} \le \frac{3}{8}$.

Solution. Since $abc=1$ there exists $x,y,z>0$ such that $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$.

We have

$$(a+c)b+a+b+4 = \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+4 =$$

$$= \frac{x+y}{z}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4 \ge \frac{x+y+6z}{z}.$$

Then we have to prove that

$$\sum \frac{z}{x+y+6z} \le \frac{3}{8}.$$

We can write

$$\sum\left(\frac{z}{x+y+6z}-\frac{1}{8}\right) = \sum \frac{z-x}{8(x+y+6z)} + \sum \frac{z-y}{8(x+y+6z)} =$$

$$= \sum \frac{z-x}{8(x+y+6z)} + \sum \frac{x-z}{8(6x+y+z)} = \sum (x-z)\left(\frac{1}{8(6x+y+z)} - \frac{1}{8(x+y+6z)}\right) =$$

$$= \sum \frac{(x-z)(x+y+6z-6x-y-z)}{8(6x+y+z)(x+y+6z)} = -\sum \frac{5(x-z)^2}{8(6x+y+z)(x+y+6z)} \le 0.$$

So $\sum \frac{z}{x+y+6z} \le \frac{3}{8}$, and we are done.

PP. 22425. In all triangle ABC holds $24rRs + \sum a(b-c)^2 \ge \frac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{s}$.

Solution. Since $4Rrs = abc$, $s^2 + r^2 + 4Rr = ab + bc + ca$, the given inequality is written as

$$6abc + \sum a^2b + \sum ab^2 - 6abc \geq \frac{2\left(\sum ab\right)^2}{\sum a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum a\right)\left(\sum a^2b + \sum ab^2\right) \geq 2\left(\sum ab\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3b + \sum ab^3 + 2\sum a^2bc + 2\sum a^2b^2 \geq 2\sum a^2b^2 + 4\sum a^2bc$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3b + \sum ab^3 \geq 2\sum a^2bc$$

$\Leftrightarrow \sum_{sym} a^3b \geq \sum_{sym} a^2bc$, true by Muirhead's inequality (because $[3,1,0] \succ [2,1,1]$).

The proof is complete.

PP. 22432. If $a,b,c \in C$ such that

$$\left(\frac{a}{40} + \frac{b}{24} - \frac{c}{15}\right)^3 + \left(\frac{b}{40} + \frac{c}{24} - \frac{a}{15}\right)^3 + \left(\frac{c}{40} + \frac{a}{24} - \frac{b}{15}\right)^3 = \frac{1}{14400}, \text{ then}$$

$$(3a + 5b - 8c)(3b + 5c - 8a)(3c + 5a - 8b) = 40.$$

Solution. Using the identity $\sum x^3 - 3xyz = \left(\sum x\right)\left(\sum x^2 - \sum xy\right)$ we deduce that

If $\sum x = 0$, then $\sum x^3 = 3xyz$.

Since $\frac{1}{40} + \frac{1}{24} - \frac{1}{15} = \frac{3+5-8}{120} = 0$, yields

$$\left(\frac{a}{40} + \frac{b}{24} - \frac{c}{15}\right) + \left(\frac{b}{40} + \frac{c}{24} - \frac{a}{15}\right) + \left(\frac{c}{40} + \frac{a}{24} - \frac{b}{15}\right) = 0, \text{then}$$

$$3\left(\frac{a}{40} + \frac{b}{24} - \frac{c}{15}\right)\left(\frac{b}{40} + \frac{c}{24} - \frac{a}{15}\right)\left(\frac{c}{40} + \frac{a}{24} - \frac{b}{15}\right) = \frac{1}{14400}$$

$\Leftrightarrow (3a + 5b - 8c)(3b + 5c - 8a)(3c + 5a - 8b) = 40$, and we are done.

PP. 22529. If $a,b,c > 0$, then $\sum \frac{a^{12}}{a^{12} + (b^3 + c^3)a^3b^3c^3} \geq 1$.

Solution. By Bergström's inequality we obtain

$$\sum \frac{a^{12}}{a^{12} + (b^3 + c^3)a^3b^3c^3} \geq \frac{\left(\sum a^6\right)^2}{\sum a^{12} + a^3b^3c^3 \sum (a^3 + b^3)}$$

and remains to prove that

$$\left(\sum a^6\right)^2 \geq \sum a^{12} + 2a^3b^3c^3 \sum a^3$$

$\Leftrightarrow \sum a^{12} + 2\sum a^6b^6 \geq \sum a^{12} + 2a^3b^3c^3 \sum a^3 \Leftrightarrow 2\sum a^6b^6 \geq 2\sum a^6b^3c^3$, which is true by Muirhead' s inequality (because $(6,6,0) \succ (6,3,3)$).

PP. 22550. Let KOL be any triangle and $P \in KL$. Let M be the symmetrical image of O relative to P and N the symmetrical image of O relative to KL. Determine all points P for which $KLMN$ is cyclic.

Solution. Let K' be a point on KL such that P is the midpoint of KK'. Because $OP = PM$ and $PK = PK'$ the quadrilateral $OKMK'$ is the parallelogram, so
$\angle K'OK = \angle K'MK$, (1)
On the other hand by symmetry we have
$\angle K'OK = \angle K'NK$, (2).
By (1) and (2) yields that $MNK'K$ is cyclic, i.e. the circumscribed circle of ΔKMN passs through K'.
If the quadrilateral $KLMN$ is cyclic, it must that the circumscribed circle of ΔKMN passs through L.
Hence the point P is midpoint of side KL.
Remark. The implication '' P is midpoint of side $KL \Rightarrow KLMN$ is cyclic'' is on the proposed problems in the 16th Mathematical Olympiad from Macedonia (see e.g. Crux No. 5/2012, Problem OC 24).

PP. 22551. If $a,b,c > 0$, then $\frac{4}{\sum a}\sum \frac{a^8+b^8}{(a^2+b^2)^2} + abc \ge \sum a^3$.

Solution. Using QM-AM inequality we have

$$(a^2+b^2)^2 \le 2(a^4+b^4),\ 2(a^8+b^8) \ge (a^4+b^4)^2$$

and then

$$4\cdot\frac{a^8+b^8}{(a^2+b^2)^2} \ge \frac{2(a^8+b^8)}{a^4+b^4} \ge a^4+b^4.$$

So it suffices to prove that

$$\sum(a^4+b^4)+abc\sum a \ge \sum a\sum a^3$$
$$\Leftrightarrow 2\sum a^4 + abc\sum a \ge \sum a^4 + \sum a^3b + \sum ab^3$$
$$\Leftrightarrow \sum a^4 + abc\sum a \ge \sum a^3b + \sum ab^3$$
$$\Leftrightarrow \sum a^2(a-b)(a-c) \ge 0$$, which is Schur's inequality, and we are done.

PP. 22554. If $a,b > 0$, then $\frac{24(a^8+b^8)}{(2a+b)(a+2b)(a^2+b^2)^2} + 4ab \ge 3(a^2+b^2)$.

Solution. The given inequality is not true; e.g. for $a = b$ we obtain that $\frac{4}{3} + 4 \ge 6$, false.

PP. 22556. Solve the equation $8x^8 - 17x^7 + 8x^6 + 2x^4 + 8x^2 - 17x + 8 = 0$.

Solution. The given equation is written

$$(x-1)^2(8x^6-x^5-2x^4-3x^3-2x^2-x+8)=0.$$

We obtain $x_1=x_2=1$ and it remains the equation

$$8x^6-x^5-2x^4-3x^3-2x^2-x+8=0.$$

Becauase $x=0$ is not solution we can divide by x^3 and we obtain

$$8\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-(x^2+\frac{1}{x^2})-2(x+\frac{1}{x})-3=0 \qquad (1)$$

We denote $x+\frac{1}{x}=t$ and we have $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$ and then the equation (1) becomes

$$8(t^3-3t)-(t^2-2)-2t-3=0$$

$\Leftrightarrow 8t^3-t^2-26t-1=0$, which can solved by Cardano's formulas (exercices).

PP. 22579. The triangle ABC is equilateral if and only if $\sin A\sin B\sin C=(\cos A+\cos B)(\cos B+\cos C)(\cos C+\cos A)$.

Solution. If the triangle ABC is equilateral, we have $\cos A=\cos B=\cos C=\frac{1}{2}$ and $\sin A=\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$, then the relation from enunciation is not true.

PP. 22599. In all scalene triangle ABC holds $\sum\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}\ge\frac{9}{4}$.

Solution. We shall prove the stronger inequality $\sum\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}\ge\frac{9}{4}$.

We have

$$a^2-ab+b^2=\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{3(a-b)^2}{4}\ge\frac{3(a-b)^2}{4} \text{ and then}$$

$$\sum\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}\ge\sum\frac{3}{4}\cdot\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=\frac{9}{4}.$$

PP. 22614. The roots of equation $x^3+ax^2+bx+c=0$ are in arithmetical progression if and only if $4a^3=9ab+27c$.

Solution. The condition $4a^3=9ab+27c$ is wrong; e.g. for $a=-6, b=11, c=-6$ the equation has the roots 1,2,3 but $4a^3\ne 9ab+27c$.

The correct condition is $2a^3=9ab-27c$.

If the roots x_1,x_2,x_3 are in arithmetical progression, then

$$2x_2 = x_1 + x_3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{a}{3} \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} = \frac{ab}{3} - c \Leftrightarrow 2a^3 = 9ab - 27c.$$

PP. 22645. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\sqrt[3]{\log_{k+1}^2 k \log_{k+1}(k+2)}} \le \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Solution. By AM-GM inequality we have

$$\sqrt[3]{(\log_{k+1} k)(\log_{k+1} k)(\log_{k+1}(k+2))} \le \frac{\log_{k+1} k + \log_{k+1} k + \log_{k+1}(k+2)}{3} =$$

$$= \log_{k+1}\sqrt[3]{k^2(k+2)},$$

then

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{\sqrt[3]{\log_{k+1}^2 k \log_{k+1}(k+2)}} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k^2(k+2)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

and the proof is complete.

PP. 22702. If $a,b,c>0$, then $2\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^4 - \sum a^2b^2\right) \ge (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.

Solution. Since $2\left(\sum a^2\right)\left(\sum a^4 - \sum a^2b^2\right) = \sum a^6 - 3a^2b^2c^2$ and
$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = \sum a^4b^2 + \sum a^2b^4 + 2\sum a^3b^2c^2 + 2\sum a^3bc^2 - 2\sum a^3b^3 -$
$-2\sum a^4bc - 6a^2b^2c^2$, the given inequality is written as

$$2\sum a^6 + 2\sum a^3b^3 + 2\sum a^4bc \ge \sum a^4b^2 + \sum a^2b^4 + 2\sum a^3b^2c + 2\sum a^3bc^2, \ (1).$$

Because $[6,0,0] \succ [4,2,0]$; $[3,3,0] \succ [3,2,1]$ and $[4,1,1] \succ [3,2,1]$ by Muirhead's inequality we have

$$\sum_{sym} a^6 \ge \sum_{sym} a^4b^2;\ \sum_{sym} a^3b^3 \ge \sum_{sym} a^3b^2c;\ \sum_{sym} a^4bc \ge \sum_{sym} a^3b^2c,$$

which by adding yields the desired inequality.
The proof is complete.

2. NUMERE CELEBRE (PARTEA A DOUA)

George-Florin Serban, profesor, Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" ,Braila

Numere perfecte.

1) Un numar se numeste perfect daca se scrie ca suma divizorilor sai mai putin el imsusi . De exemplu 6=1+2+3 este numar perfect . Aflati toate numerele perfecte care au exact 6 divizori .

Soluţie : Un numar natural cu 6 divizori naturali are formele $n = p^5$ **sau** $n = p^2 \cdot q$ **.**

Daca $n = p^5$**,** $p^5 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$**,** $p^5 = \frac{p^5 - 1}{p - 1}$ **,** $p^6 - p^5 = p^5 - 1$**,** $p^5 \cdot (p-2) = -1$

Fals. Daca $n = p^2 \cdot q$ **,** $p^2 \cdot q = 1 + p + p^2 + pq + q$ **,** $q \cdot (p^2 - p - 1) = p^2 + p + 1$ **, deci** $(p^2 - p - 1) \mid p^2 + p + 1$ **,** $(p^2 - p - 1) \mid p^2 - p - 1$ **,** $(p^2 - p - 1) \mid 2p + 2$ **, dar** $p^2 - p - 1 = p(p-1) - 1$ **impar , deci** $(p^2 - p - 1) \mid p + 1$ **, rezulta** $p^2 - p - 1 \le p + 1$ $p^2 - 2p - 2 \le 0$ **, p prim . Daca p=2 rezulta** $-2 \le 0$ **(A) . Daca** $p \ge 3$ **atunci** $p^2 - 2p - 2 = p(p-2) - 2 \ge 3 \cdot 1 - 2 = 1$ **fals . Deci p=2 , q=7 , n=28 .**

Numere palindromice .

2)Un numar se numeste palindrom daca este egal cu rasturnatul sau . Aflati numerele palindromice de 3 cifre care au 9 divizori naturali .

Soluţie : $\overline{abc} = \overline{cba}$ **, numerele sunt de forma** $\overline{aba}$ **,** $\overline{aba} = p^2 \cdot q^2$**, p si q prime sau** $\overline{aba} = p^8$**.**
Daca $\overline{aba} = p^2 \cdot q^2$ **, n este patrat perfect** $u(\overline{aba}) \in \{1,4,5,6,9\}$ **.Se gaseste** $\overline{aba} = 11^2 \cdot 2^2 = 121 \cdot 4 = 484$ **palindrom . Daca** $\overline{aba} = p^8$**, p=2 ,** $\overline{aba} = 2^8 = 256$ **(F) , daca** $p \ge 3$ **,** $\overline{aba} \ge 3^8 = 6561$ **(F).**

Numere Brown.

3)Perechile de numere intregi [m,n] cu proprietatea $n! + 1 = m^2$**. Aratati ca ecuatia are cel putin trei solutii .**
Solutie: Se gasesc solutiile : Se dau valori lui m , $(m,n) \in \{(5,4),(11,5),(71,7)\}$

Numere Euclid .

4) Numerele naturale de forma p_n+1 , unde p_n este produsul primilor n numere naturale prime , se numesc numere Euclid . Aratati ca un numar Euclid nu poate fi patrat perfect.

Soluţie : p_n **este de forma 4k+2 , deci** p_n+1 **va fi de forma 4k+3 , fals deoarece un patrat perfect nu poate avea forma 4k+3 .**

Numere Lucas-Carmichael .

5)Un numar natural n se numeste Lucas-Carmichael daca p este un factor prim din descompunerea lui n atunci $p+1 \mid n+1$.

a)Aratati ca 2015 este numar Lucas-Carmichael .

b) Aflati cel mai mic numar n , Lucas-Carmichael de forma $n=19\cdot p\cdot q$, p si q numere prime.

Solutie: a) $2015=5\cdot 13\cdot 31$, $6\mid 2016$, $14\mid 2016$, $32\mid 2016$ **(A)**

b) Daca p sau q sunt 2 , atunci n este par , rezulta $19\mid n$, $20\mid n+1$ **fals deoarece n+1 este impar.**

Daca p=3 si q=5 ,n=285 , $4\mid 286$ **(F). Daca p=3 si q=7 , n=399 ,** $4\mid 400$, $8\mid 400$, $20\mid 400$ **(A).**

Cel mai mic numar Lucas-Carmichael este 399.

Numere Kaprekar .

6) Un numar $\overline{ab}$ se numeste numar Kaprekar daca $\overline{ab}^2=\overline{xyzt}$ si $\overline{ab}=\overline{xy}+\overline{zt}$. (Cu conventia ca $\overline{0t}=t$, adica z poate fi si 0).Aflati toate numerele Kaprekar de doua cifre .

Solutie: $\overline{ab}^2=\overline{xy00}+\overline{zt}=100\cdot\overline{xy}+\overline{zt}=99\cdot\overline{xy}+\overline{xy}+\overline{zt}=99\cdot\overline{xy}+\overline{ab}$ **, rezulta** $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}-1)=99\cdot\overline{xy}$ **. Daca** $\overline{ab}\,\vdots\,3$ **, rezulta** $(\overline{ab}-1)\not\vdots\,3$**. Daca** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,3$ **, rezulta** $\overline{ab}\not\vdots\,3$ **.Rezulta** $\overline{ab}\,\vdots\,9$ **sau** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,9$ **. Dar** $99=9\cdot 11$, $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}-1)\,\vdots\,11$, $\overline{ab}\,\vdots\,11$ **sau** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,11$ **.**

Numerele divizibile cu 11 de doua cifre sunt de forma $\overline{aa}$ .Avem de analizat 4 cazuri.

-Daca $\overline{ab}\,\vdots\,11$ **si** $\overline{ab}\,\vdots\,9$, $\overline{ab}\,\vdots\,[11,9]=99$, $\overline{ab}=99$, $99^2=9801$, $99=98+01$ **(A).**

-Daca $\overline{ab}\,\vdots\,11$ **si** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,9$, $(\overline{aa}-1)\,\vdots\,9$ **, deci** $a=5$, $\overline{ab}=55$, $55^2=3025$, $55=30+25$ **(A).**

- Daca $\overline{ab}\,\vdots\,9$ **si** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,11$ **, din** $\overline{ab}\,\vdots\,9$ **rezulta** $\overline{ab}\in\{18,27,36,45,54,63,72,81\}$ **, singurul numar care verifica cele doua conditiile este** $\overline{ab}=45$, $45^2=2025$, $45=20+25$ **(A).**

-Daca $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,9$ **si** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,11$ **,din** $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,9$ **rezulta** $\overline{ab}\in\{10,19,28,37,46,55,64,73,82,91\}$

Nici un numar din aceata multime nu verifica conditia $(\overline{ab}-1)\,\vdots\,11$**.**

In concluzie , am gasit numerele Kaprekar 45 , 55 si 99 .

Produsul divizorilor unui numar natural $\pi(n)$

7)Aflati numerele naturale care au produsul divizorilor naturali egal cu 2015^{1029}

Solutie: Aplic formula $(\pi(n))^2 = n^{(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)}$ **,** $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ **,** $\pi(n) = 2015^{1029}$ **,**

$(2015^{1029})^2 = n^{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} = 5^{2058} \cdot 13^{2058} \cdot 31^{2058} = (p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3})^{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$

$5^{2058} \cdot 13^{2058} \cdot 31^{2058} = (p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3})^{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} = 5^{a_1(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} \cdot 13^{a_2(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)} \cdot 31^{a_3(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}$

$a_1 \cdot (a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot (a_3+1) = a_2 \cdot (a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot (a_3+1) = a_3 \cdot (a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot (a_3+1) = 2058$ **,**

$a_1 = a_2 = a_3 = x$ **,** $x \cdot (x+1)^3 = 6 \cdot 7^3$ **,** $x = 6$ **,** $n = 5^6 \cdot 13^6 \cdot 31^6 = 2015^6$ **. Deci** $n = 2015^6$ **.**

Bibliografie : "Enciclopedia matematica a claselor de numere intregi " , Marius Coman.

3. CUM ARĂTĂM CĂ DOUĂ DREPTE SUNT PARALELE

Prof. MIHAELA MOLODEȚ, Școala Gimnazială Berghin, Județul Alba

"A învăța matematică, înseamnă a învăța să gândești." Grigore Moisil

1. Arătăm că o pereche de unghiuri alterne-interne (sau alterne- externe sau corespondente) sunt congruente. (VI)

APLICAȚIE:

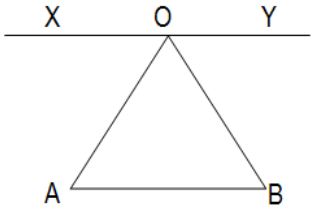
Prin vârful O al triunghiului ΔOAB isoscel ([OA]≡[OB]) se duce dreapta XY astfel încât O ∈(XY) și ∢XOA≡∢YOB. Arătați că XY ∥AB.

„Probleme de matematică pentru clasele V-VIII" L. NICULESCU, I. NANU ș.a.

Soluție:

$$\left.\begin{array}{l} m(\measuredangle OAB) + m(\measuredangle OBA) + m(\measuredangle AOB) = 180° \\ m(\measuredangle XOA) + m(\measuredangle YOB) + m(\measuredangle AOB) = 180° \\ m(\measuredangle OAB) = m(\measuredangle OBA)\ (\Delta AOB \text{ isoscel}) \\ m(\measuredangle XOA) = m(\measuredangle YOB) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m(\measuredangle OAB) = m(\measuredangle XOA) \\ \measuredangle OAB \text{ și } \measuredangle XOA \text{ sunt alterne interne} \end{array}\right\} \Rightarrow XY \parallel AB$$



2. Arătăm că dreptele sunt drepte- suport pentru laturile opuse ale unui paralelogram. (VII)

APLICAȚIE:

În triunghiul ΔABC, cu 2•AC= AB, avem (CM) mediană, iar D este simetricul lui A față de [CM].

Arătați că CD ∥AB și DM ∥AC.

Etapa locală, VÂLCEA 2009

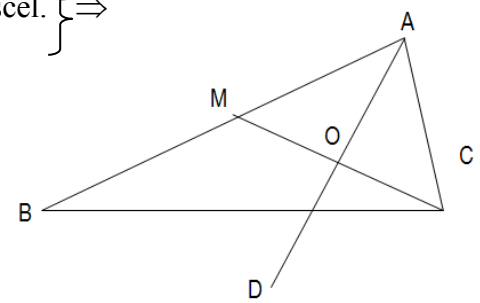
Soluție:

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ mijlocul lui } [AB] \text{ și } AB = 2\bullet AC \Rightarrow [AM] \equiv [AC] \Rightarrow \Delta AMC \text{ isoscel.} \\ \text{Dacă } AO \perp MC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A, O, D \text{ coliniare și } O \text{ este mijlocul lui } [MC] \\ \text{Dar } O \text{ este și mijlocul lui } [AD] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ diagonalele lui AMDC se înjumătățesc $\Rightarrow$

$\Rightarrow$AMDC paralelogram (chiar romb)



$\Rightarrow$ CD $\parallel$ AB si DM $\parallel$ AC.

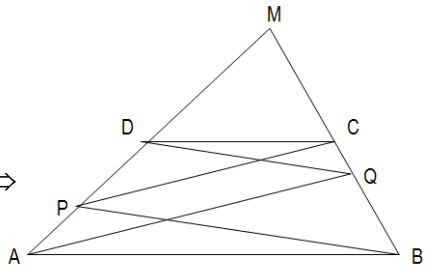
3. Folosim Reciproca teoremei lui Thales. (VII)

APLICAȚIE:

Fie ABCD trapez, cu AB $\parallel$ CD. Pe latura AD se ia punctul P, iar pe latura BC se ia punctul Q, astfel încât AQ $\parallel$ PC. Arătați că PB $\parallel$ DQ.

Concurs elevi, OLANDA, 1971

Soluție: Fie { M} =AD $\cap$ BC



În ΔMAB, CD $\parallel$ AB. Din teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MA}$ (1)

În ΔMAQ, PC $\parallel$ AQ. Din teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{MP}{MA} = \frac{MC}{MQ}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Din (1)} \Rightarrow MD = \dfrac{MA\cdot MC}{MB} \\ \text{Din (2)} \Rightarrow MP = \dfrac{MA\cdot MC}{MQ}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MD}{MP} = \frac{MA\cdot MC}{MB}\bullet\frac{MQ}{MA\cdot MC} = \frac{MQ}{MB} \Rightarrow$$

Din reciproca teoremei lui Thales $\Rightarrow$PB $\parallel$ DQ.

4. Folosim proprietatea liniei mijlocii (Caz particular pentru Reciproca teoremei lui Thales). (VII)

APLICAȚIE:

Se dau cercurile C_1(O, R) și C_2(O', r), tangente exterior, ca în figură. [AB] este diametrul perpendicular pe OO'', iar punctele M și N pe AB astfel încât AM= BN= r. Dacă P și Q sunt picioarele perpendicularelor din O pe MO', respectiv NO', arătați că PQ $\parallel$ AB.

Prof. MIHAELA MOLODEȚ

Soluție:

OO'= OM= ON= R+ r $\Rightarrow$

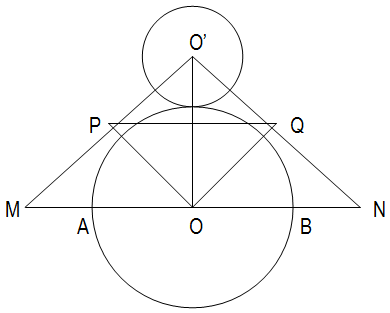
OO' $\perp$ AB

$\Rightarrow$ ΔMOO' și ΔNOO' sunt dreptunghice, isoscele $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P și Q sunt mijloacele laturilor [MO'] respectiv [NO'] $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [PQ] este linie mijlocie $\Rightarrow$

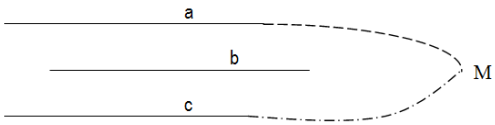
$\Rightarrow$ PQ $\parallel$ MN $\Rightarrow$ PQ $\parallel$ AB.



5. Prin reducere la absurd. (VI)

APLICAȚIE:

$a \parallel b$, $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$ (metodă prezentată la punctul 6)



Soluție:

Tranzitivitatea relației de paralelism este adevărată și în plan, și în spațiu.

În plan: Presupunem, prin absurd, că $a \cap c \neq \Phi$
(adică a și c nu sunt paralele)
Fie $\{M\} = a \cap c$. Daca $M \in b \Rightarrow a \cap b \neq \Phi$.Contradicție.
$\Rightarrow$ Presupunerea e falsă.

Daca $M \notin b \Rightarrow$ prin M trec doua drepte diferite, paralele cu b. Contradicție.

În spațiu: Analog.

6. Două drepte perpendiculare pe o a treia dreaptă sunt paralele. (Cele trei drepte trebuie să fie coplanare!). (VI)

7.

APLICAȚIE:

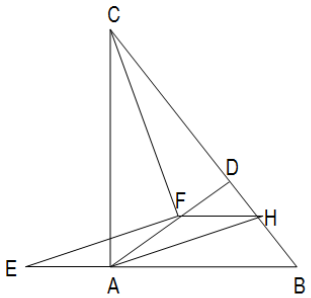
Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și fie AD înălțimea din A a triunghiului. Fie F $\in$ AD. Se duce perpendiculara în F pe CF care taie pe AB în E. Paralela din A la EF intersectează pe BC in H. Arătați că $AE \parallel HF$.

Concurs admitere Institutul Politehnic, 1986

Soluție:

$CF \perp EF$, iar $EF \parallel AH \Rightarrow CF \perp AH$
Dar $AD \perp BC$ $\Rightarrow$ in ΔAHC, F este ortocentru

$\Rightarrow HF \perp AC$
Dar $AB \perp AC$
Dreptele AB, HF și AC sunt coplanare $\Rightarrow AB \parallel HF \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AE \parallel HF$.



8. Folosim tranzitivitatea relației de paralelism (în plan și în spațiu). (VI / VIII)

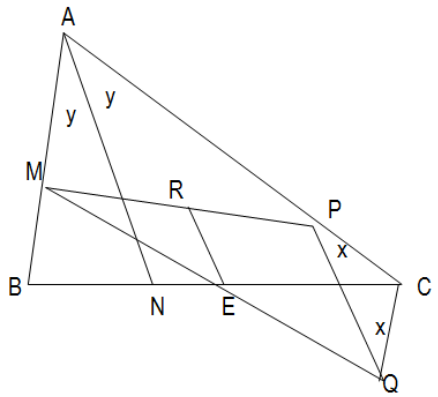
APLICAȚIE:

Fie ΔABC și punctele $M \in (AB)$ și $P \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CP]$. Dacă punctul Q este simetricul lui P față de mijlocul E al segmentului [BC], arătați că dreapta determinată de mijloacele segmentelor [BC] și [MP] este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.

Olimpiada Județeană, SUCEAVA 2011

Soluție:

Fie R mijlocul lui [MP] și $N \in BC$, a.î. (AN este bisectoarea $\prec BAC$
[ER] este linie mijlocie în $\Delta MPQ \Rightarrow ER \parallel PQ$ (1)
E mijlocul segmentelor [BC] și [MQ] $\Rightarrow$ MBQC paralelogram $\Rightarrow$
$\Rightarrow [BM] \parallel [QC]$ (2) și $[BM] \equiv [QC]$ (3)
Din (2) $\Rightarrow AM \parallel QC$ (4)
Din (3) și $[BM] \equiv [CP] \Rightarrow [CQ] \equiv [CP]$ (5)



Din (5) $\Rightarrow \Delta CPQ$ este isoscel $\Rightarrow \prec CPQ \equiv \prec CQP$ (fie x măsura lor)
$\prec MAN \equiv \prec CAN$ (fie y măsura lor)
Din (5) $\Rightarrow 2y+m(\prec PCQ) = 180°$
Dar $2x+m(\prec PCQ) = 180°$ $\Big\} \Rightarrow x=y \Rightarrow \prec NAC \equiv \prec QPC \Rightarrow$
$\Rightarrow AN \parallel PQ$ (6)
Din (1) si (6) $\Rightarrow ER \parallel AN$.

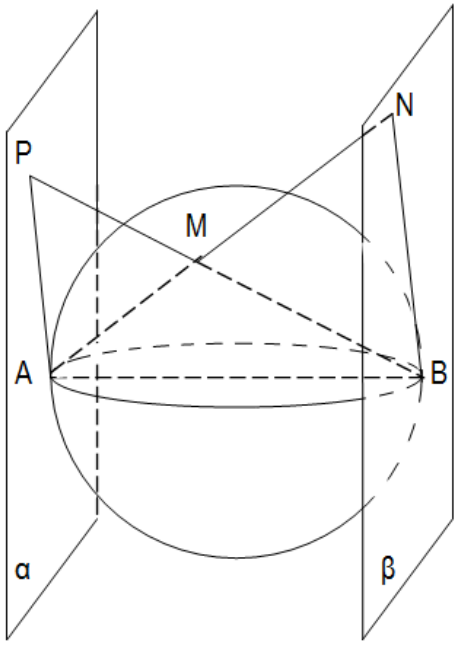
9. Folosim teorema „fierăstrăului”:

„Dacă un plan intersectează două plane paralele, atunci intersecțiile sunt drepte paralele”. (VIII)

APLICAȚIE:

Se dă sfera de diametru AB și M un punct variabil pe sferă, diferit de A și B. Dacă N și P sunt punctele în care AM și MB, respectiv, intersectează planele tangente la sferă în B și A, să se arate că produsul AP•BN nu depinde de poziția punctului M.

Problema lunii Ianuarie, Prof. ANDREI OCTAVIAN DOBRE



Soluție:

Fie α și β cele două plane tangente sferei în A respectiv B.
Avem: $AB \perp \alpha$, $AB \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (1)
Fie $\gamma = (AN, BP)$
Evident, $\alpha \cap \gamma = AP$ și $\beta \cap \gamma = BN$ (2)
Din (1) și (2) $\Rightarrow AP \parallel BN$ (3)
Din (3) avem două cazuri:

a) $PN \parallel AB \Rightarrow$ ABNP pătrat,
$\Rightarrow AB= PN= AP= BN= 2R$
$\Rightarrow AP \bullet BN = (2R)^2$= constant

b) $PN \nparallel AB \Rightarrow$ ABNP trapez
Evident, m(<AMB) = m(< PAB) = m(<ABN)= 90°
$\Rightarrow$ ABNP trapez dreptunghic, ortodiagonal
$\Rightarrow AP \bullet BN = AB^2 = (2R)^2$= constant

10. Folosim teorema de paralelism :

“Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, iar un al doiea plan care conține dreapta, se intersectează cu primul plan, o va face după o dreaptă paralelă cu dreapta dată. (VIII)

APLICAȚIE:

Se secționeaza un tetraedru regulat ABCD cu un plan paralel cu muchiile opuse AB și CD. Fie M, N, P, Q punctele de intersecție ale acestui plan respectiv cu muchiile AD, BD, BC, AC. Să se arate că MNPQ este dreptunghi.

“Probleme alese de matematică”, C. IONESCU ȚIU, M. POPESCU

Soluție:

$\left.\begin{array}{l} CD \parallel (MNP) \\ CD \subset (ACD) \\ (MNP) \cap (ACD) = QM \end{array}\right\} \Rightarrow QM \parallel CD$ (1)

Analog, $PN \parallel CD$ (2)

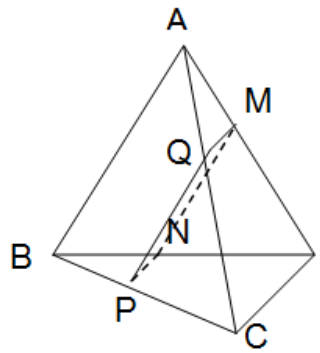
Din (1) și (2) $\Rightarrow QM \parallel PN$ (3)

Analog, $PQ \parallel MN$ (4)

ABCD tetraedru regulat $\Rightarrow AB \perp CD$ (5)

$\left.\begin{array}{l} \text{Din (1) și (5)} \Rightarrow AB \perp QM \\ PQ \parallel AB \text{ (analog cu (1))} \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \perp QM$ (6)

Din (3), (4) si (6) $\Rightarrow$ MNPQ dreptunghi.



11. Folosim teorema de paralelism :

"Două drepte perpendiculare pe un plan, sunt paralele". (VIII)

APLICAȚIE:

Fie paralelipipedul dreptunghic ALGORITM, cu $AL \neq AR$, iar U piciorul perpendicularei din A pe RL. Dacă Z este piciorul perpendicularei din I pe planul (RLG), arătați că ZIUA este paralelogram.

Prof. MIHAELA MOLODEȚ

Soluție:

$\left.\begin{array}{l} GL \perp (ALI) \\ AU \subset (ALI) \end{array}\right\} \Rightarrow GL \perp AU \Rightarrow AU \perp GL$ (1)

Dar $AU \perp RL$ (2)

RL, GL $\subset$ (RLG) (3)

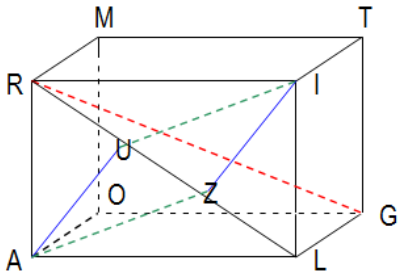
$RL \cap GL = \{L\}$ (4)

$\left.\begin{array}{l} \text{Din (1), (2), (3), (4)} \Rightarrow AU \perp (RLG) \\ \text{Cum } IZ \perp (RLG) \end{array}\right\} \Rightarrow AU \parallel IZ$

$\left.\begin{array}{l} \text{Mai mult, Z este un punct pe dreapta RL.} \\ \text{(Ducând perpendiculara IN din I pe RL, avem} \\ IN \perp (RLG)\text{, deci Z= N)} \\ \text{Evident, } \Delta ARU \equiv \Delta ILZ \text{ (cazul I.U.)} \Rightarrow [AU] \equiv [IZ] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ZIUA paralelogram.

(Condiția $AL \neq AR$ conduce la $U \neq Z$, necesară pentru ca ZIUA să fie patrulater)



12. Folosim teorema „Acoperișului":

„Dacă două drepte paralele sunt incluse în două plane diferite, care se intersecteaza în o a treia dreapta, atunci cele trei drepte sunt paralele". (VIII)

APLICAȚIE:

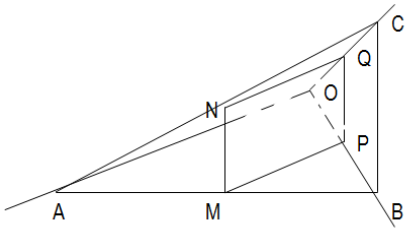
Pe trei semidrepte în spațiu cu originea în O se iau punctele A, B, C, iar pe segmentele [AB] și [AC], punctele M și N asa încât $MN \parallel BC$. Un plan care trece prin MN și e paralel cu OA taie pe OB în P și pe OC în Q. Arătați că MNQP este paralelogram.

GH. POPESCU, Lugoj, 1968

Soluție:

Fie α planul dat.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha \parallel OA \Rightarrow MP \parallel OA,\ NQ \parallel OA \Rightarrow MP \parallel NQ \\ \left.\begin{array}{l} MN \subset \alpha \\ BC \subset (OBC) \\ A \cap (OBC) = QP \\ MN \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \parallel QP \parallel MN \end{array}\right\} \Rightarrow MNQP \text{ paralelogram.} \end{array}\right.$$



13. Folosim calculul vectorial (IX)

APLICAȚIE:

Fie ABCD un patrulater convex, E mijlocul diagonalei [AC], iar F mijlocul diagonalei [BD]. Demonstrați că dacă

$\alpha\overline{EF} = \overline{AD} - \overline{BC}$, cu $\alpha \in R\setminus\{2\}$, atunci $AD \parallel BC$.

Etapa locală, TIMIȘ 2008

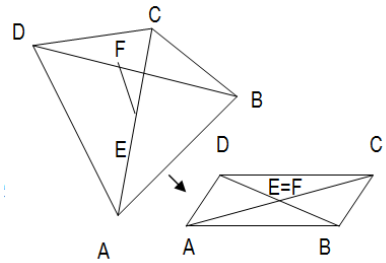
Soluție:

$$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CD}) + \overline{DC} + \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{CB}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$$

$$\alpha \bullet \overline{EF} = 2 \bullet \overline{EF} \Leftrightarrow (\alpha - 2) \bullet \overline{EF} = \overline{0}$$

$$\alpha \neq 2 \Rightarrow \overline{EF} = \overline{0} \Rightarrow E = F \Rightarrow ABCD \text{ paralelogram} \Rightarrow AD \parallel BC$$



14. Folosim teorema pantelor dreptelor:

„ Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au pantele egale”. (X)

APLICAȚIE:

Într-un trapez, linia mijlocie este paralelă cu bazele.

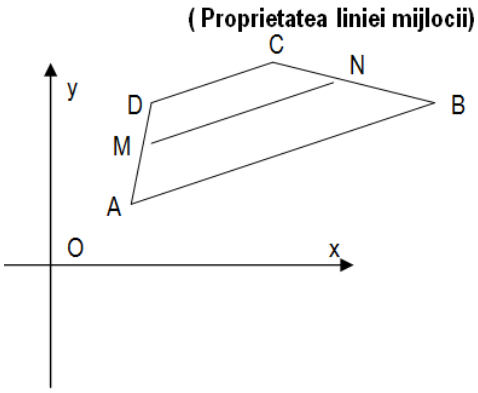
Soluție:

În reperul cartezian xOy, considerăm trapezul ABCD, cu $AB \parallel CD$,

Iar M și N respectiv mijloacele laturilor [AD] și [BC].

Daca $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$, vom avea:

$$\left.\begin{array}{l} M((x_A+x_D)/2, (y_A+y_D)/2) \\ N((x_B+x_C)/2, (y_B+y_C)/2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow m_{MN}=[(y_B+y_C)/2 - (y_A+y_D)/2)] / [(x_B+x_C)/2 - (x_A+x_D)/2)] =$

$= [(y_B+y_C) - (y_A+y_D)] / [(x_B+x_C) - (x_A+x_D)]=$

$= [(y_B-y_A) - (y_D-y_C)] / [(x_B-x_A) - (x_D-x_C)]$ (1)

Cum $AB \parallel CD \Rightarrow m_{AB}= m_{CD}$,

adică $(y_B-y_A)/ (x_B-x_A)= (y_D-y_C)/ (x_D-x_C) \Rightarrow$

$(y_B-y_A)= (y_D-y_C) (x_B-x_A)/ (x_D-x_C)$

Introducând aceasta relatie în (1), $\Rightarrow$

$\Rightarrow m_{MN}= \{(y_D-y_C)[(x_B-x_A) - (x_D-x_C)]\} / \{[(x_D-x_C)] [(x_B-x_A) - (x_D-x_C)]\}=$

$=(y_D-y_C)/ (x_D-x_C)= m_{CD}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} MN \parallel CD \\ \text{Dar } AB \parallel CD \end{array}\right\}$ $MN \parallel AB \Rightarrow$ linia mijlocie este paralelă cu bazele.

15. Folosim metode combinate

Sunt probleme care necesită o singură metodă pentru rezolvare - de exemplu aplicațiile de la punctele 1) sau 2) , iar altele care folosesc două sau mai multe metode - de exemplu aplicațiile de la punctele 3) sau 11). Avem alte situații când am folosit rezultatul de la o metodă, pentru a demonstra enunțul altei metode - de exemplu am arătat la punctul 5) proprietatea folosită la punctul 7). Uneori una sau mai multe metode sunt folosite ca parte componentă a altei demonstrații- de exemplu aplicațiile de la punctele 8) sau 10).

Cu siguranță, problemele propuse- de la cele mai simple până la cele complexe - pot avea și alte soluții. Inventivitatea, creativitatea și ingeniozitatea rezolvitorului sunt „ingredientele” de bază pentru descoperirea celei mai interesante dintre soluții. Propria imaginatie - singura limită!

Aș propune, pentru final**, TEOREMA LUI ȚIȚEICA,** a cărei demonstrație este bine-cunoscută, ca exemplu de rezolvare cu metode combinate.

4. MATEMATICA, O LUME A CONTRASTELOR

Prof. MIHAELA MOLODEȚ, Școala Gimnazială Berghin, Județul Alba

Rămâne matematica un stigmat al abstractului? Mulți ar fi tentați să spună DA. Însă, mai rămân suficienți de puțini care să răspundă NU, cât să fie o excepție care întărește regula.

În fond, ce este cultura, dacă nu viziuni probabile, existente in sentimentele posibilităților incerte? Cifrele au sensul lor, cuvintele sunt sensul semnificației cifrelor, prin care, sub o formă sau alta, există reacții, există trăiri, adică sunt sentimente. Ei, nu de la minus infint până la plus infinit. Dar undeva pe o scală între minus și plus infinit ele există.

Emmanuel Kant spunea: ***"Cuget, deci exist! Iată luminarea."*** Apreciezi distanțe, estimezi suprafețe, evaluezi timpul, te analizezi pe tine...și nu înseamnă
"***a cugeta"*** și este o cultură?

Că totul se întâmplă în interesul gospodăriei tale, ori sub forma respectului unei meserii ce înnobilează profesiunea ta, în realitate este esența unei culturi civice a matematicii. Dovada-însăși simplitatea termenilor de comparație, fizici ori intelectuali, între un subiect și un predicat.

Da, pentru patru ani, a fi cu „ghiozdan și fițe de vedetă" este și ea o cultură, prin care "să știi mai mult, să fii mai bun", este grija gimnazistului de zi cu zi, ceas de ceas, și este parte a copilăriei și vieții de elev. Iar scopul celor patru ani, este acela de a reuși pe o cale aleasă de ei, în interesul lor și din dorința lor.

A discerne între bine și bun și între bun și rău, este un fapt al științei și rațiunii lor de a fi școlar. Discernământul între bine și bun, dă semnificația și sensul educației. Doar o simplă viziune, ori o simplă asemănare, fără o certitudine a realității vieții, nu înseamnă respect față de cultură, față de părinți și față de dreptul de a alege al copilului. Ei au nevoie de exemple. Idolii și-i fac singuri, care sigur, niciodată nu sunt buni. Iar prin a explica acest întreg, poți educa speranța în viitor a copilului.

Ce văd și simt acum, este vedeta care reușește în tot și toate și totul îi stă în putere să o facă. Tocmai de aceea alegerea făcută de ei nu este întotdeuna cea mai bună, dar este singura cale prin care educând copilul, îi oferi șansa să decidă intre a fi "vedetă", ori un "om cu scaun la cap". Aici este clipa când matematica, dezvăluie universul cultural al entității diferenței dintre realitate și adevăr. Deoarece micile diferențe fac marile desebiri ale vieții, asemeni cum *"buturuga mică răstoarnă carul mare".* Iar diferența între realitate și adevăr, pentru ei, este provocarea pe tot restul vieții și limitele între care trebuie sa discearnă.

A discerne intre bun și bine, este calea de a face diferența între realitate și adevăr. Adevărul este absolut și realitatea este abstractă, dar nici una nu are capacitatea de a fi un întreg, deoarece sunt cele două jumătăți ale aceluiași întreg: viața cea de toate zilele, care deși evidentă, nimeni nu a cunoscut-o vreodată în totalitate. Diferența între realitate și adevăr este o permanenta comparație între absolut, abstract și întreg, in care întregul, întotdeuna se compune din adevăr și realitate.

Un exemplu elocvent este **paralelismul** între cele trei figuri geometrice: triunghiul, cercul și pătratul care sunt realități, din care se desprind piramida, sfera și cubul, ce sunt adevăruri. Întregul acestui paralelism îl regăsiți de jur- împrejurul dvs. și mai aproape în tot ce ați construit ori ați realizat singuri ori împreună cu semenii, ce într-o formă sau alta este esența oricarei moșteniri: cele doua jumătăți ale întregului matematic, cifrele si cuvintele.
De obiciei:

- triunghiul este simbolul credințelor, iar piramida este templul prin care există;
- cercul este simbolul științei și universului, iar sfera este semnificația mișcării;
- pătratul este secretul voinței de a acumula, deoarece cubul este simbolul unui volum și indiviziunea unei cantități.

Dar, cel mai important, este să descoperiți diferența dintre adevăr și realitate, în creativitatea „celui mai iubit dintre pământeni”: COPILUL.

Ascultați visuri și imaginații, descoperiți templul și credința realității pentru care luptă și vrea să învingă. De aici începe cultura și universul de construcții și realizari ale întregului uman, printre cifre, numere și cuvinte. Iată MATEMATICA și ființa sa în universul culturii.

Cea mai importantă descoperire nu este calculatorul ori alte aplicații electronice ale tehnologiilor de înaltă fidelitate și comunicare, este tot omul, creativ si inventiv. Orice tehnologie vine și pleacă, ceea ce rămâne este viața, iar simbolul ei este în esență acelasi - OMUL.

In realitate, computerul nu este decât un miraj al tehnicii și o sumă de instrumente inteligent puse la un loc, destinate unor utilitați de muncă ori comunicare si nicidecum o realizare a vieții.

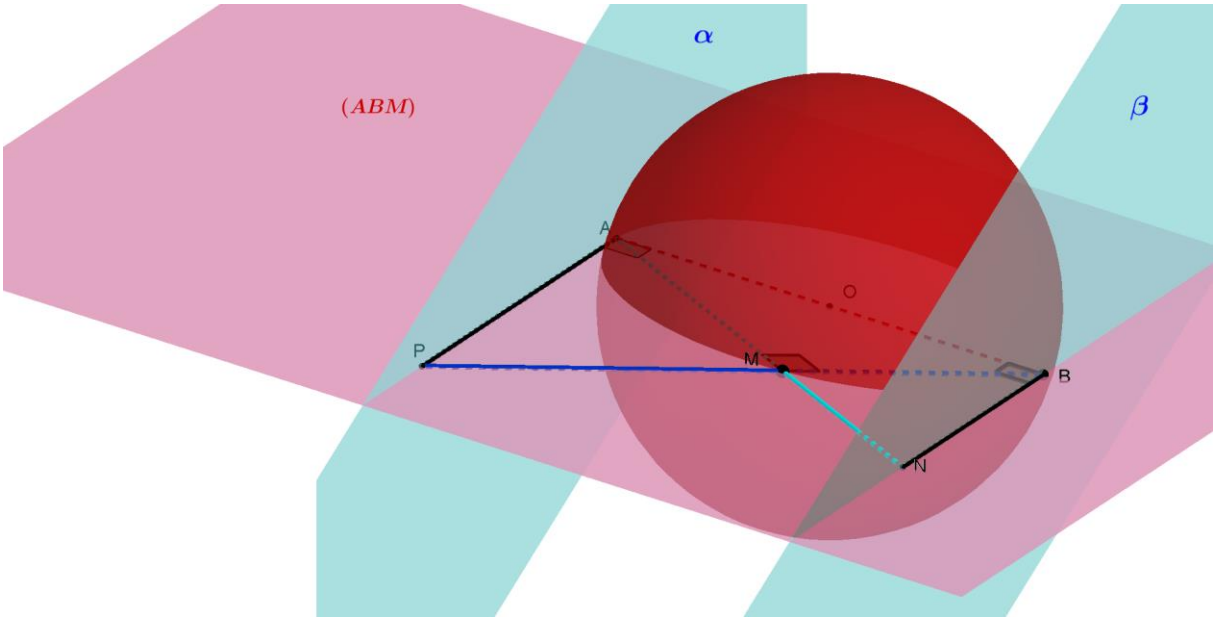
Calitatea umana, intotdeuna conteaza !

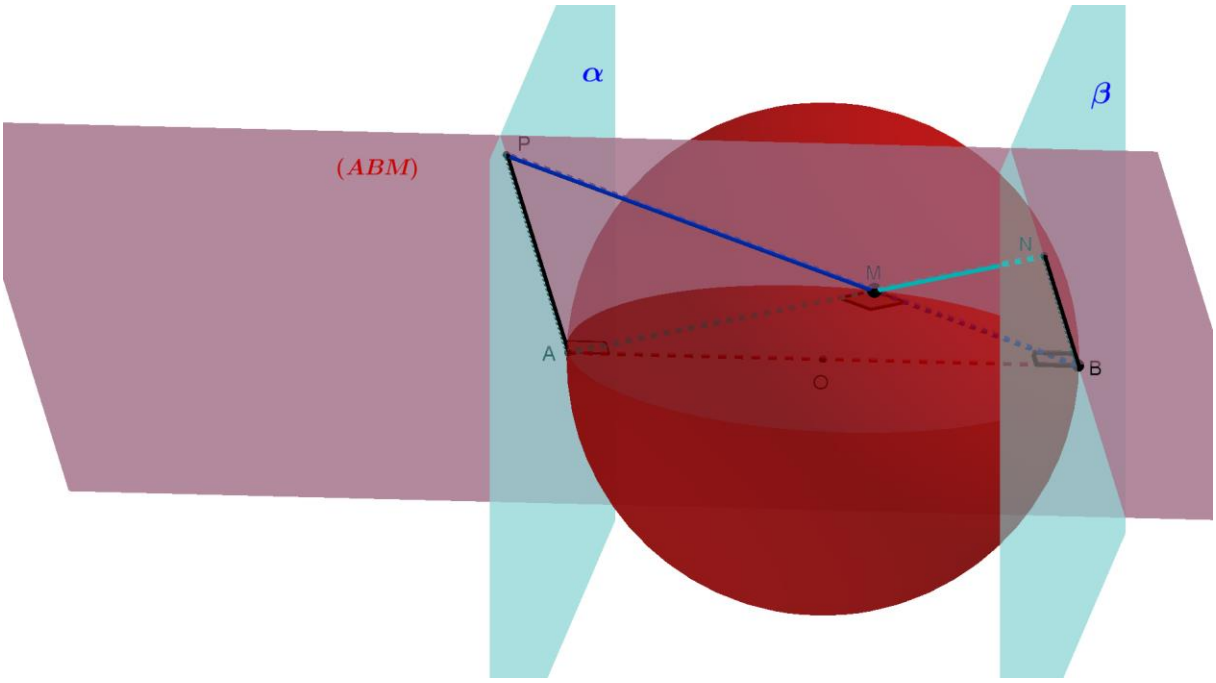
5. PROBLEMA LUNII IANUARIE 2016 – MATEINFO.RO

Se dă sfera de diametru AB și M un punct variabil pe sferă , diferit de A și B. Dacă N și P sunt punctele în care AM și MB, respectiv, intersectează planele tangente la sferă în B și A, să se arate că produsul *AP·BN* nu depinde de poziția punctului M.

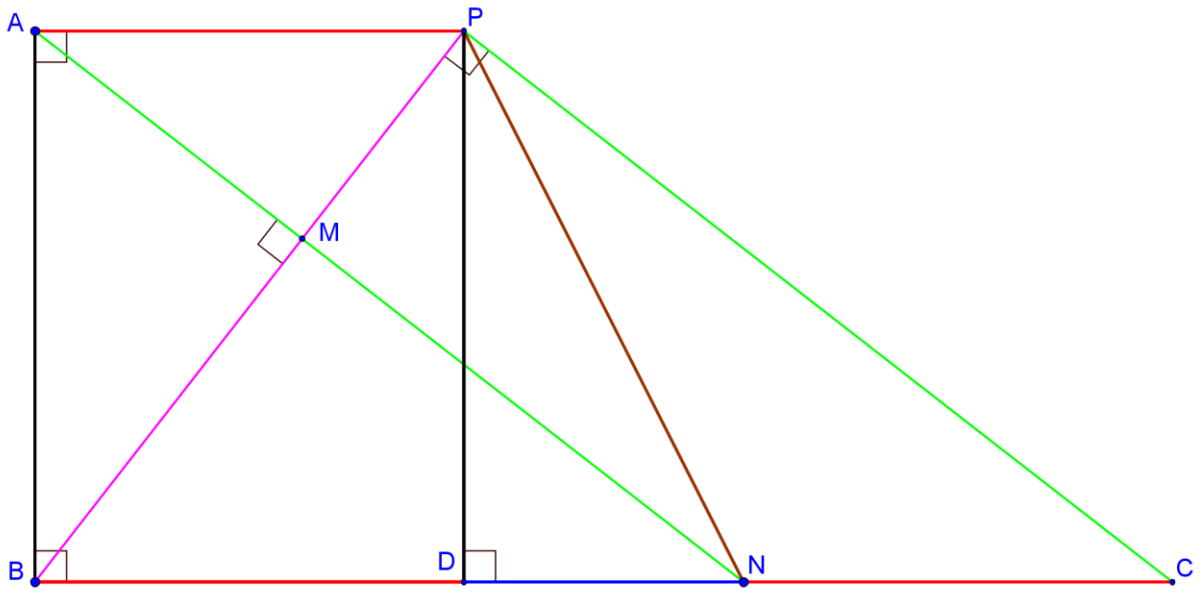
Propusă de Dobre Andrei

1. ***Prof. Constantin Telteu***



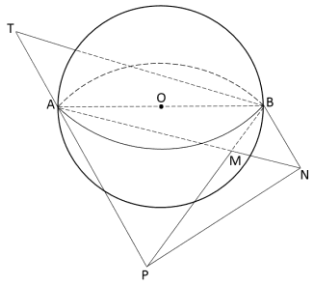


Problema se reduce la o problemă în planul *(ABM)* (vezi figurile de mai sus), care ar avea următorul enunț:
Să se demonstreze că într-un trapez dreptunghic ortodiagonal, cu înălțimea constantă, produsul bazelor nu depinde de punctul de intersecție al diagonalelor.
Să demonstrăm acest enunț:



Fie *C* intersecția paralelei prin *P* la *AN* cu *BN*. În triunghiul dreptunghic *BPC*, cu teorema înălțimii obținem $PD^2 = BD \cdot DC$, care, ținând cont că *PD=AB*, *BD=AP* și *DC=BN*, arată astfel: $AB^2 = AP \cdot BN$, adică produsul $AP \cdot BN = \textit{pătratul diametrului sferei}$, deci nu depinde de intersecția diagonalelor trapezului, care este punctul *M* de pe sferă.

2. ***Prof. Marius Antonescu***



AB – diametru ⇒ ΔMAB – dreptunghic în unghiul M.
Cele două plane tangente la **S** (O; OA) sunt perpendiculare pe AB ⇒ AP ⊥ AB şi NB ⊥ AB.
AN şi BP – concurente ⇒ punctele A, P, N şi B – coplanare.
Deoarece: AP ⊥ AB şi NB ⊥ AB ⇒ ABNP trapez dreptunghic şi ortodiagonal.
Fie BT // NA ⇒ (1) <TBP ≡ <AMP (m<TBP = 90°)
(2) BNAT – paralelogram ⇒ [BN] ≡ [TA]
AP · BN = AP · TA = AB^2 (teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic TBP) ⇒ AP · BN = constant ⇒ AP · BN nu depinde de poziţia punctului M. (q. e. d.)

3. ***Prof. Chiriţescu Cristina, Şcoala Gimnazială "Iorgu Radu"Bârlad, Jud.Vaslui***

Fie AB=2R = constantă
M ∈ S(O,R)
N = AM ∩ α, α ∩ S(O,R) = {B}
P = BM ∩ β, β ∩ S(O,R) = {A}
demonstrez că AP * BN = constantă (nu depinde de poziţia punctului M pe sfera dată)
Rezolvare
în Δ APB, m($\widehat{BAP}$) = 1dr,
m($\widehat{BQM}$) = 1dr, unde Q este piciorul perpendicularei din M pe AB = diametrul sferei
din MQ II AP rezultă $\frac{AP}{MQ} = \frac{AB}{BQ}$ (1)
din MQ II BN rezultă $\frac{BN}{MQ} = \frac{AB}{AQ}$ (2)

înmulţim relaţiile (1)* (2) şi conform teoremei înălţimii în Δ AMB, m($\widehat{BMA}$) = 1dr, MQ^2 = BQ * AQ,
obţinem conform primei condiţii din ipoteză AP * BN = AB^2 = constantă, qed.

4. ***Prof. Mihaela Molodet- Scoala Gimnaziala Berghin, Jud. Alba***

SOLUTIA I.

Fie α si β cele doua plane tangente sferei in A respectiv B.
Avem: AB ⊥ α, AB ⊥ β ⇒ α ∥ β (1)
Fie γ = (AN, BP)
Evident, α ∩ γ = AP si β ∩ γ = BN (2)
Din (1) si (2) ⇒ AP ∥ BN (3)
Din (3) avem doua cazuri:

a) PN ∥ AB ⇒ ABNP patrat,
   ⇒ AB= PN= AP= BN= 2R
   ⇒ AP•BN = $(2R)^2$= constant
b) PN ∦ AB ⇒ ABNP trapez
Evident, m(<AMB) = m(< PAB) = m(<ABN)= 90°
   ⇒ ABNP trapez dreptunghic, ortodiagonal
   ⇒ AP• BN = AB^2 = $(2R)^2$= constant

SOLUTIA a II a.

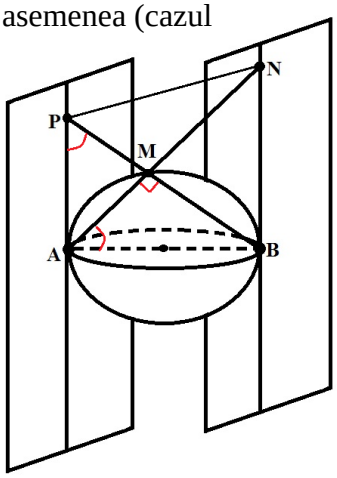
Evident, m(<AMB) = m(< PAB) = m(<ABN)= 90°
⇒ Δ ABN~ Δ PAB,
⇒ $\frac{AB}{PA} = \frac{BN}{AB}$ ⇒ AB • AB = AP • BN
⇒ AP • BN = AB^2 = $(2R)^2$= constant

5. **Prof. Rusu Maria, Şcoala Gimnazială Buznea, Iaşi**

Deoarece tangentele la sferă sunt perpendiculare pe rază în punctul de tangenţă, avem $AP \perp AB$ şi $BN \perp AB$. Cum dreptele AP şi BN sunt perpendiculare pe aceeaşi dreaptă, rezultă că $AP \parallel BN$.

Se observă că $m(\sphericalangle AMB) = \frac{m(AB)}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$ și $m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle PMN)$ fiind unghiuri opuse la vârf. Prin urmare patrulaterul $ABNP$ este trapez dreptunghic ortodiagonal și se arată cu uşurinţă că înălțimea sa este media geometrică a bazelor, adică : $AP \cdot BN = AB^2$, produs constant care nu depinde de poziția punctului M.

I. Se constată că unghiul $\sphericalangle BAN$ şi unghiul $\sphericalangle APB$ sunt congruente deoarece au acelaşi complement. Triunghiurile dreptunghice $\triangle BAP$ şi $\triangle NBA$ fiind asemenea (cazul $U.U.$) avem:

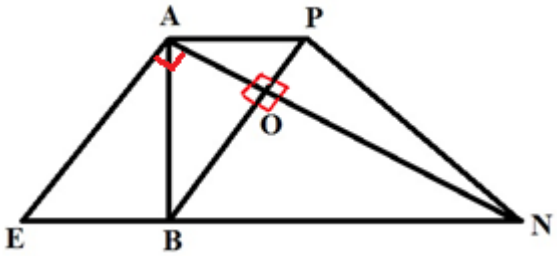


$$\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{BN} = \frac{PB}{AN},$$

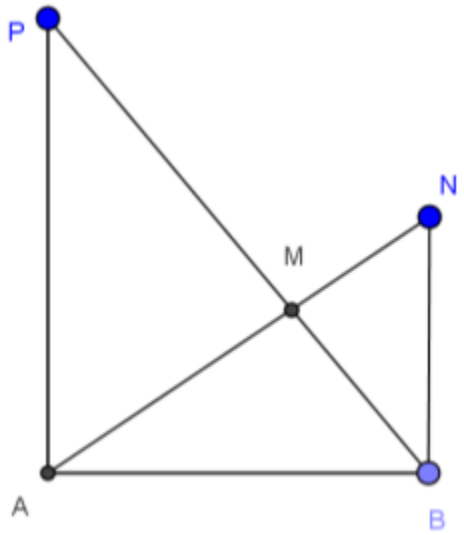
din prima proporţie obţinându-se:

$$AP \cdot BN = AB^2$$

II. Construim punctul E pe latura AB, astfel încât $EAPB$ să fie paralelogram. În particular $EB = AP$, iar unghiul $\sphericalangle EAN$ este drept ca şi cel corespondent din punctul O. Aplicând teorema înălțimii în ΔEAN, obţinem $EB \cdot BN = AP \cdot BN = AB^2$.



6. Prof.Păcurar Cornel Cosmin,BLAJ



AB⊥pe planul tangent la sferă în A,cum AP este inclusă în acest plan deducem că AB⊥AP.
Analog deducem AB⊥BN.
Cum M aparţine sferei de diametru AB şi e diferit de A şi B deducem că triunghiul AMB este dreptunghic în M.
Din ∢AMB≡∢ABN,∢MAB≡∢BAN rezultă ΔAMB~ΔABN de unde deducem $\frac{AM}{AB}=\frac{MB}{BN}$ rezultă BN=$\frac{AB\cdot MB}{AM}$.
Din ∢BMA≡∢BAP,∢MBA≡∢ABP rezultă ΔBMA~ΔBAP de unde deducem $\frac{BM}{AB}=\frac{MA}{AP}$ rezultă AP=$\frac{AB\cdot MA}{MB}$.
AP·BN=$\frac{AB\cdot MB}{AM}\cdot\frac{AB\cdot MA}{MB}$=AB·AB=$AB^2$,care nu depinde de poziţia punctului M.

6.CONCURS PROBLEMA LUNII FEBRUARIE 2016 – WWW.MATEINFO.RO

Un cub gol *ABCDEFGH*, cu muchia de lungime a , este intersectat de o sferă care trece prin vârfurile feței EFGH și prin centrul cubului. Se înlătură toate punctele cubului ce aparțin interiorului sferei și sfera, se așează corpul obținut cu fața ABCD pe un plan orizontal și se umple cu apă. Să se determine valoarea minimă a muchiei cubului, pentru ca în acest vas să încapă un litru de apă.

Prof. Constantin Telteu

Așteptăm soluțiile pe adresa de e-mail: revista@mateinfo.ro

7. SIMULARE BAC MATEMATICĂ

PROFIL MATE-INFO
FEBRUARIE 2016

- Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

(5p) 1. Să se arate că numărul a=$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}-\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2}}$ este intreg.

(5p) 2. Determină $x\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere $x^2-6, 3x, 4x+3$ să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(5p) 3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+(m+3)x-(m+1)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât maximul lui f să fie egal cu 1.

(5p) 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^3+3x+5}=x+2$.

(5p) 5. Să se determine valoarea parametrului real " a " pentru care vectorii $\vec{v_1}=(a-2)\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v_2}=-3\vec{i}+(a+2)\vec{j}$ să fie coliniari.

(5p) 6. Se consideră punctele $A(-1;2)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la dreapta AB.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+ay+2z=1 \\ 9x+a^2y+4z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi se notează cu A matricea sistemului.

(5p) a) Calculaţi determinantul matricei A.

(5p) b) Determinaţi valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

(5p) c) Pentru $a=1$, rezolvaţi sistemul.

2. Se consideră mulțimea $G=\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$ și legea de compoziție "$\circ$" pe G definită prin $x\circ y=axy+bx+by+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(5p) a) Determinați a , b și c știind că legea "$\circ$" admite pe -1 ca element neutru iar simetricul lui $\frac{1}{2}$ este $-\frac{11}{8}$

(5p) b) Pentru $a=2$, $b=c=3$ rezolvați pe mulțimea G ecuația $x\circ x\circ x=x$

(5p) c) Pentru $a=2$, $b=c=3$ demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(mx+n)$, unde m și n sunt convenabil alese , este izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

1. Se dă funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^4}{4\sqrt{3}}$.

(5p) a) Să se studieze monotonia funcţiei f;

(5p) b) Să se demonstreze că tangentele la graficul funcţiei f în punctele $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ şi $B\left(\sqrt{3},f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ sunt perpendiculare.

(5p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}$.

2. Fie șirul $(\mathcal{I}_n)_{n\geq1}$, definit prin $\mathcal{I}_n=\int_0^1(1+x)^n\,2^x dx,$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

(5p) a) Calculați $\mathcal{I}_1$.

(5p) b) Studiați monotonia șirului $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(5p) c) Arătați că $\mathcal{I}_n\cdot\ln 2=2^{n+1}-1-n\mathcal{I}_{n-1},$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

BAREM DE NOTARE

SIMULARE BAC MATEMATICA MATE-INFO FEBRUARIE 2016

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}=7-4\sqrt{3}$, $\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2}}=7-4\sqrt{3}$. $a=0\in\mathbb{Z}$;	2p 2p 1p
2.	Din $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow$ $\frac{x^2-6+4x+3}{2}=3x\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x\in\{-1;3\}$.	1p 2p 2p
3.	$-\frac{\Delta}{4a}=1\Leftrightarrow$ $-\frac{5m^2+10m+9}{4m}=1$ $\Rightarrow 5m^2+14m+9=0\Rightarrow m\in\left\{-\frac{9}{5},-1\right\}$	1p 2p 2p
4.	Ecuaţia dată este echivalentă cu $2x^2+3x+1=0$. $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.	2p 3p
5.	Vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\frac{a-2}{-8}=\frac{-4}{a+2}$ Din $a^2-4=32\Rightarrow a\in\{-6;6\}$.	2p 3p
6.	Se scrie mai întâi ecuaţia dreptei (AB), după formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Rezultă, $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1-2}\Rightarrow x+y-1=0$. Distanţa de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C,AB)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi este egală cu $\frac{\lvert 4+3-1\rvert}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$.	1p 2p 2p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1. a)	Folosind **Regula triunghiului:** $\det A=4a+3a^2+18-9a-2a^2-12=$ $=a^2-5a+6$	2p 2p

		1p
b)	Matricea este inversabilă pentru $\det A \neq 0$ $\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{2,3\}$ A este inversabilă pentru $x \in \mathbb{R} - \{2,3\}$	2p 1p 2p
c)	$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ **Sistem Cramer** Sistemul are soluția unică $x = 0, y = 1, z = 0$.	2p 3p
2. a)	$x \circ (-1) = x \Rightarrow x(-a+b-1)+c-b=0 \Rightarrow \begin{cases} a = b-1 \\ c = b \end{cases}$ $\frac{1}{2} \circ \left(-\frac{11}{8}\right) = -1 \Rightarrow 11a + 14b - 16c = 16$ se obțin valorile $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$	2p 1p 2p
b)	$x \circ y = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2} \Rightarrow x \circ x \circ x = 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}$ notând $t = x + \frac{3}{2}$ ecuația devine $4t^3 = t$ cu soluțiile $t \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\}$ știind că $x \in G \Rightarrow$ soluția ecuației este $x = -1$	2p 2p 1p
c)	f morfism $\Rightarrow f(x \circ y) = f(x) + f(y)$ $\ln(2mxy+3mx+3my+3m+n) = \ln(mx+n)+\ln(my+n) \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 2m \\ 3m = mn \\ 3m+n = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$ $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2x+3)$ funcție bijectivă	1p 2p 2p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \left(x\sqrt{3}-2\right)^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left[-2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right]$	1p 2p 2p
b)	Fie pantele celor două tangente $m_1 = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$ $m_2 = f'\left(\sqrt{3}\right) = 1$ $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ cele două tangente sunt perpendiculare	1p 1p 1p 2p

c)	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(f'(x)\right)^{\frac{1}{x-\sqrt{3}}}\overset{(1^{\infty})}{=}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left[\left(1+\left(f'(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f'(x)-1}}\right]^{\frac{f'(x)-1}{x-\sqrt{3}}}=$	2p
	$=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-2\right)^3-1}{x-\sqrt{3}}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{\left(x\sqrt{3}-3\right)\left[\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)\right]}{x-\sqrt{3}}}=$	2p
	$=e^{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(\left(x\sqrt{3}-2\right)^2+\left(x\sqrt{3}-2\right)+1\right)}=e^{3\sqrt{3}}$	1p

2. a)	$\mathcal{I}_1=\int\limits_0^1(1+x)2^x\,dx=(1+x)\frac{2^x}{\ln 2}\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx$	3p
	$=\frac{3}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}$	2p
b)	$\mathcal{I}_{n+1}-\mathcal{I}_n=\int\limits_0^1(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x\,dx$	3p
	$(1+x)^n\cdot x\cdot 2^x\geq 0,\ (\forall)x\in[0,1]\Rightarrow(\mathcal{I}_n)_{n\geq 1}$ șir crescător	2p
c)	$\mathcal{I}_n=(1+x)^n\frac{2^x}{\ln 2}\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1 n(1+x)^{n-1}\frac{2^x}{\ln 2}dx$	2p
	$\mathcal{I}_n=\frac{2^n\cdot 2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}-\frac{n}{\ln 2}\mathcal{I}_{n-1}$	2p
	$\mathcal{I}_n\cdot\ln 2=2^{n+1}-1-n\mathcal{I}_{n-1}$	1p

8. SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ MATEMATICĂ
PROFIL MATE-INFO
FEBRUARIE 2016

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru: 2 ore.

SUBIECTUL I – Pe foaia de examen se trec doar rezultatele. (30 de puncte)

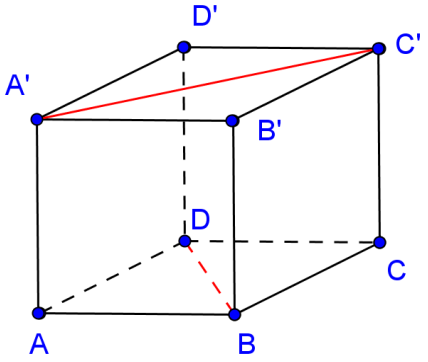
(5p) **1**. Rezultatul calculului 1054 + 1054 : 2 este ……

(5p) **2**. Mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R}/-2\le x-1<3\}$ scrisă ca interval este […,…)

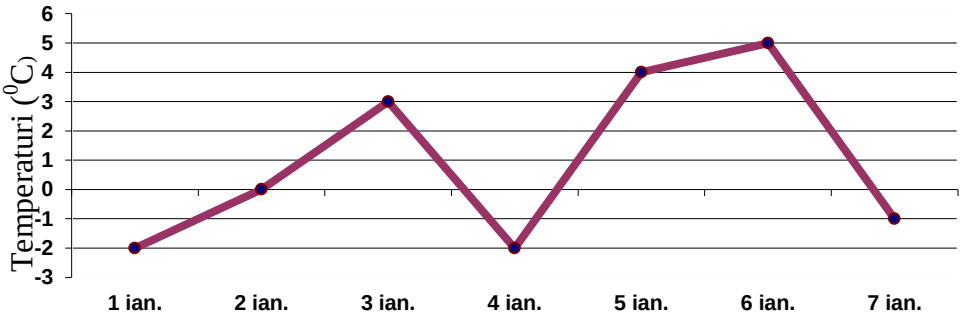
(5p) **3**. Dacă un caiet şi trei creioane costă 12 lei, atunci trei caiete şi nouă creioane costă …… lei

(5p) **4**. Într-un triunghi dreptunghic un unghi ascuţit are măsura de 30^0, iar ipotenuza are lungimea de 12 cm. Lungimea catetei care se opune unghiului cu măsura de 30^0 este …….. cm

(5p) **5**. În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Unghiului format de dreptele BD şi $A'C'$ are măsura de ……^{0}.



(5p) **6**. Graficul de mai jos prezintă evoluţia temperaturilor din prima săptămâna a lunii ianuarie a anului 2012.
Temperatura media înregistrată în această perioadă este de ……^0C.



SUBIECTUL II – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

(5p) **1**. Desenaţi pe foaia de examen o prismă triunghiulară regulată ABCDEF.

(5p) **2**. După o reducere cu 10% şi preţul unui obiect devine 63 de lei . Aflaţi preţul iniţial al obiectului .

(5p) **3**. Dacă $a=\sqrt{3}-1$ şi $b=1+\sqrt{3}$, arătaţi că $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ este număr natural.

4. Fie expresia $E(x)=x^2-3x-4$

(5p) **a).** Descompuneţi expresia în factori.

(5p) **b)**.Determinaţi numerele reale a şi b,astfel încât $E(x)=(x-2)^2+a(x-2)+b,(\forall)x\in R.$

(5p) **5**. Arătaţi că $(2x+1)^2-(3x-1)(2x+1)+(x-2)^2=(2-x)(x+3)$.

SUBIECTUL III – Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (Fig 1.) , $AB=12cm$.

(5p) **a)** Din vârful A al cubului porneşte o furnică şi vrea să ajungă în punctul C', parcurgând cel mai scurt drum posibil, pe suprafaţa cubului. Care va fi lungimea drumului?

(5p) **b)** Să se afle distanţa $d(C',AB)$;

(5p) **c)** Fie $M\in(B'C')$, $N\in(BB')$ şi $P\in(AB)$ astfel încât $MC'=9cm$, $NB'=4cm$ şi $AP=6cm$. Furnica se întoarce din vârful C' în vârful A pe drumul $[C'MNPA]$ (marcat cu roşu pe desen). Aproximativ, cu cât este mai lung acest drum faţă de drumul din puctul **a)** ?

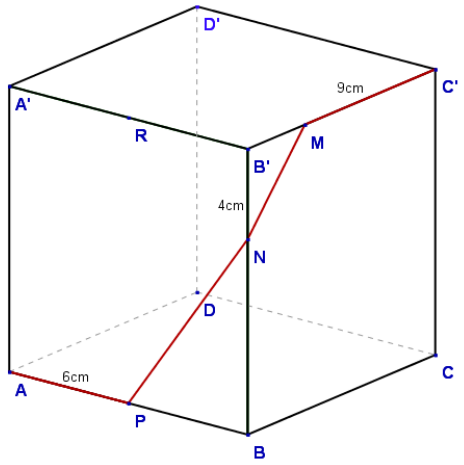
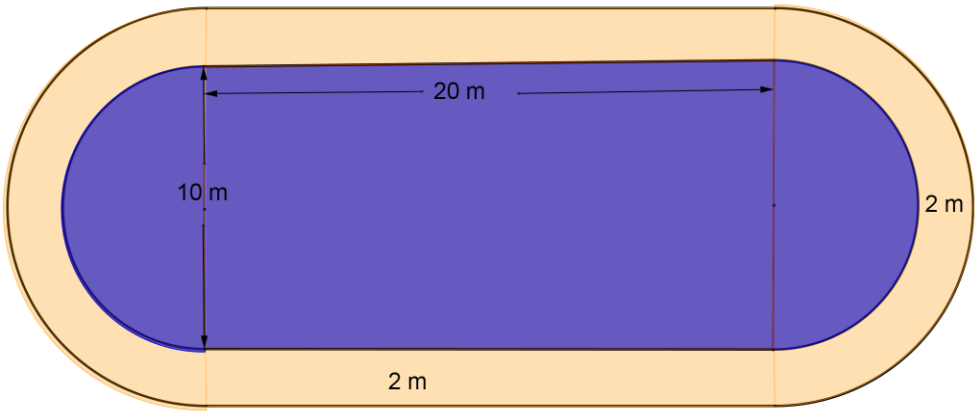


Fig 1.

8. Conturul bazinului de înot din figură are forma unui dreptunghi completat la capete cu câte un semicerc. Împrejurul bazinului este o bandă de nisip cu lăţimea constantă de 2 m. Dreptunghiul are lungimea de 20 m şi lăţimea de 10 m.



(5p) a) Ce suprafaţă are bazinul?

(5p) b) Care este suprafaţa acoperită cu nisip?

(5p) c) Care este diferenţa dintre perimetrul exterior al benzii de nisip şi cel interior?

BAREM DE NOTARE

SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ IANUARIE 2016

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	1054 + 1054 : 2 = 1054 + 527 = 1581	5p
2.	$-2 \le x-1 < 3 \Rightarrow -1 \le x < 4 \Rightarrow A = [-1;\ 4)$	5p
3.	x = preţ caiet; y = preţ creion x + 3y = 12 $\Rightarrow 3x+9y = 3(x+3y) = 3\cdot 12 = 36$	5p
4.	6 cm	5p
5.	$A'C' \parallel AC \Rightarrow m(\sphericalangle(A'C',\ BD)) = m(\sphericalangle(AC,\ BD)) = m(\sphericalangle AOD) = 90^o$	5p
6.	$t_m = \frac{-2+0+3+(-2)+4+5+(-1)}{7} = \frac{7}{7} = 1$	5p

	SUBIECTUL II	(30 de puncte)
1	Realizarea desenului Notaţia prismei	4p 1p
2	Notăm cu x – preţul iniţial al obiectului $x - \frac{10}{100}x = 63$ $9x=630$	 2p 2p 1p

	$x = 70$ lei	
3	$\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{-2}$ $\frac{\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}}{2} = 1$	3p 2p
4.	a) $E(x) = x^2 - 4x + x - 4$ $= x(x-4) + (x-4)$ $= (x-4)(x+1)$	2p 1p 2p
	b) $E(x) = x^2 + x(a-4) + 4 + b - 2a$ 2p $a - 4 = -3 \Rightarrow a = 1$ 1p $4 + b - 2a = -4 \Rightarrow b = -6$ 2p	5p
5	$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ $(3x-1)(2x+1) = 6x^2 + x - 1$ $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 1$ $4x^2 + 4x + 1 - 6x^2 - x + 1 + x^2 - 4x + 1 = -x^2 - x + 6$ $(2-x)(3+x) = -x^2 - x + 6$	1p 1p 1p 1p 1p
	SUBIECTUL III	(30 de puncte)
1.	a) dacă R e mijlocul muchiei $A'B'$, atunci lungimea drumului furnicii este	5p

	$AR+RC'=2AR=2\sqrt{\underbrace{12^2}_{=4\cdot 6^2}+6^2}=2\sqrt{5\cdot 6^2}=12\sqrt{5}cm$.	
	b) $AB\perp(BCC'B')$, $C'B\in(BCC'B')\Rightarrow C'B\perp AB$, de unde rezultă că $d(C',AB)=C'B=\sqrt{12^2+12^2}=12\sqrt{2}cm$.	2p 3p
	c) $MN=\sqrt{MB'^2+B'N^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5cm$ $NP=\sqrt{NB^2+BP^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10cm$ $[C'MNPA]=C'M+MN+NP+PA=9+5+10+6=30cm$ $AR+RC'=12\sqrt{5}cm\approx 26,83cm$ $30-12\sqrt{5}\approx 30-26,83=3,17$ -aproximativ, cu atât e mai lung drumul frunicii inapoi, faţă de drumul din a).	1p 1p 2p 1p
	c) $P_{ext}=2\cdot 20+2\pi\cdot 7=(40+14\pi)m$ $P_{int}=(40+10\pi)m$ Diferenţa $=4\pi\, m$.	2p 2p 1p