Universitatea din Bucureşti **14.07.2017**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licenţă – *Informatică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Să se calculeze A^2 şi A^3.
(b) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = 2X$.
(c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care există o matrice nenulă $B \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB = mB$.
(d) Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \neq p$. Să se arate că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = \lambda A^p$.

II. Analiză. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} - \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}$.

(a) Studiaţi monotonia şi convexitatea funcţiei f.
(b) Decideţi şi justificaţi dacă funcţia $g : \mathbb{R}^* \to \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = f(x)$ este sau nu este bijectivă.
(c) Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $f(x) = \frac{1}{n}$ are o soluţie reală unică, notată cu x_n. Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.
(d) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x = \sqrt{3}$.

III. Geometrie. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $M(3, 3)$ şi triunghiul ABC determinat de dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $BC : 3x + y - 2 = 0$ şi $CA : x - 3y - 4 = 0$.

(a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.
(b) Fie P, Q şi R proiecţiile punctului M pe dreptele OA, OB şi respectiv AB. Să se demonstreze că punctele P, Q şi R sunt coliniare.
(c) Notăm cu m numărul punctelor din interiorul patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi şi cu n numărul punctelor de pe reuniunea laturilor patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi. Să se verifice că aria patrulaterului $BCAM$ este $m + \frac{1}{2}n - 1$.

Subiectul de Informatică se găseşte pe verso.

IV. Informatică.

Fie n un număr natural nenul. Fie v un vector cu n poziții numerotate de la 1 la n și elemente numere naturale diferite, de la 1 la n, într-o ordine oarecare. Pentru i și j numere naturale între 1 și n, numim FLIP(n, v, i, j) operația care inversează ordinea elementelor din v situate pe pozițiile de la i la j.

a) Să se scrie în limbaj de programare o procedură (sau funcție) care implementează operația FLIP(n, v, i, j).
b) Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v, folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația FLIP(n, v, 1, k), cu k de la 2 la n.
c) Considerăm că n este o putere a lui 2 ($n = 2^m$, cu m număr natural nenul) și vectorul v are proprietatea că pentru orice i de la 1 la m și orice j de la 1 la 2^{m-i}, există k de la 1 la 2^{m-i}, astfel încât pe pozițiile din v de la $2^i(j-1)+1$ la $2^i j$ se află numerele naturale de la $2^i(k-1)+1$ la $2^i k$, într-o ordine oarecare. Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v, folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația FLIP(n, v, $2^i(j-1)+1$, $2^i j$), cu i de la 1 la m și j de la 1 la 2^{m-i}, printr-un algoritm mai eficient decât cel implementat la punctul b), care se bazează pe proprietatea vectorului v.

Exemple:

	Date de intrare	Date de ieșire
a)	FLIP(9, [3 2 6 8 5 9 1 7 4], 1, 6)	v = [9 5 8 6 2 3 1 7 4]
	FLIP(4, [2 1 4 3], 1, 4)	v = [3 4 1 2]
	FLIP(16, [14 13 15 16 11 12 9 10 2 1 4 3 8 7 6 5], 5, 8)	v = [14 13 15 16 10 9 12 11 2 1 4 3 8 7 6 5]
b)	n = 9 v = [3 2 6 8 5 9 1 7 4]	v = [1 2 3 4 5 6 7 8 9]
c)	n = 4 v = [2 1 4 3]	v = [1 2 3 4]
	n = 16 v = [14 13 15 16 11 12 9 10 2 1 4 3 8 7 6 5]	v = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16]

Note:

1. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). La fiecare subpunct a), b), c), se va preciza complexitatea timp, în funcție de n, a soluției implementate și se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.
2. Toate operațiile de tip FLIP se vor face în vectorul v, fără a se folosi alți vectori auxiliari.
3. La subpunctul a), datele se transmit ca parametri ai procedurii/funcției FLIP(n, v, i, j). La subpunctele b) și c), se citesc de la tastatură n și v, fiecare pe un rând separat și se afișează vectorul v sortat crescător, pe un singur rând. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.
4. Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, inclusiv cele de intrare/ieșire, dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.

Universitatea din Bucureşti **14.07.2017**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licenţă - *Informatică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul lui A^2: $\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -25 & 9 \end{pmatrix}$ .... 1 p
Calculul lui A^3: $\begin{pmatrix} 67 & -24 \\ -120 & 43 \end{pmatrix}$ .... 1 p
(b) Determinarea matricelor X: O_2 .... 2 p
(c) Scrierea sistemului care rezultă din $AB = mB$ .... 1 p
Determinarea lui m: $m = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ sau $m = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ .... 2 p
(d) Demonstrarea faptului că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ .... 2 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ .... 1 p
f este concavă pe $(-\infty, 0)$ şi convexă pe $(0, \infty)$ .... 1 p
(b) Imaginea funcţiei g este $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, deci g nu este bijectivă .... 2 p
(c) Ecuaţia $f(x) = \frac{1}{n}$ are o soluţie unică x_n .... 1 p
Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit şi crescător, deci convergent .... 1 p
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ .... 1 p
(d) Aria este egală cu $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{3}{4}$ .... 2 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Determinarea coordonatelor punctelor $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ şi $C(1, -1)$ .... 2 p
Aria triunghiului ABC este 5 (formula ariei cu determinant sau observând că triunghiul ABC este dreptunghic) .... 1 p
(b) Determinarea coordonatelor punctelor $Q(0, 3)$ şi $P(3, 0)$ .... 1 p
Punctul R are coordonatele $(2, 1)$ (analitic sau observând că R este intersecţia diagonalelor pătratului $BCAM$) .... 2 p
Demonstrarea coliniarităţii .... 1 p
(c) $m = 9$, $n = 4$, patrulaterul $BCAM$ este pătrat cu aria egală cu 10 .... 2 p

(*) La punctul (b) soluţia în care se foloseşte teorema lui Simson primeşte 4 puncte dacă sunt verificate condiţiile (punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului AOB). La punctul (c) pentru enunţarea teoremei Pick (fără verificare) se acordă 1 p.

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

(a) Folosirea corectă a noţiunii de procedură / funcţie .... 1 p
Implementarea fără vector auxiliar .... 1 p
Corectitudinea soluţiei .... 1 p
Corectitudinea limbajului .... 0,5 p
Explicaţii .... 0,25 p
Complexitate .... 0,25 p

(b) Determinarea maximului dintr-un vector .... 0,5 p
Utilizarea FLIP conform cerinţei .... 1 p
Corectitudinea soluţiei .... 1 p
Corectitudinea limbajului .... 0,5 p
Explicaţii .... 0,25 p
Complexitate .... 0,25 p

(c) Corectitudinea soluţiei .... 1 p
Explicaţii .... 0,25 p
Complexitate .... 0,25 p