Varianta 1

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii *A*, care conțin elementul 1.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $b\ne 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n\end{pmatrix}$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

5p **a)** Să se verifice că, pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\ne\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4})$, $\forall x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$, știind că $f(x)\ge 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e}$ și $x=e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A-A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5=A,\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se defineşte operația $a*b=\ln(e^a+e^b-1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a,b\in M$, atunci $a*b\in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*...*a}_{\text{de } n \text{ ori } a}=2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

www.mateinfo.ro

Varianta 3

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice egalitatea $A^2-A=2I_3$.

5p **b)** Să se calculeze A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $A^{2009}+A^{2008}=2^{2008}(A+I_3)$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este un inel comutativ, unde $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=x\cdot y-3x-3y+12$, $\forall\, x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” este 4.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z},*,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=a\cdot x+b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2009 ori } x}=2^{2009}+3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a,\ \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC ştiind că $AB=6$, $AC=10$ şi că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei *A*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t\cdot A)=0$.

5p **c)** Să se determine o matrice nenulă $B\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB=O_2$.

2. Se ştie că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $\left((0,\infty),\cdot\right)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă *H* este un subgrup al lui *G* care conține toate numerele naturale $k\ge 4$, atunci *H* conține toate numerele raționale $q>3$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_1^2\frac{x^n}{x^n+1}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația $x^2-10x+12\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=3\log_2 x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ ştiind că $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{3}$ şi lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A(0, 6)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 8)$ şi matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 6 & 4 & 8 & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine rangul matricei M în cazul $a=3, b=0$.

5p **c)** Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=5xy+6x+6y+6$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x*x*x*...*x}_{\text{de 2009 ori } x}=-1$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\ge\frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\ge1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)\,dx\le f(k), \forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx, n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.

Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x=\sin x$.

5p **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C=\frac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}\in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma\neq e$ și $(\tau\sigma)^2=e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau\in S_5$, există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p=e$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ și determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a=1$, să se determine x_1, x_2 și x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\forall x>0$.

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{2n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),n\in\mathbb{N}.$

www.mateinfo.ro

Varianta 7

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{8+i}{7-4i}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se ştie că, în triunghiul ABC, vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au acelaşi modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 şi 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ \quad y+2z+3t=2\\ \quad\quad z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k&2^k\\2^k&2^k\end{pmatrix}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm cu $H_t=\{A(kt-1)\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,\, p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\dfrac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\dfrac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\,\mathrm{arctg}\,x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care F este primitivă a funcției f.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2=-4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f, să se determine numerele reale a și c.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overline{AE}=\overline{EB}$, $\overline{DF}=2\overline{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

5p **6.** Fie triunghiul *ABC*. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii *BC* ştiind că $AB=13,\ AC=14$ şi $BC=15$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2n}=\dfrac{2^{2n}-1}{3}A+\dfrac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi ecuația $x^3-x+a=0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se determine x_2 şi x_3 ştiind că $x_1=2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_0=0,\ x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $0\le x_n\le\dfrac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent la $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ şi $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\dfrac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 9

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanţa 3.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

5p **4.** Să se arate că $C_{17}^{3}>C_{17}^{15}$

5p **5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+...+\sin^2 90^\circ=\dfrac{91}{2}$

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M=\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuaţie $y=2x$, atunci $\det(M)=0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M)=\pm1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulţimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -3b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X\in A$ şi $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in A, Y\in A$ şi $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuaţia $f(x)=n$ are o soluţie unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcţiile $f,g_n:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $g_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\dfrac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot2^2}+\dfrac{1}{3\cdot2^3}+...+\dfrac{1}{n\cdot2^n}\right)=\ln2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Știind că $z \in \mathbb{C}$ şi că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul întâi, pentru care $f\left(f(x)\right) = 2f\left(x\right) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x+1\right) - \lg 9 = 1 - \lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, ştiind că $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-1)$.

5p **6.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ şi $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

5p **b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $2,\ a,\ b$ sunt în progresie geometrică şi $2,\ 17,\ a$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $f\left(f(x)\right) = 0$, ştiind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -3x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0, 2\pi\right)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x) = 1 - 2\operatorname{tg} x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relația $f(2) = 2$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE şi BC sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $A = \frac{\pi}{4},\ B = \frac{\pi}{6}$ şi $AB = 6$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ şi matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ şi $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1,\ |x_3| \le 1.$

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \le 3$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $\left(0, \infty\right)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1,\ c = -1,$ atunci $b = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} - \{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+2}e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ şi $g:(0,1]\to\mathbb{R},\ g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x) \ge 0, \forall x \ge 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) > 0{,}9$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a>0$ ştiind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuația simetricei dreptei $d: 2x-3y+1=0$ față de punctul $A(-3,4)$.

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{ctg} x=3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^2+X+1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 şi $g=aX^2+bX+c$, cu $a\neq 0$. Fie matricele $A, V\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} c & b & a\\ a & c & b\\ b & a & c\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_1^2 & x_2^2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V)=3(x_2-x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A\cdot V=\begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2)\\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2)\\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2)\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A)=0$ dacă şi numai dacă $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^4+\hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ şi $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4+\hat{4}X\in\mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n=f(1)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\ldots+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x)\leq\frac{1}{x}$, $\forall x>1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\frac{1}{e}, \forall x>1$.

www.mateinfo.ro

Varianta 13

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d: 3x-4y+1=0$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=4,\ BC=5$ şi $CA=6$. Să se arate că $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in S_1\right\}$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ şi mulțimea

$G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(X)=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^4=B^6=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n\neq I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică a graficului funcției *f* spre ∞.

5p **b)** Să se arate că $f^2(x)f'(x)=x^2+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt,\ x>0$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F_2(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+...+\lg\frac{99}{100}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2-ax-a<0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

5p **4.** Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.

5p **6.** Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului *B*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei *A*.

5p **b)** Să se arate că există $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=dA$.

5p **c)** Să se arate că există matricele $K\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L\in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A=K\cdot L$.

2. Se consideră numărul $a=\sqrt{3}-i\in\mathbb{C}$ şi polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-4X^2+16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a)=0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **c)** Să se arate că polinomul *f* este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\sin^n x$ şi se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n.

5p **a)** Să se arate că $f_n''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x-n^2\sin^n x,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$ şi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}},\ n\geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $a=2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul functiei *f*, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$.

Varianta 15

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa *Ox* în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c\in\mathbb{Z}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a+b+c\neq 0$ şi A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a=b=c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x=y=z=0$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4-5X^2+5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0,\ x>0$ are exact două rădăcini $a_n\in(0,1)$ şi $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-I_{2n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=I_0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{2-i}{2+i}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x^2+ax+2\geq 0$, oricare ar fi numărul real x.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin x=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^8=C_n^{10}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 10$.

5p **5.** Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC ştiind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{X=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{R},\ a>0\right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A,B\in G$, atunci $AB\in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C,D\in G$ pentru care $CD\neq DC$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$, atunci $I_2-A+A^2\in G$.

2. Se consideră $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile $x_1=x_2=1$ şi $x_3=-2$.

5p **b)** Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci *f* are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția *f* este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=(1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x)dx=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ şi $g=X^2-1$.

5p **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1\in(0,1)$ şi $x_{n+1}=\frac{x_n^5+3x_n}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n\in(0,1),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}}{x_n}=\frac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x)=\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi}x^2f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\le\cos 1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 4 = 0$.

5p **2.** Să se afle valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin x + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr *k* din mulțimea $\{0,1,2,...,7\}$, numărul C_7^k să fie prim.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\overline{AB}\cdot\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)$, ştiind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ şi $C(1,2)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se afle rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $I_3 + A$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2, b = 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_0 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, are limita 1.

5p **c)** Să se arate că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_n - n$, este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că F este funcție pară.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F.

Varianta 19

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x+3$ sunt simetrice față de dreapta $x=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC , unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{ctg} 2=\dfrac{\operatorname{ctg}1-\operatorname{tg}1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine A^{-1} .

2. Fie polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2-2X+1\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)=x^2\left[\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+a+2\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului *f* sunt numere reale.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, unde *a* este un număr real.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Știind că funcția f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $2 \in \left(\log_3 4, \sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = -1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$.

5p **5.** Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *M*, respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ şi $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, ştiind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ şi $B(-2,3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră triunghiul *ABC*, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ şi sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3, b = 4, c = 5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p **c)** Știind că soluția sistemului este $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in \left(-1, 1\right)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor din mulțimea *G* care au determinantul nul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția *f* este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3 + 1) f(t) dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t) dt = \int_1^x t^3 f(t) dt, \ \forall x > 0.$

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t) dt$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 8x + 25 = 0$.

5p **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_8^4 - C_7^4 - C_7^3$.

5p **5.** Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d : x + y - 1 = 0$.

5p **6.** Ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z), astfel încât $x^2 + y^2 = z - 1$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ şi $\det A^2 = \hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei rădăcini reale.

2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axele de coordonate şi dreapta $x = 1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x(f_1(x))^2 \, dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + \ldots + f_n(n)\right) = \frac{\pi}{4}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuația $(f\circ g)(x)=0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+9)+\lg(7x+3)=1+\lg(x^2+9)$.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $C_n^2<10$, $n\ge 2$, n natural.

5p **5.** Se consideră dreptele paralele de ecuații $d_1:\ x-2y=0$ şi $d_2:\ 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c\ne 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0=0$ şi $a_{n+1}=a_n^2+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ şi polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, cu $f(0)=0$ şi cu proprietatea că $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $|f(x)-f(y)|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3\frac{f(x)}{x-1}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0\frac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{x^2}f(t)e^t\,dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_4 - a_2 = 4$ şi $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$.

5p **3.** Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{1,2,3,...,40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3), B(2,-1), C(0,9)$.

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{tg}\alpha = 2$, să se calculeze $\sin 4\alpha$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall X \in C(A)$, $XA = AX$.

5p **b)** Să se arate că dacă $Y \in C(A)$ şi $Y^2 = O_2$, atunci $Y = O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Z \in C(A), Z \neq O_2$ şi Z are toate elementele raţionale, atunci $\det Z \neq 0$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ şi polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ are o unică soluţie $x_n \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, unde x_n este soluţia reală a ecuaţiei $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$, unde x_n este soluţia reală a ecuaţiei $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+a), \forall a > -1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x) < \ln(1+x), \forall x > 0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi) > f(2\pi)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=f(1)=0,\ f(2)=6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.

5p **4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $|x|\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.

5p **5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, ştiind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ şi $C(5,-3)$.

5p **6.** Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $\forall\, X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX)=z^3\det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A-A^t)=0$.

5p **c)** Ştiind că $A\neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A-A^t)=2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Q}[X]$, cu $f=X^4-5X^2+4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine polinomul $h\in\mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0)=1$ şi care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Ştiind că g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2)=g(-1)=g(1)=g(2)=2$, să se arate că ecuația $g(x)=0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1, \forall x>0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}^*$, dreapta $y = x+4$ intersectează parabola $y = ax^2 + (a-2)x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

5p **5.** În triunghiul *ABC* punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie *H* ortocentrul triunghiului *MNP*. Să se demonstreze că $AH = BH = CH$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab+a+b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2009) = X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + ... + \frac{\ln n}{n} - f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f şi axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie z_1 şi z_2 soluțiile complexe ale ecuației $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se arate că funcția $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ şi o funcție bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(1,-1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix}\cos nt & -\sin nt\\ \sin nt & \cos nt\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 x f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^6$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 2)$ şi $B(3,1)$. Să se determine măsura unghiului AOB.

5p **6.** Ştiind că $\alpha \in \mathbb{R}$ şi că $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A + I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $Y^2 = A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y + xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Să se verifice relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1 * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \ldots * \dfrac{1}{2008} * \dfrac{1}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\arcsin x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2 - x}$.

5p **b)** Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F şi $a = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

5p **2.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-3x^2$. Să se ordoneze crescător numerele $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ şi $f(2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.

5p **5.** Fie triunghiul ABC şi $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuaţia $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relaţia $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

5p **c)** Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei $X^3=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulţimea de funcţii $G=\left\{ f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$, unde „$\circ$” este compunerea funcţiilor.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup.

5p **c)** Să se arate că grupul G conţine o infinitate de elemente de ordin 2.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcţia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului x.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de continuitate al funcţiei f.

5p **c)** Să se determine punctele în care funcţia f nu este derivabilă.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2-\sin x}$ şi $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia F este strict crescătoare.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve inecuaţia $f(2x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulţime din mulţimea submulţimilor nevide ale mulţimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ şi $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.

5p **6.** Ştiind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}x+y+z=0\\ mx+y+z=m-1\\ x+my+2z=-1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 1 & 1\\ 1 & m & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul are o soluţie (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulţimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)\ \middle|\ X=\begin{pmatrix}a & \hat{2}b\\ b & a\end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulţimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f_n, g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+x^{2n}$, $g_n(x)=x^{2n+1}+1$.

5p **a)** Să se verifice că $f_n'(x)=\frac{g_n'(x)}{x+1}-\frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^3}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x+3$ și determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} \text{ și } B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ și $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{X(a) \mid a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a)** Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze derivata a doua a doua funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $\log_3 2 = a$, să se arate că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.

5p **2.** Să se determine două numere reale care au suma 1 şi produsul -1.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete şi 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,3)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul *C* şi este paralelă cu dreapta *AB*.

5p **6.** Să se arate că $\sin 6 < 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + ... + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

5p **a**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

5p **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} nI_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s \in (1;\, 2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ şi $g(x) = -4x + 1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x = 1 + \cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f : A \to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ şi $C(1, 3)$. Să se determine coordonatele punctului *D* ştiind că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

5p **6.** Ştiind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ şi că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = -2$.

2. Se consideră mulțimea $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

5p **b)** Să se arate că $X \cdot Y \in G$, pentru oricare $X, Y \in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea *G* este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b**) Să se demonstreze că $0 < f(x) \le \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}\,dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 3 \cdot 4^x = 4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n}\ \mid n \in \mathbb{N},\ n < 100\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a, 4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x \in \mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ și $H = \left\{x^2 \middle|\ x \in \mathbb{Z}_7\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $f_1(x) = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2},\ \forall x \geq 0$.

5p **b)** Să arate că $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n f_n(1)$.

Varianta 34

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+2x+1$ se găseşte pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x=\sin 2x$ din intervalul $[0,\ 2\pi)$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$, cu proprietatea că $f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $A=LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2=32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=axy-x-y+6$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a=\dfrac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” admite element neutru dacă şi numai dacă $a=\dfrac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă intervalul $[0,6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”, atunci $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right]$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n \arcsin t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f_3.

5p **b)** Să se calculeze $f_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **c)** Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$.

5p **2.** Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se calculeze valoarea funcției în punctul $x=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea *A*, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(0,-3)$ și $B(4,\ 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul *O* la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=6$, $AD=8$ şi $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $AX=B$ are o infinitate de soluții $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei *A*.

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, funcția $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$, $f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ şi mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \mid f(x)=-1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $7+5\sqrt{2}\in A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f(x)=0, \forall a\in\mathbb{R}.$

5p **c**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2(2x-x^2)^n dx, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2.$

5p **c**) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine a_{60}.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ și $C(-1,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are AB = 3, AC = 5 și BC = 7. Să se calculeze $\cos A$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2=O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a+d=0$.

5p **b)** Să se arate că matricea I_2+A este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX=O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+9$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$, numărul $a=\sqrt{2}+i$ și mulțimile $A=\left\{g(a)\mid g\in\mathbb{Q}[X]\right\}$ și $B=\left\{h(a)\mid h\in\mathbb{Q}[X],\ \text{grad}(h)\le 3\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A=B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ și șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ definit prin $a_1=2$, $a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ și pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+100$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

5p **5.** Fie *ABCD* un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de *p*, *q* şi *r*.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^a}$ există, este finită şi nenulă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \in (1,2)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2 + 3x + m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x + \cos(-x) = 1$.

5p **4.** Să se arate că, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$, are loc relația $C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x + 3y + 1 = 0$, $d_2 : 3x + y - 2 = 0$ şi $d_3 : x + y + a = 0$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*, ştiind că $AB = 4$, $AC = 3$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{C} \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX = XA$, atunci $X \in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3) - f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, numărul $f(x) - f(y)$ este divizibil cu $x - y$.

5p **c)** Să se determine coeficienții polinomului *f* ştiind că $f(1) = 4$ şi $f(b) = 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\bar{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2+4x-3\geq 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\frac{1}{x}$ este injectivă.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie *ABC* un triunghi care are *AB* = 2, *AC* = 3 şi *BC* = $2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{a+b\sqrt{5}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea *M* are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

5p **a**) Să se studieze monotonia funcției *f*.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi numărul complex $z = \frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuaţie $y = 2x + 3$ intersectează parabola de ecuaţie $y = x^2 - 4x + 12$ într-un singur punct.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1} = x$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din produsul cartezian $A \times A$ să avem egalitatea $a + b = 6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,\ 2)$ şi $B(4,\ 1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, pentru oricare $a,b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S = A - XY$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$, unde $f_1,\ f_2,\ f_3$ sunt polinoame cu coeficienţi complecşi, atunci fiecare dintre polinoamele $f_1,\ f_2,\ f_3$ este divizibil cu $X - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcţiei f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcţiile $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t \sin^n t\, dt,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1) < F_n(1),\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(1)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}=-3^x+8$.

5p **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care au proprietatea că $f(1)+f(3)=7$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin originea axelor şi este paralelă cu dreapta *AB*.

5p **6.** Fie *a* şi *b* numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ şi $\cos a+\cos b=\dfrac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $p,q,r\in\mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2z=q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

5p **b)** Dacă *p*, *q*, *r* sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluţia $(-1,1,1)$, atunci cel puţin două dintre numerele p,q,r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii *A*.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea *A* ecuaţia $X^2=I_2$.

5p **c)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0),\ f(x)=\ln(1+x)-x$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este surjectivă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f nu admite asimptote.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)\,dt=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \\ y = 2x^2 + x + 4 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5}+1)^{100}$.

5p **5.** Să se arate că punctele $A(-1,5)$, $B(1,1)$ şi $C(3,-3)$ sunt coliniare.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 şi 7.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ şi matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A_0.

5p **b)** Să se arate că $A_0B_0 - B_0A_0 = A_0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^nB - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul *f* să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

5p **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică şi, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$. Să se rezolve ecuația $f(f(x))=f^2(x)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^x=12$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a,b) din mulțimea $A\times A$, produsul numerelor a şi b să fie impar.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,\ 3)$ şi $C(-1,\ 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC.

5p **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M$.

5p **a)** Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p **b)** Să se arate că $A^{-1}\notin M$.

5p **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4-8x^3+ax^2+8x+b=0$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ şi cu soluțiile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se arate că $(x_1+x_4)(x_2+x_3)+x_1x_4+x_2x_3+(x_1+x_4)x_2x_3+(x_2+x_3)x_1x_4=a-8$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_4=x_2+x_3$.

5p **c)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât x_1,x_2,x_3,x_4 să fie în progresie aritmetică.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p **c)** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}dt$ şi $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\frac{1-i}{1+i}$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $x^2+mx+1\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin 2x=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\ldots,9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii *A* care au 5 elemente, din care exact două sunt numere pare.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $B(-1,\ 2)$ și $C(2,\ -2)$. Să se determine distanța de la punctul *O* la dreapta *BC*.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $AB+BA$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A+B)=\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(A+B)^n=A^n+B^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+4X^2+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul *f* să se dividă cu $X+1$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $g=X^4+4X^2+aX+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}},\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a=2b>0$.

5p **c)** Pentru $a=2$ și $b=1$, să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)=\int_0^{\arcsin x}e^t\cos t\,dt,\forall x\in[-1,1]$.

5p **c)** Să se determine $f(1)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Fie x_1 şi x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2+x-1=0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ şi $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-3,-1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful *A* în triunghiul *ABC*.

5p **6.** Să arate că $2\cdot(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=\sqrt{2}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $C(A)=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid XA=AX\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X+X^2=A$.

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$, funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ şi corespondența $(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondență defineşte o lege de compoziție pe G.

5p **b)** Să se arate că $\forall x,y\in G,\ f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Ştiind că operația "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{9}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}},\ a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Ştiind că $a=0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Varianta 46

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$, cu proprietatea că $f(3) = 1$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ şi $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC, ştiind că $AB = 2$, $AC = 3$ şi $BC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

5p **b)** Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

5p **c)** Ştiind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$ şi operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p **c)** Să se arate că $(G, *)$ este grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x-1|}{e^x}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \right)$.

2. Se consideră funcția $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$.

5p **a)** Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx \sin x$ să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f şi graficul funcției $g : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \pi x - x^2$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(2+i)^4+(2-i)^4$ este întreg.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y=2x+1$ şi parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ şi $C(3,2)$. Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Să se determine ecuația dreptei *OG*.

5p **6.** Să se arate că $2\cdot\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=\sqrt{6}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze $f(B)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $f(X)=B$ nu are soluții.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+a^2X-a$, $g=aX^3-a^2X^2-1$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului *f*.

5p **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului *g* sunt inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Să se arate că polinoamele f şi g nu au rădăcini reale comune.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p **b**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct de extrem local.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c**) Să se demonstreze că $\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx\ge\dfrac{9}{10}$.

Varianta 48

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde a şi b sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a şi b pentru care sistemul admite o soluție (x,y,z), cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{ X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle|\, t\in\mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u)$, $\forall t,u\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ ştiind că $X(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x\,f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este raţional.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1,\ m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) \le 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.

5p **4.** Fie mulţimea $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\}$, acesta să fie număr raţional.

5p **5.** Fie triunghiul ABC şi $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$ şi A matricea sa.

5p **a)** Să se arate că $\det A \ne 0$.

5p **b)** Să se arate că soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p **c)** Să se determine inversa matricei A.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie dată de relaţia $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = (5, \infty)$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" are element neutru.

5p **b)** Să se demonstreze că G este grup abelian în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G, *)$ sistemul $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:[1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}$.

5p **a)** Să se demonstreze că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei $g:[2,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \arccos f(x)$.

2. Se consideră funcţiile $f:[1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ şi $F:[1,2] \to \mathbb{R},\ F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 2$, graficul funcţiei F şi axa Ox.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2}+1$, $2^{a+1}+1$ să fie în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x + 4y = 1$.

5p **3.** Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, atunci $z^2 - \frac{8}{z} = 0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11, 12, \ldots, 50\}$, aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$, știind că $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B știind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ ştiind că $A = (-3;4]$ şi $B = (1;5]$.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreaptei $y = 2x + 1$ cu parabola $y = x^2 - x + 3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.

5p **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2^{x!} \le 2048$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1;1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ ştiind că $\operatorname{ctg} a = 2$ şi $\operatorname{ctg} b = 5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie şirul $(F_n)_{n \ge 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_0 = 0, F_1 = 1$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q}),\ X \ne O_2$ şi $AX = XA$, atunci X este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \ge 1$.

2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi \ne \pi\sigma$.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

5p **c)** Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - f(x)\right)^x$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \ge 1 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale a şi b astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^e \dfrac{1}{xF(x)} dx$.

5p **c)** Să se arate că, pentru funcția $h: [1,\pi] \to \mathbb{R},\ h(x) = (F(x) - 1)\sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x)h''(x)\,dx \le 0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ este constantă.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care parabola $y=x^2-2x+a-1$ şi dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3}+1\right)^9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+1)\vec{i}+8\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-1)\vec{i}-4\vec{j}$ să fie coliniari .

5p **6.** Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB=5$, $BC=7$ şi $AC=8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma\in S_6$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&5&3&6&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine σ^{-1}.

5p **b)** Să se arate că permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuația $x^4=\sigma$ nu are soluții în grupul $(S_6,\cdot)$.

2. Fie legea de compoziție „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x\circ y=xy-x-y+2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Să se arate că $(1,\infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 10 ori } x}=1025$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ şi $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f şi g şi de dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* şi $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui *x*.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p, r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5 , 7 şi 8.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$. Se consideră matricele $E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in C(A)$, atunci $X+Y\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1,E_2\in C(A)$, atunci există $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conţine trei dintre matricele E_1,E_2,E_3,E_4, atunci o conţine şi pe a patra.

2. Fie $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuaţia $ax=b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5,\cdot)$.

5p **c)** Fie $k\in\mathbb{Z}$ cu $b^k=e$. Să se arate că 6 divide *k*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real *m* din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcţiei *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuaţia $x^3-3x=m$ are soluţie unică în mulţimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva F a funcţiei f care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\dfrac{2x-1}{1-x} \geq \dfrac{3x+2}{1-2x}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe x şi y la aceeaşi putere.

5p **5.** Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului ABC.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $BC=3$ şi $\cos A=\dfrac{1}{2}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $AB \neq BA$.

5p **b)** Să se arate că $A^4+B^6=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.

2. Se consideră şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $\forall n\geq 1$ şi polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P=X^2-X-1$, $Q_n=X^n-F_nX-F_{n-1}$, $\forall n\geq 2$.

5p **a)** Să se arate că polinomul X^3-2X-1 este divizibil cu P.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu prima bisectoare.

5p **b)** Să se arate că valoarea minimă a funcției f este 1.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f(x)-1}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

2. Se consideră funcțiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_2^x \dfrac{t^2}{t^2-1}dt$ şi $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(3)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $g(x)=2f(x)$, $\forall x\in(1,\infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* şi $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

5p **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ şi $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\text{tg}\,2x$, ştiind că ctg *x* = 3.

SUBIECTUL II (30p)

1. Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2+y_{n+1}^2=(a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2\leq 1$, atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ şi $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $x^2=\hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

5p **b)** Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

5p **c)** Să se arate că polinomul $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției *f*.

2. Fie funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\leq\dfrac{x-1}{6},\forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^6}dx$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2\overline{z}+z=3+4i$.

5p **2.** Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $1+5^x-2\cdot 25^x=0$.

5p **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a\neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conține pe a^4.

5p **5.** Să se calculeze $\vec{u}^2-\vec{v}^2$ ştiind că $\vec{u}-\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se arate că $f(A)=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $f(X+f(X))=X+f(X)$, $\forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $M=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX=XA\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in M$, atunci $XY\in M$.

5p **b)** Să se arate că $G=\{X\in M \mid \det X\neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctul **b)**.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{3x+4}$.

5p **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b)** Să determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)f(2)...f(n)$.

5p **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(e^x)$.

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=e$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Să se arate că $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu-l conține pe x, din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ şi punctul $A(2\ ;\ 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta d .

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=2$, $AC=4$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din *A*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},\forall n\in\mathbb{N}$ şi $x_0=1, y_0=0$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, y_1 şi y_2 .

5p **b)** Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=0,\ \forall n\geq 0$.

2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ şi $\mathbb{Z}_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7^*,\cdot\right)$.

5p **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu $f\left(\bar{2}\right)=\hat{3}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\geq 1$ are limită .

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}xf(x)\ , x\leq 0\\ \operatorname{arctg} x, x>0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x, \forall x\in(0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ şi F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.

5p **2.** Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}+3^{1-x}=10$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{1,3,5,...,2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:2x+y-1=0$ şi punctul $A(3,\,2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Fie triunghiul ABC care are $AB=AC=5$ şi $BC=6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şi funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci *f* este funcție constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\frac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{I_2+aA+bB\,|\,a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că *G* este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în *G*.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)<g(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-m, x\in[0,1]\\ x\ln x, x\in(1,2]\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția *f* este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

5p **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4 , dar să nu fie divizibil cu 8.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin^2 x$ ştiind că ctg x = 6.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ -x-y+4z=0 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: mx+y+1=0$, $d_2: x+3y+2=0$, $d_3: -x-y+4=0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H=\left\{\begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid m,n\in\mathbb{Z}_5,\ m=\pm\hat{1}\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B\cdot A=A^{-1}\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că H este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul H.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin x$ şi F o primitivă a lui f.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3\frac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $2(1+3+3^2+...+3^8)<3^9$.

5p **2.** Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2+5x-7=0$. Să se arate că numărul $x_1^3+x_2^3$ este întreg.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N},\ x\geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2=3$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Știind că $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ și $|\vec{v}|=3$ să se calculeze $\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$.

5p **a)** Să se calculeze $f(A)$.

5p **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2, \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2, \forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $P=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AA^t=I_2\right\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ aparține mulțimii P.

5p **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $AX=B$, atunci $X\in P$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$, unde g este funcția definită la punctul **b)**.

2. Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui M, atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$, ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x+1, 1-x$ şi 4 sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right]$ ecuația $2\sin x+1=0$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M, aceasta să aibă 2 elemente.

5p **5.** Punctele A, B şi G au vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{r_G}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ şi măsura unghiului vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{M_{a,b} \mid M_{a,b}=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b}\cdot M_{c,d}=M_{a+c,b+d}$, $\forall\, a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcție de a şi b, rangul matricei $M_{a,b}-M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K,\cdot)$, unde $K=\{e,a,b,c\}$, e este elementul neutru şi $a^2=b^2=c^2=e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3=e$.

5p **b)** Să se arate că $ab=c$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(K,\cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4,+)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $x>0$ ştiind că numerele x, 6 şi $x-5$ sunt în progresie geometrică .

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot\left(f(-1)\right)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$, pentru oricare n natural.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M şi N ştiind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A, M, N, B.

5p **6.** Să se determine numerele naturale a pentru care numerele a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2=2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2=2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d\neq 2$, atunci $A=O_2$ sau $A=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4-1$, $g=X^6-1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g este X^2-1.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in(-\infty,0] \\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că , pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx\leq 2^n\pi$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n=\frac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y=x^2+x+1$ şi $y=-x^2-2x+6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2-5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx+3y+2=0$ și $d_2: 2x+y-8=0$ să fie concurente.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, atunci $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile $P=\left\{S\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid S^t=S\right\}$ și $Q=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A^t=-A\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\in P$ și $\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $\left|f(x)\right|\leq|x|$, $\forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}axe^x-x, & x\leq 0\\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a și b știind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Știind că $a=0$ și $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi}f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}x^n f(x)dx=-\infty$.

Varianta 64

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ şi $g(x)=x-2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$ ştiind că $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: mx+(m+2)y-1=0$ şi $d_2: (m+2)x+4my-8=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg} A=2$, $\operatorname{tg} B=3$. Să se determine măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ şi $\det(X)=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului f.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2$, unde $x_1,x_2,...,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}dx$.

www.mateinfo.ro

Varianta 65

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 2.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ şi $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare.

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1,1,1)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ şi F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului a.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuația $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ și $D(m,5)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram .

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 x$, ştiind că $\operatorname{tg} x=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie dreptele $d_1: x+2y=3,\ d_2: 3x-4y=-1,\ d_3: 4x+3y=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui m pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f=2X^3-aX^2-aX+2$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine a pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{|1-x^2|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3],\ f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\geq\alpha$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-m^2)x+3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea *M* a tuturor funcțiilor definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea *M*, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul *G*, centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Prin punctul *G* se duce paralela la *AB* care intersectează dreapta *BC* în punctul *P*. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP}=m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, ştiind că $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m & m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A)\neq 2$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui $m\neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x=x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3=\alpha^3 x$ în S_4.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții
$M=\{f:[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă şi } f(0)=0,\ f'(0)=1\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $u:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $u(x)=e^x\sin x$ aparține mulțimii *M*.

5p **b)** Să se arate că , dacă $f\in M$ şi $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $f\in M$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$ şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x)=\ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots f\left(\frac{n}{n}\right)\le n\ln 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$ este întreg.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t=B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B=2I_2$, atunci $\det(A)\ge 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x,y\in\mathbb{C}$ şi matricea $xA+yA^t$ este inversabilă, atunci $x+y\ne 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$, şi x_1,x_2,x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Ştiind că $p=1$ şi $q=0$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se determine *p* şi *q* ştiind că $x_1=1+i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7+x_2^7+x_3^7)=7(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\ge 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\le e-2$.

www.mateinfo.ro

Varianta 69

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $z \in \mathbb{C}$ ştiind că $\dfrac{\overline{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le 100$.

5p **5.** Să se arate că dreptele de ecuații $d_1:\ 2x-y+1=0$ şi $d_2:\ 2x+y-1=0$ sunt simetrice față de axa *Oy*.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\dfrac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3-A=A^2-I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se defineşte polinomul $P_n=X^n-1\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate, folosind eventual funcția *f*, că $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\dfrac{5}{12}$.

www.mateinfo.ro

Varianta 70

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{20}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Să se calculeze suma

$S=f(f(-10))+f(f(-9))+...+f(f(-1))+f(f(1))+...+f(f(9))+f(f(10))$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(3^x+1)$ este injectivă .

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-6C_5^3$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că distanța de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta $d:\ 3x-4y-1=0$ este 1.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte matricea $[A,B]=AB-BA$.

5p **a)** Pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A,A^2]$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,A^*]=O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O_2$.

2. Se consideră intervalul $H=(0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relația $a\circ b=\frac{ab}{ab+(1-a)(1-b)}$ defineşte o lege de compoziție pe H.

5p **b)** Să se arate că funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy)=f(x)\circ f(y),\ \forall x,y>0$, unde legea "$\circ$" este definită la punctul **a)**.

5p **c)** Ştiind că legea "$\circ$" definită la punctul **a)** este asociativă, să se rezolve în mulțimea $(H,\circ)$ ecuația $x\circ x\circ x=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se defineşte funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{2x}$ şi, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_3(x)=8e^{2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să determine asimptotele graficului funcției f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+...+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\ln^2 x & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Varianta 71

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_7 2009-\log_7 287-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x^4$ este $f(0)$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, astfel încât $3C_n^1+2C_n^2=8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele A',B',C' astfel încât $\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A}=3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $A(2,2)$ şi ecuațiile medianelor duse din B şi C sunt $2x+y-2=0$, respectiv $x-y+2=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n\geq 2$, $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2\end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$, $\forall n\geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n=n+1$, $\forall n\geq 2$.

2. Un grup $(G,\cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2=e$, $\forall x\in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b)\cdot(c,d)=(a+c,\, b+d), \forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2=x^2y^2$, $\forall x,y\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2 t^x\,dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât $F(x)=1+\int_0^x f(y)dy, \forall x\in(-1,\infty)$.

www.mateinfo.ro

Varianta 72

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x.$

5p **4.** Să se calculeze $C_{2009}^0\cdot5^{2009}-C_{2009}^1\cdot5^{2008}\cdot4+C_{2009}^2\cdot5^{2007}\cdot4^2-...-C_{2009}^{2009}\cdot4^{2009}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,2)$ și dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin75^\circ\cdot\cos15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3+xA^2)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2=A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C\in M_3(\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p=X^3-X+m$ cu $m\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $m=-6$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x),x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=|\sin nx|$ și numărul $I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le\ln2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^x=20$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{0,5,10,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 25.

5p **5.** Se consideră un triunghi *ABC*, cu lungimile laturilor $AB=c, AC=b$ şi un punct *D* astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta [*AD* este bisectoarea unghiului *BAC*.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x,y)$ punctul $A_M(x',y')$, unde $\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$.

5p **a)** Ştiind că $a=1, b=2, c=3, d=4$ şi că $A(-1,1)$, să se determine coordonatele punctului A_M.

5p **b)** Ştiind că $a=1, b=2, c=2, d=4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p **c)** Fie *A*, *B*, *C* trei puncte în plan. Dacă se notează cu S şi S_M ariile triunghiurilor ABC, respectiv $A_M B_M C_M$, atunci $S_M=S\cdot|\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ \hat{0} & a & d\\ \hat{0} & \hat{0} & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **b)** Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=X$, cu $X\in A$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^x$.

5p **b)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că 3 este punct de extrem local al funcției *f*.

5p **c)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că graficul funcției *f* are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ şi, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^{\,2}(x)=2f_2(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2+3z+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției *f* să nu intersecteze axa *Ox*.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}+\sqrt[3]{x-2}=0$.

5p **4.** Să se arate că $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b}$, pentru oricare $a,b\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ şi $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se verifice relația $A(A^2+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Z}$ şi polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Ştiind că $a=b=1$, să se afle rădăcinile polinomului *p*.

5p **b)** Să se determine a şi b, ştiind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** În cazul $b=1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină rațională.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\frac{t}{x}-e^x\right)^2dx$ şi numerele $A=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $f(t)=At^2-2Bt+\frac{e^4-e^2}{2},\ \forall t\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t),\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\frac{e^x}{x}dx\right)^2\leq\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\frac{1}{x^2}dx\right)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}, b=\log_2 \frac{1}{16}$ şi $c=-2$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m ştiind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)=1$.

5p **4.** Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 şi punctele distincte $A,B,C\in d_1$, $M,N,P,Q\in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor şapte puncte date.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1;-4)$ şi $C(-5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM=BC=4$, unde M este mijlocul lui (BC), iar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B$, cu $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_xM_y=M_{xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x)\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha\in\mathbb{R},\alpha>1$ şi funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^\alpha-\alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha>1+\alpha x, \forall x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall\alpha\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y)\le f(2x)+f(2y), \forall x,y\in[0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, dat de $a_n=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)-\int_0^n f(x)dx$, este convergent.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 şi x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi *n* natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^{n}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1+a^2 & ab & ac\\ ba & 1+b^2 & bc\\ ca & cb & 1+c^2\end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei *A*.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcția $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax,\forall x\in G$.

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab},\ \forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G \mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul I_n este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t)\leq t,\ \forall t\in(-1,\infty)$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2 şi cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=1+x.$ Să se calculeze $f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-10).$

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 56.$

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2.$

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}.$ Să se arate că dreptele GM şi AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha.$

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-\ \ y-mz=1\\ mx+\ \ y+mz=1-m\\ mx+3y+3z=-1\end{cases},\ m\in\mathbb{R}.$

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R},$ matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha>0$ un număr real şi mulțimea $G_\alpha=(\alpha,\infty).$ Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=3xy-6(x+y)+7\alpha.$

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha=2,$ cuplul $(G_2,*)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2,*)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f:G_2\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=3x-6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha\geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)=e^x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x=0$ dacă şi numai dacă $f(0)=1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_1^2((x-1)(2-x))^n\,dx.$

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n=nI_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Varianta 78

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $10^{\lg 7}-\sqrt[3]{343}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-3x+1\le 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3 2^x - x$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Fie $a,b\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a+b=\frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x-3y+4z-5t=-1\\ x+9y+mz+t=3\\ 5x-6y+10z+nt=p\end{cases}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0,y_0,z_0,t_0) cu $z_0=t_0=0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m,n\in\mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},\ m \text{ şi } n \text{ sunt impare}\right\}$ şi $G=Q_0\times\mathbb{Z}$. Pe G se defineşte legea de compoziție $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,k_1+k_2),\ \forall q_1,q_2\in Q_0,\forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se calculeze $(1,1)*(1,2)*...*(1,10)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:G\to\mathbb{Q}^*,\ f((q,k))=q\cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cap\left(\log_2 3,\infty\right)=\varnothing$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției *f* cu axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3.

5p **5.** Fie punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ și $C(0,4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}^2 x=6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+my+2z=1 \\ x+(2m-1)y+3z=1 \\ x+my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m=1$ să se determine soluțiile reale (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2-y_0^2+3z_0^2=14$.

2. Pe mulțimea $G=[0,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3}*\frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x*x*x=\frac{1}{2}$, $x\in G$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-n)+n^2\right)$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ şi $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin\pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)\left(1-i^2\right)\left(1-i^3\right)...\left(1-i^{2009}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-1.$ Să se arate că funcția $f\circ g$ este descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1.$

5p **4.** Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)\neq 1$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4,-1)$ şi este paralelă cu dreapta $x-2y+1=0.$

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x.$ Să se calculeze $\sin 2x.$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\in S_5$ şi mulțimea $A=\left\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul inversiunilor lui σ.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **c)** Fie $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma=\sigma\tau$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție şi mulțimea $H=\{T\in\mathbb{R}\mid f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că *H* este subgrup al grupului $(\mathbb{R},+)$.

5p **c)** Să se determine mulțimea *H* pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției *f* admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_0^1\frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1\ln(1+x^n)dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

www.mateinfo.ro

Varianta 81

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-2x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 şi x_2. Ştiind că $|x_1-x_2|=1$, să se determine m.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x}=1+x$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{16}^0+C_{16}^2+C_{16}^4+...+C_{16}^{16}$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $x+y=1$ şi $3x-ay=2$ sunt paralele.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a+\sin 2b=2\cos(a-b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi punctele $A(m,1)$, $B(1-m,2)$, $C(2m+1,\ 2m+1)$. Se consideră matricea

$$M=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1-m & 2 & 1\\ 2m+1 & 2m+1 & 1\end{pmatrix}.$$

5p **a)** Să se calculeze $\det(M)$.

5p **b)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu $\dfrac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul $\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t^3\sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^5}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$ se află pe dreapta de ecuație $x+y=7$.

5p **3.** Fie $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ şi $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$., sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, ştiind că $a\neq b$ şi că $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$.

2. Fie funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2+3x+m \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}+4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}89^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m \in \{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$.

2. Se consideră mulțimile $H=\{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ şi $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii *H*.

5p **b)** Fie $x, y \in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că *G* este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2 \sin 4x$, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, f_1(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, f_1(x)dx = \frac{\pi-1}{4}$.

Varianta 84

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z + 3\overline{z} \in \mathbb{R}$, atunci $z \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4), (1,-2)$ şi $(-1,1)$.

5p **3.** Se se arate că funcția $f:(0,\infty) \to (1,3)$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n, $n \ge 5$, astfel încât $C_n^3 = C_n^5$.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

5p **6.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \le 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ nx + y - 2z = 4 \end{cases}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul admite soluția $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$.

5p **b)** Să se determine $n \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se determine *m* şi *n* pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că *G* este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că $X^3 = I_3$, oricare ar fi $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(f(n) - f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t}(t^2 - 3t + 2)\,dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) > 0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că numărul $i\left(z-\bar{z}\right)$ este real.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m+1)x+m$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **4.** Câți termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a,b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b=0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie A matricea coeficienților sistemului $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y+mz=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m=0$, atunci expresia $\frac{z_0^2+y_0^2+x_0^2}{z_0^2-y_0^2-x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.

2. Se consideră $a,b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina i.

5p **b)** Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

5p **c)** Să se determine valorile reale ale numerelor a şi b ştiind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} t\,dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este real.

5p **2.** Numere reale *a* şi *b* au suma 5 şi produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

5p **4.** Câte elemente ale mulţimii $A=\left\{x \mid x=C_7^k,\ k\in\mathbb{N},\ k\le 7\right\}$ sunt divizibile cu 7?

5p **5.** Fie *ABCD* un dreptunghi cu *AB* = 3 şi *AD* = 6. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze suma $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+...+\cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+\ \ ay+\ \ \ (a+b)z=a+b \\ x+a^2y+(a^2+b^2)z=a^2+b^2 \\ x+a^3y+(a^3+b^3)z=a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice valori rele ale parametrilor *a* şi *b* sistemul are soluţie.

2. Se consideră polinomul $f=\hat{2}X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_4[X]$.

5p **a)** Să se determine gradul polinomului f^2.

5p **b)** Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X],+,\cdot)$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $g\in\mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2=\hat{1}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei *f*.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}f(2)f(3)...f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2},\ \forall n\ge 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6\le 0$.

5p **3.** Fie funcția $f:(1,\infty)\to(2,\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **4.** Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 şi cu 8?

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are laturile $AB=3$, $BC=5$ şi $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul *ABC*.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3+A^3\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB=BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană ale lui *B* este aceeaşi.

2. Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Q}(\varepsilon)=\{a+b\varepsilon \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\varepsilon^2\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $M=\{a^2-ab+b^2 \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare.

5p **b)** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\ge 1}$ definit prin $x_1=1$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{3-x}$ şi $g(x)=\frac{\ln(3-x)}{x}$, $\forall x\in(0,3)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{t\searrow 0}\int_t^1 f(x)dx=+\infty$.

Varianta 88

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=\lg 2-\lg 20$, $b=C_3^2-C_4^2$ şi $c=-\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2+2x+a$ la axa Ox este egală cu 1.

5p **3.** Numerele reale x şi y verifică egalitatea $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\frac{\pi}{2}$. Să se arate că $x\cdot y=1$.

5p **4.** Să se arate că numărul A_n^3, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ este divizibil cu 3.

5p **5.** Punctele E,F,G,H sunt mijloacele laturilor $[BC],[DA],[AB]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} x$, ştiind că $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ şi $\sin 2x=-\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & m & -1\\ 3m+4 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matrice A să fie inversabilă.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1}=A^{*}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ şi polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3$, $f=X^3-X$, $g=X^3+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se arate că polinomul *g* este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x)=g(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 x^n\sin x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{2n}+2n(2n-1)I_{2n-2}=2n\sin 1-\cos 1$, $\forall n\geq 2$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\overline{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct *M* din planul paralelogramului *ABCD* are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie *a* şi *b* numere reale, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_3-x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui *a* şi *b*, sistemul este compatibil.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1,x_2,x_3,x_4) cu proprietatea că x_1,x_2,x_3,x_4 şi x_1+x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a+b<1$.

2. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+5X+1\in\mathbb{R}[X]$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a>0$ se consideră funcția $f_a:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x>0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, $\forall n\geq 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Varianta 90

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a+b=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$, acesta să **nu** fie divizibil cu 7.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful *A*, perpendiculară pe dreapta *BC*.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie *M* mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din *M* este neinversabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $A\in M$, atunci $A^2\in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ și $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $x\in\mathbb{R}$ și $x^2=3+2\sqrt{2}$, atunci $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

5p **b)** Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\cap\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]=\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ și $I_n=\int_0^a\frac{t^n}{t+1}dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n},\ \forall n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Varianta 91

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x şi y ştiind că $x+2y=1$ şi $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$ nu este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Ştiind că vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au acelaşi modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.

5p **6.** Să se arate că $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2009}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}\left(A+A^t\right)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c, ştiind că $a=b=c$, iar restul împărțirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\sin^2 x},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x F(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Numerele reale pozitive a,b,c,d sunt în progresie geometrică. Ştiind că $d-a=7$ şi $c-b=2$, să se determine raţia progresiei.

5p **2.** Să se determine valorile reale nenule ale lui m ştiind că $mx^2+x-2\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0,5)$ ecuaţia $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-(2a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci suma elementelor lui X este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ şi $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=e$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **b)** Să se demonstreze că funcţia f este concavă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulele rădăcinilor complexe ale ecuației $z^2+2z+4=0$.

5p **2.** Să se determine funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare şi îndeplinesc condiția $f(f(x))=4x+3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=12$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(3,4)$. Să se calculeze distanța de la originea axelor la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se determine $\alpha\in(0,2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se determine $\left(A\cdot A^t\right)^{-1}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=A,\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine a şi b astfel încât restul împărțirii polinomului f la X^2-X să fie X.

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $t\in\mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_t(x)=x^3+t^2x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că fiecare funcție f_t este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(t)=f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x(t^2+1)\sqrt{|t|}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție impară.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^2\sqrt{x}}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi O centrul cercului circumscris lui. Ştiind că $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că A este matrice inversabilă.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n & b^n-c^n \\ 0 & 0 & c^n\end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze A^{-1}.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f\left(X^2+3X+1\right)=f^2(X)+3f(X)+1$ şi $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}, \forall n\geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p **3.** Să se studieze monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2009^x+\log_{2009}x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului *a*.

5p **6.** Să se arate că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n\in\mathbb{N}^*$ şi matricea $A_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3+xI_3)=0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-aX^2+bX-c\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1=2$ şi $x_2=1+i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1,x_2,x_3 sunt strict pozitive.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\text{arctg}\,x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x+1)-f(x)-f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\text{arctg}\frac{1}{1+1+1^2}+\text{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\text{arctg}\frac{1}{1+3+3^2}+...+\text{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$, pentru orice $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie *a,b,c* numere naturale nenule în progresie geometrică. Ştiind că $a+b+c$ este un număr par, să se arate că numerele *a,b,c* sunt pare.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+2.$ Să se arate că $f(a)+f(a+1)\geq 0,$ oricare ar fi $a\in\mathbb{R}.$

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2 x+\log_4 x>3$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale *n,* $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=120$.

5p **5.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u}=2\vec{i}-a\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ este obtuz dacă şi numai dacă $a>2.$

5p **6.** Fie *ABC* un triunghi cu $\sin A=\frac{1}{2},$ $\sin B=1$ şi $BC=4.$ Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $tr(A)=a+d$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2-tr(A)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $tr(A)=0,$ atunci $A^2B=BA^2,$ pentru orice matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

5p **c)** Să se arate că dacă $tr(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2,$ atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X].$

5p **a)** Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3).$

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulțimea $A=\mathbb{R}\setminus\{1,2,3,...,2009\}$ şi funcția $f:A\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-2009}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p **b)** Ştiind că $a\in\mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(f(n))_{n\geq 1}$ este convergent.

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!,\ \sqrt[3]{100},\ \log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2+3xy+4y^2\geq 0$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x=\cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A,B,C astfel încât $A(1,3),B(2,5)$ şi $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $BC=8$ şi $\cos A=\frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $\det\left(A\cdot A^t\right)\geq 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A\cdot A^t=A^t\cdot A$, atunci $(a-d)(b-c)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\left(A-A^t\right)^{2009}=A-A^t$, atunci $|b-c|\in\{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{2}x=\hat{3}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $p=\hat{2}X^2+\hat{4}\in\mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_7,\ f(x)=\hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7,+)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)<x-\frac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx<\frac{1}{4}$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Ştiind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ şi $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze tg *a*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se defineşte funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției *g* pe intervalul $[0, \pi]$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.

5p **4.** Câte funcții $f:\{1,2,3,...,10\} \to \{0,1\}$ au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(10)=2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ şi $P(3,m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t + xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0) \ge 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\{\cos q\pi + i\sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.

5p **b)** Să se arate că *G* este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în *G*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t\,dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} f_n(1)$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x|=1-x$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1+C_{11}^2+...+C_{11}^{10}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate. Ştiind că $A(1,1), B(5,2)$ şi $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie $a\in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a=\frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

www.mateinfo.ro

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2+A)^2=I_2+A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n\in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3=A,\ X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n\in \mathbb{N},\ n\geq 3,\ a_0,a_1,...,a_n\in \mathbb{Z}$ şi polinomul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ şi $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g=X^3-X+3a+1,\ a\in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+x^3-x^2+x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1},\ I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.