Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.
5p	**b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{3}{2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\dfrac{1}{2}$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi \Rightarrow 2\overline{z}-z=a-3bi$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$a-3bi=1-3i \Rightarrow a=1$ și $b=1$, deci $z=1+i$	**2p**
2.	$y_V=0 \Leftrightarrow \Delta=0$	**3p**
	Cum $\Delta=m^2-4$, obținem $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$2\lg x=\lg(x+2) \Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Panta dreptei d este $m_d=1 \Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x-3$	**2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin x-\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m=-1$ sau $m=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$a-b=\dfrac{1}{3}$, $b-c=\dfrac{1}{3}$ și $a-c=\dfrac{2}{3}$	**3p**
	Deoarece $a-b\notin\mathbb{Z}$, $b-c\notin\mathbb{Z}$ și $a-c\notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg	**2p**
2.a)	$x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{4}=$	**2p**
	$=4x\left(y+\dfrac{3}{4}\right)+3\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$, $x*x*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$4a^2=a$, deci $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$	**3p**
	$15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f	**2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\|_0^1-3\ln(x+3)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n dx=e^x(2x+3)^n\Big\|_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}dx=$	**3p**
	$=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**