Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3$, $x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x \Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuația, sau $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obținem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a \neq -1$ și $a \neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$	**2p**
	$= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2 = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n * n = 2 - 5(n-2)^2$, $(n*n)*n = 2 + 25(n-2)^3$	**3p**
	$2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)\left(25(n-2)^2 - 1\right) = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
c)	$a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2$	**1p**
	$b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2$, deci $a - 2 = -125(a-2)^4$	**2p**
	$a - 2 = 0$, de unde $a = b = 2$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$, de unde $a = b = \frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$	**1p**
	$x \in [-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, +\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	**1p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \cdot x} =$	**2p**
	$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = \frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1 - a > 0$, $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 - a > 0$, pentru orice $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$	**2p**
b)	$x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ și $x^n \geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n = 2\int_0^1 x^n \left(\sqrt{x+1}\right)' dx = 2x^n \left(\sqrt{x+1}\right)\Big\|_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**