ADRIAN STAN

PROBLEME ALESE DE MATEMATICĂ

PENTRU CLASELE V-VIII

Referenţi ştiinţifici:

Prof. gr. I **Mânzală Iorgu** - inspector de matematică
Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău

Prof. gr. I **Stanciu Neculai** – director Grupul Şcolar Tehnic
„Sf. Mc. SAVA”, Berca

BREVIAR TEORETIC

DIVIZIBILITATE

Relația de divizibilitate: a $\vdots$ b (sau b | a)

$\Leftrightarrow \quad \exists c \in N \quad respectiv \quad Z$ astfel încât a=bc.

(a se divide cu b) sau (a este divizibil cu b) sau (b divide pe a)

Proprietăți:

1. a | a , $\forall a \in Z^*$
2. 1 | a, $\forall a \in Z$
3. a | b, b | c $\Rightarrow$ a | c, $\forall a,b \in Z^*$
4. d | a,d | b $\Rightarrow$ d | a+b sau d | a-b
5. a | b, b | a $\Rightarrow$ a=b , $\forall a,b \in Z^*$
6. d | a $\Rightarrow$ d | abc
7. a | d, b | d $\Rightarrow$ ab | d, dacă a şi b sunt prime între ele.

Descompunerea în factori primi:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot \ldots\ldots\ldots p_k^{a_k} \in N$$

Numărul divizorilor lui n$\in N$ este:

N=$(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots\ (a_k+1)$.

Numărul divizorilor lui n$\in Z$ este: N'=2N

Numere prime

Numim număr prim orice număr natural mai mare decât 1, care are numai divizori improprii-adică pe 1 şi pe el însuşi.

Criterii de divizibilitate:

Criteriul de divizibilitate cu 2
Un număr este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este pară. Numerele care sunt divizibile cu 2 se numesc numere pare.
Criteriul de divizibilitate cu 5
Un număr este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
Criteriul de divizibilitate cu 4
Un număr este divizibil cu 4, dacă numărul format de ultimele sale 2 cifre este divizibil cu 4.
Criteriul de divizibilitate cu 8
Un număr este divizibil cu 8, atunci când n umărul format de ultimele sale 3 cifre este divizibil cu 8.
Criteriul de divizibilitate cu 25
Un număr este divizibil cu 25, dacă numărul format de ultimele sale 2 cifre este divizibil cu 25, adică dacă ultimele sale 2 cifre sunt:00;25;50; 75.
Criteriul de divizibilitate cu 125
Un număr este divizibil cu 125, dacă numărul format de ultimele sale 3 cifre este divizibil cu 125.
Criteriul de divizibilitate cu o putere a lui 10
Un număr este divizibil cu o putere a lui 10, dacă ultimele sale n cifre sunt zerouri.
Criteriul de divizibilitate cu 3
Un nr.este divizibil cu 3, dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3.
Criteriul de divizibilitate cu 9
Un număr este divizibil cu 9, daca suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.
Criteriul de divizibilitate cu 6
Un număr este divizibil cu 6, dacă este divizibil cu 2 şi cu 3.
Criteriul de divizibilitate cu 15
Un număr este divizibil cu 15, dacă este divizibil cu 5 si cu 3.
Criteriul de divizibilitate cu 11
Un număr este divizibil cu 11, dacă diferenţa dintre suma cifrelor situate pe locurile impare si suma cifrelor situate pe locurile pare este un număr divizibil cu 11.

Teorema împărţirii cu rest în N.

Fie a, b $\in N \Rightarrow \exists q, r \in N, 0 \le r \langle b \quad a.î \quad a = b \cdot q + r, b \neq 0$

Cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b (c.m.m.d.c) sau (a,b) este cel mai mare număr la care se împart exact si a si b şi este dat de produsul factorilor comuni, luați la puterea cea mai mică.
1) (a;b)=d <=> a=dxa', b=dxb', (a';b')=1
2) (a;b)=d <=> d/a si d/b, oricare ar fi d' a.î. d'/a si d'/b=> d'/d

Cel mai mic multiplu comun al numerelor a si b (c.m.m.m.c.) sau [a,b] este cel mai mic număr care se împarte exact şi la a şi la b şi este dat de produsul factorilor comuni şi necomuni luați la puterea cea mai mare.
1)[a;b]=m <=> m=axm' , m=bxm'
2)[a;b]=m <=> a/m si b/m, oricare ar fi m', a.i. a/m' si b/m'=>m'/m

Relația dintre c.m.m.m.c şi c.m.m.d.c
[a,b]·(a,b)=a·b

Dacă p şi q sunt prime atunci $p^n si \quad q^m$ sunt prime.

MULȚIMI. OPERAȚII CU MULȚIMI

$N = \{0,1,2,3,.........\ ..n,......\}$ $\qquad N^* = N \setminus \{0\}$

$Z = \{......-n,....-3,-2,-1,0,1,2,3,........., n,.......\}$ $\qquad Z^* = Z \setminus \{0\}$

$Q = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in Z, b \neq 0\right\}$ $\qquad Q^* = Q \setminus \{0\}$

$R \setminus Q = \left\{\sqrt{n} \middle| n \rangle 0 \quad nu \quad este \quad patrat \quad perfect\right\}$

$R = Q \cup (R \setminus Q) = (-\infty, +\infty)$.

Fie **A** şi **B** două mulțimi. Atunci:

$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \quad sau \quad x \in B \right\}$. **Reuniunea mulțimilor**.

$A \cap B = \left\{ x \middle| x \in A \quad si \quad x \in B \right\}$. **Intersecția mulțimilor.**

$A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \quad si \quad x \notin B \right\}$. **Diferența mulțimilor.**

$AxB = \left\{ (x, y) \middle| x \in A \quad si \quad y \in B \right\}$. **Produsul cartezian.**

Definiție: Se numeşte cardinal al unei mulțimi finite , numărul de elemente pe care-l are aceasta.

Principiul includerii şi excluderii:

card(A $\cup$ B) =card (A) +card(B) –card (A$\cap$B).

Definiție: Se numeşte submulțime al unei mulțimi A, orice mulțime formată cu elementele lui A.

Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n.

FRACȚII

Fracție: Se numeşte fracție, o expresie de forma $\frac{a}{b}, b \neq 0$ unde a se numeşte numărător iar b se numeşte numitor.

<u>Fracție subunitară</u>: Fracția $\frac{a}{b}, b \neq 0$ se numeşte fracție subunitară dacă a<b sau $\frac{a}{b} \langle 1$.

<u>Fracție echiunitară</u>: Fracția $\frac{a}{b}, b \neq 0$ se numeşte fracție echiunitară dacă a=b sau $\frac{a}{b} = 1$.

Fracție supraunitară: Fracția $\frac{a}{b}, b \neq 0$ se numeşte fracție supraunitară dacă a>b sau $\frac{a}{b} \rangle 1$.

Fracții echivalente: Două fracții $\frac{a}{b} si \frac{c}{d}$ se numesc echivalente şi scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

A amplifica o fracție cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a înmulți atât numărătorul cât şi numitorul, cu acel număr. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}, b \neq 0, m \neq 0.$

A simplifica o fracție cu un număr natural, diferit de 0, înseamnă a împărți atât numărătorul, cât şi numitorul la acel număr. $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}, b \neq 0, m \neq 0.$

Fracție ireductibilă: Fracția $\frac{a}{b}, b \neq 0$ se numeşte ireductibilă, dacă nu se mai poate simplifica adică c.m.m.d.c(a,b)=1.

Compararea fracțiilor:

$\frac{a}{b} \rangle \frac{c}{b} \Leftrightarrow a \rangle c$ $\quad$ $\frac{a}{b} \rangle \frac{a}{c} \Leftrightarrow b \langle c$ $\quad$ $\frac{a}{b} \rangle \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \rangle b \cdot c$

Număr rațional :

Se numeşte număr rațional , numărul reprezentat prin fracția $\frac{a}{b}$ şi toate fracțiile echivalente cu aceasta.;

Operații cu numere fracționare: Pentru a aduna sau scădea numere fracționare reprezentate prin numitori diferiți se aduc fracțiile la acelaşi numitor prin amplificarea fiecărei fracții cu câtul dintre c.m.m.m.c al numitorilor şi numitorul fracției respective.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}; \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0=1; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}; \quad \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$$

Introducerea unui întreg în fracție: $a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$;

Fracții zecimale:

- Fracții zecimale: finite: $\{0,5;1,45;2,5;0,12345;......\}$

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare: $\overline{a,b}=\frac{\overline{ab}}{10}$; $\overline{a,bc}=\frac{\overline{abc}}{100}$;

- fracții zecimale -periodice: $\{1,(3);21,3(5);2,3(4)......\}$

Transformarea fracțiilor zecimale periodice în fracții ordinare:

$$\overline{a,(b)}=\frac{\overline{ab}-a}{9}; \quad \overline{a,(bc)}=\frac{\overline{abc}-a}{99};$$

$$\overline{a,b(c)}=\frac{\overline{abc}-\overline{ab}}{90}; \quad \overline{a,b(cd)}=\frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{990};$$

Scrierea în baza zece:

$\overline{abcd}=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d$ a-cifra miilor; b-cifra sutelor; c-cifra zecilor; d-cifra unităților;

$$\overline{a,efg}=a\cdot10+e\cdot10^{-1}+f\cdot10^{-2}+g\cdot10^{-3}=$$

$$=a\cdot10+e\cdot0.1+f\cdot0.01+g\cdot0.001$$

a-cifra unităților, e-cifra zecimilor; f-cifra sutimilor; g-cifra miimilor.

Aflarea unei fracții dintr-un număr :

$\frac{a}{b}$ din x = $\frac{a}{b}\cdot x$; $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$;

Procente: Un raport în care numitorul este 100, se numeşte raport procentual si se notează de forma

$\frac{p}{100}=p\%$; (sau $p\cdot\frac{1}{100}$) $p\%$ din x = $\frac{p}{100}\cdot x$; $p\%$ din $\frac{a}{b}=\frac{p}{100}\cdot\frac{a}{b}$ sau $p\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{a}{b}$

Operații cu fracții zecimale:

La adunarea sau scăderea fracțiilor zecimale finite, numerele trebuie aşezate astfel încât virgula să fie sub virgulă.

La înmulțirea cu 10, 100, 1000 a unei fracții zecimale finite se deplasează virgula spre dreapta cu 1,2,3 cifre.

La împărțirea cu 10,100,1000, a unei fracții zecimale finite se deplasează virgula spre stânga cu 1,2,3 cifre.

La înmulțirea fracțiilor zecimale finite, efectuăm înmulțirea obişnuită după care punem virgula de la dreapta spre stânga după un număr de zecimale egal cu numărul de cifre zecimale ale celor două numere;

La împărțirea fracțiilor zecimale finite se vor înmulții ambele numere cu puteri ale lui 10 astfel încât să împărțim numere fără virgulă.

Ultima cifră a unui număr

$$U(\overline{abc}^{\,n}) = U(c^n)$$

$U(c^n)$	n=4k+1	n=4k+2	n=4k+3	n=4k
1^n	1	1	1	1
2^n	2	4	8	6
3^n	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6
5^n	5	5	5	5
6^n	6	6	6	6
7^n	7	9	3	1
8^n	8	4	2	6
9^n	9	1	9	1

Proporții: Egalitatea a două rapoarte se numeşte proporție:

Proprietatea fundamentală a proporțiilor: $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$

Proporții derivate:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \frac{a}{b \pm a} = \frac{b}{d \pm b}, \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \qquad \frac{a}{b:m} = \frac{c}{d:m} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$$

$$\frac{a \cdot m}{b} = \frac{c \cdot m}{d} \qquad \frac{a}{b:m} = \frac{c}{d:m} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$$

$$\frac{a \cdot m}{b} = \frac{c \cdot m}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b} \qquad \frac{a}{b:m} = \frac{c}{d:m}$$

Sir de rapoarte egale:
Mărimile ($a_1,a_2,a_3,......, a_n$) şi ($b_1,b_2,....,b_n$) sunt direct proporționale $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ...\frac{a_n}{b_n}$

Mărimile ($a_1,a_2,a_3,......, a_n$) şi ($b_1,b_2,....,b_n$) sunt invers proporționale $\Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = ...a_n \cdot b_n$

Probabilități

Probabilitatea realizării unui eveniment este dat de raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului şi numărul cazurilor egal posibile.

Modulul numerelor reale Proprietăți:

$$|a| \underline{\underline{def}} \begin{cases} a, & a \rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a \langle 0 \end{cases}$$

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in R$; **2**. $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0$;

3. $|a| = |-a|, \quad \forall a \in R$; **4**. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b$;

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; **6**. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$

7. $|x^n| = |x|^n$, $\forall x \in R$, $n \in N$

8. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, $a,b \in R$

9. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$; $a,b \in R$

10. $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a\rangle 0$;

11. $|x| \le a, \quad \Leftrightarrow x \in [-a, a], \quad a\rangle 0$;

12. $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$, $\forall a,b \in R$;

$\min\ (a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

13. $|x| \ge a, \quad \Leftrightarrow x \in [-\infty, -a] \cup [a, +\infty], \quad a\rangle 0$;

14. $|a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n| \le |a_1| + ... + |a_n|$, *in* R.

Puteri cu exponent întreg

Fie $a \in R, n \in Z$

$$a^n \underline{\underline{def}} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ...... \cdot a}_{n \quad factori}$$

Fie $a, b \in R, a, b \ne 0, m, n \in Z^*$

1. $a^o = 1; a^1 = a; 0^n = 0;$
2. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
8. $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n.$
9. $(-1)^n = \begin{cases} 1, n \quad par \\ -1, n \quad impar \end{cases}$
10. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

Proprietățile radicalilor

$Fie\ a, b \in R_+$

1. $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0,$

2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ b \neq 0$

4. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{2}}$

5. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

unde $a^2-b=k^2$. (formula radicalilor dubli)

6. Dacă $\sqrt{a} \in N \Rightarrow a = k^2$

7. $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

8. $\sqrt{a^2 b} = |a| b$

9. $x\sqrt{a} \cdot y\sqrt{b} = xy\sqrt{ab}$

10. $x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a} = (x \pm y)\sqrt{a}$

11. $\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}} = \frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}},\quad y, b \neq 0$

12. $(x\sqrt{a})^n = x^n \sqrt{a^n}$

13. Fie $\sqrt{a} \in R \setminus Q$. Atunci $\sqrt{a} = \frac{m}{n} \in Q \Leftrightarrow m = n = 0$

14. Dacă $m, n \in Q$ şi a nu e pătrat perfect şi
$m + n\sqrt{a} = 0 \Rightarrow m = n = 0$

15. Dacă a, b$\in N$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in Q \Rightarrow \sqrt{a} \in N, \sqrt{b} \in N$

16. Dacă a şi b nu sunt pătrate perfecte $\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \notin Q$

17. Dacă $a,b \in Q_+^{\,*}$ şi $\alpha, \beta \in Q^{\bullet}$ a.î.

$\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in Q^* \Rightarrow \sqrt{a} \in Q_+, \sqrt{b} \in Q_+$

18. Dacă $a,b \in Q_+^{\,*}$ a.î. $\sqrt{b} \in R \setminus Q \Rightarrow \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \in R \setminus Q$ şi

$a\sqrt{b} \in R \setminus Q$

19. Dacă $a \in Q^*$ şi $b \in R \setminus Q \Rightarrow a + b \in R \setminus Q$ şi

$a - b \in R \setminus Q$

Raționalizări

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}, \qquad \frac{x}{a\sqrt{b}} = \frac{x\sqrt{b}}{ab}$$

$$\frac{x}{a + \sqrt{b}} = \frac{x(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}, \qquad \frac{x}{a - \sqrt{b}} = \frac{x(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

Medii

Media aritmetică $m_a = \dfrac{x + y}{2}$

Media geometrică $m_g = \sqrt{x \cdot y}$, $\forall x, y \in R^*{}_+$

Media ponderată $m_p = \dfrac{p \cdot x + q \cdot y}{p + q}; p, q \in N^* - ponderile$

Media armonică $m_h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \dfrac{2xy}{x + y}$, $\forall x, y \in R^*$

ECUAȚII

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow a \cdot x = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a},\ a \neq 0.$$

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, a\rangle 0. \quad ;$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a \neq 0.\ \ b^2 - 4ac\rangle 0$$

$$|x| = a,\ \ a\rangle 0 \Rightarrow x = \pm a.$$

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x\langle a + 1 \Leftrightarrow x \in [a, a+1)\ .$$

16. PROCENTE

p % din N = $\frac{p}{100} \cdot N$

Raportul $\frac{p}{100}$ se numeşte raport procentual iar p se numeşte procent.

Aflarea unui număr când cunoaştem p% din el.

$\frac{p}{100}$ **din x =a** $\Rightarrow x = a \cdot \frac{100}{p}$**.**

Aflarea raportului procentual:

Cât la sută reprezintă numărul a din N ?

p % din N =a $\Rightarrow p = \frac{a \cdot 100}{N}$ **.**

D = $\frac{S \cdot p \cdot n}{100 \cdot 12}$ …. **Dobânda** obținută prin depunerea la bancă a unei sume **S** de bani pe o perioadă de **n** luni cu procentul **p** al dobândei anuale acordate de bancă .

CALCUL ALGEBRIC

Reguli de calcul în R

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. (a+b)(a-b= a^2 -b^2 ;

4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

5*. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

6*. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

7*. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

8*. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Descompuneri în factori

1. Metoda factorului comun
ab+ac-ad=a(b+c-d)
ax+ay+by+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)

2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat
$a^2+2ab+b^2 =(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2 =(a-b)^2$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

Amplificarea $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \quad b,c \neq 0$

Simplificarea $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad b,c \neq 0$

Adunarea sau scăderea $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}, \quad b \neq 0$

Înmulțirea $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b, d \neq 0$

Împărțirea $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad b, c, d \neq 0$

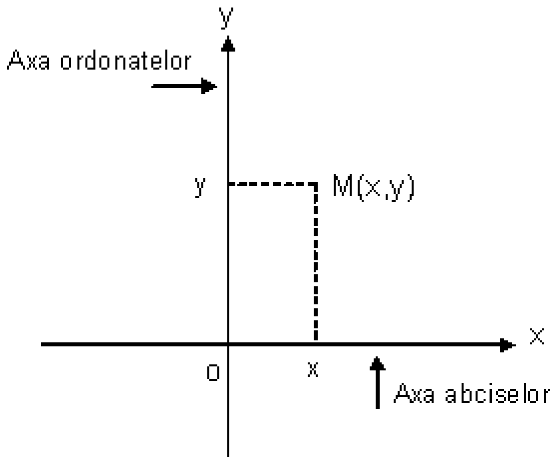
Puterea cu exponent natural $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0, n \in N^*$

Puterea cu exponent întreg negativ

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a, b \neq 0, n \in N^*.$

FUNCȚII

Sistem de axe ortogonale

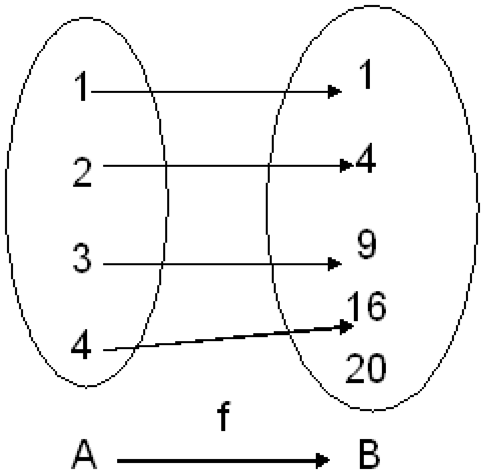


Definiție: Se numeşte **funcție**, un triplet de forma (A,B,f), unde A se numeşte domeniu de definiție (mulțimea de unde funcția ia valori), B se numeşte codomeniu (mulțimea valorilor funcției), iar f se numeşte lege de corespondență(face ca fiecărui element din A să-i corespundă un unic element din B).

Notație: f:A→B

Imaginea funcției este mulțimea Im f= $\{y \in B | y = f(x), x \in A\}$

Exemplu: $f(x)=x^2$



Graficul unei funcții f:A→B este mulțimea
$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\} \subset A \times B$.

<u>Condiția ca un punct M(a,b) să aparțină graficului lui f.</u>
$M(a,b) \in G_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Reprezentarea grafică:
f: R→R , f(x)=ax+b – graficul este o dreaptă;

$f(x) \underset{=}{not}\ y$ **y=ax+b**

$\cap OX : y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow A(-\frac{b}{a},0)$

$\cap OY : x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow B(0,b)$

f: I→R, unde I este un interval; dacă I este mărginit, atunci graficul este un segment iar dacă I este nemărginit la un capăt şi mărginit la celălalt atunci graficul este o semidreaptă.

f:A→R, unde A este o mulțime finită de puncte atunci graficul lui f este tot o mulțime finită de puncte.

Condiția ca trei puncte A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3) să fie coliniare:

- se determină funcția f(x)=ax+b, al cărui grafic este determinat de două puncte şi se verifică dacă şi cel de-al treilea punct aparține graficului lui f;
- cu ajutorul lungimilor distanțelor dintre puncte , se verifică dacă lungimea segmentului cel mai mare este egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente.

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Multiplii şi submultiplii metrului- unități de măsură pentru lungime

km	hm	dam	**m**	dm	cm	mm
Multiplii metrului				Submultiplii metrului		

Multiplii şi submultiplii m^2- unități de lungime pentru arie

km^2	hm^2	dam^2	$\mathbf{m^2}$	dm^2	cm^2	mm^2
Multiplii metrului pătrat				Submultiplii metrului ^{2}		

1 ha =1 hm^2=10000m^2 1 ar = 100m^2

Multiplii şi submultiplii m^3-unităţi de măsură pentru volum

km^3	hm^3	dam^3	$\mathbf{m^3}$	dm^3	cm^3	mm^3
Multiplii metrului cub				Submultiplii metrului^3		

Multiplii şi submultiplii litrului- unităţi de măsură pentru capacitate

kl	hl	dal	**l**	dl	cl	ml
Multiplii litrului				Submultiplii litrului		

1 dm^3=1 l

Multiplii şi submultiplii gramului- unităţi de măsură pentru masă

kg	hg	dag	**g**	dg	cg	mg
Multiplii gramului				Submultiplii gramului		

1 q=100kg   1 t = 1000kg

Unităţi de măsură pentru timp

1 min=60 s
1 h =60 min=3600s
1 zi =24 h
1 an =365 zile sau 366 zile(an bisect)
1 deceniu = 10 ani; 1 secol =100 ani;   1 mileniu = 1000 ani.

UNGHIURI

Def 1. Două unghiuri proprii se numesc **opuse la vârf** dacă laturile lor formează două perechi de semidrepte opuse.

Def 2. Două unghiuri se numesc **complementare** dacă suma măsurilor lor este de 90º şi se numesc **suplementare** dacă suma măsurilor lor este de 180º.

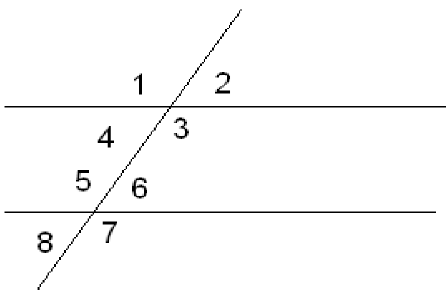
Def 3. Două drepte din acelaşi plan care nu au nici un punct comun se numesc **drepte paralele**.

Postulatul lui Euclid: Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă la dreapta dată.

Def 4. Două drepte concurente sunt **perpendiculare** dacă unul din unghiurile care se formează în jurul punctului lor comun este de 90º.

Def 5. Două drepte paralele intersectate de o secantă formează :

- unghiuri alterne interne congruente: 4 cu 6, 3 cu 5;
- unghiuri alterne externe congruente: 1 cu 7, 2 cu 8;
- unghiuri corespondente congruente: 4 cu 8, 3 cu 7, 2 cu 6, 1 cu 5;
- unghiuri interne sau externe de aceeaşi parte a secantei suplementare: 1 cu 4, 1 cu 8, 4 cu 5, 5 cu 8.



Def 6. Se numeşte **unghi ascuțit**, unghiul a cărui măsură este mai mică de 90^o .

Def 7. Se numeşte **unghi obtuz**, unghiul a cărui măsură este mai mare de 90^o .

Def 8. Se numeşte **unghi nul**, unghiul a cărui măsură este de 0^o .

Def 9. Se numeşte **unghi alungit** , unghiul cu semidreptele în prelungire şi cu măsura de 180^o.

Teorema 1. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct din plan este de 360^o.

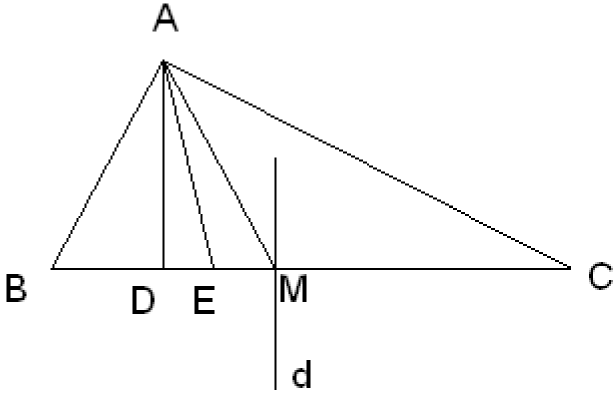
Teorema 2. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct pe o dreaptă este de 180^o.

Def 10. Două unghiuri se numesc **congruente** dacă au aceeaşi măsură.

Def 11. Două unghiuri se numesc **adiacente** dacă au vârful comun şi o latură comună situată în interiorul unghiului format de celelalte două laturi ale unghiurilor.

Triunghiul. Linii importante în triunghi.

Aria triunghiului:



$$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ (semiperimetru)

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2}$$

Înălțimea este segmentul de dreaptă ce uneşte vârful triunghiului cu piciorul perpendicularei dusă din vârf pe latura opusă; Intersecția înălțimilor este un punct ce se numeşte ortocentru.

Mediana este segmentul de dreaptă ce uneşte vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse; intersecția medianelor este un punct ce se numeşte centru de greutate care se află la o treime față de bază şi două treimi față de vârf.

Lungimea medianei în funcție de laturi:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}.$$

Mediana împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente, care au aceeaşi arie:

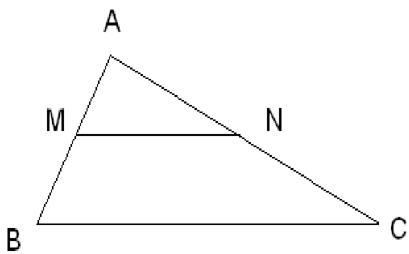
$A_{ABM}=A_{AMC}$

Bisectoarea este segmentul de dreaptă ce împarte unghiul triunghiului în două unghiuri congruente. Intersecția înălțimilor se notează cu I şi se numeşte centrul cercului înscris în triunghi.

Orice punct aflat pe bisectoarea unghiului se află la egală distanță de laturile unghiului.

Mediatoarea laturii unui triunghi este dreapta perpendiculară pe latura triunghiului exact prin mijlocul ei. Intersecția mediatoarelor se notează cu O şi se numeşte centul cercului circumscris triunghiului. Orice punct aflat pe mediatoarea laturii unui triunghi se află la egală distanță de capetele segmentului.

Linia mijlocie în triunghi este segmentul de dreaptă ce uneşte mijloacele a două laturi ale triunghiului; Linia mijlocie este paralelă cu baza şi jumătate din ea.



Teorema liniei mijlocii:

MN-linie mijlocie $\Rightarrow MN \| BC, MN = \frac{1}{2}BC$

Teorema reciprocă asupra liniei mijlocii:

Dacă AM $\equiv MB$ şi $MN \| BC \Rightarrow AN \equiv NC, MN = \frac{1}{2} BC$

Dacă MN este linie mijlocie în triunghi atunci mijloacele înălțimii, bisectoarei şi medianei aparțin liniei mijlocii;

Metoda triunghiurilor congruente:
Pentru a arăta că două segmente sau două unghiuri sunt congruente trebuie arătat că triunghiurile din care fac parte sunt congruente.

Cazurile de congruență ale triunghiurilor oarecare:

I. L.U.L.
II. U.L.U
III. L.L.L.
IV. L.U.U

Cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice:

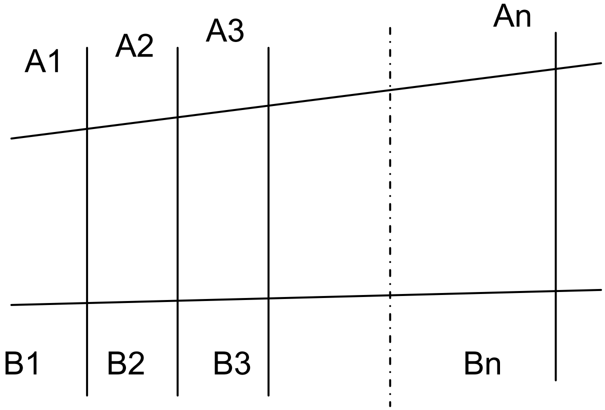
I. catetă-catetă
II. catetă-ipotenuză
III. ipotenuză-unghi ascuțit
IV. catetă-unghi ascuțit

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILIR

Definiție: Trei sau mai multe drepte paralele se numesc echidistante dacă sunt situate la distanțe egale.

Teorema paralelelor echidistante:
Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

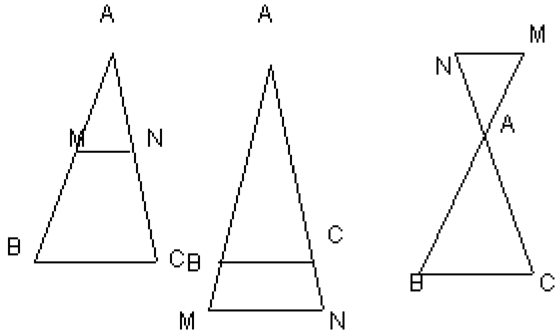
$d_1 \| d_2 \| d_3 \| .... \| d_n$ şi $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \equiv .... A_{n-1}A_n$
$\Rightarrow B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4 \equiv .... B_{n-1}B_n$



Definiție: Prin raportul a două segmente, se înțelege raportul lungimilor lor, exprimate cu aceeaşi unitate de măsură.
Definiție: Segmentele AB, BC, AC sunt proporționale cu segmentele A'B', B'C', A'C' dacă între lungimile lor există o relație de proporționalitate de forma: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

<u>**Teorema lui Thales**</u>:
O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente proporționale.

$$MN \| BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} sau \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} sau \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC} \quad (*)$$



Teorema paralelelor neechidistante:
Mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.

Teorema bisectoarei: $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}C \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

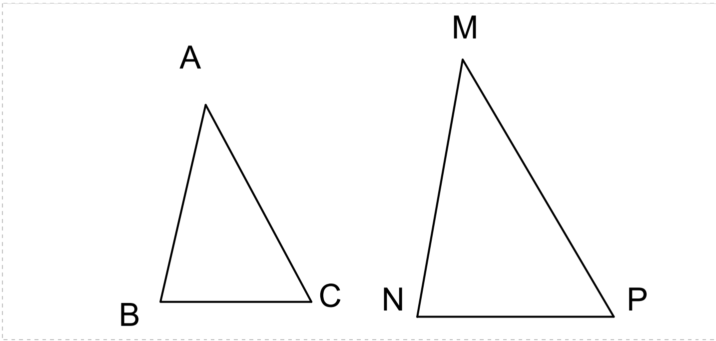
Dacă BC= a, AC=b, AB=c, atunci $BD = \frac{a \cdot c}{b+c}, CD = \frac{a \cdot b}{b+c}$,

$AD = \frac{b \cdot c}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2]$ - lungimea bisectoarei

<u>Teorema reciprocă a lui Thales</u>:
Dacă o dreaptă determină pe laturile unui triunghi segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu cea de a treia latură a triunghiului.

Dacă $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} sau \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} sau \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$ atunci $MN \| BC$.

Definiție:
Două triunghiuri se numesc asemenea dacă au toate laturile proporționale şi unghiurile congruente .



$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{M}, \hat{B} \equiv \hat{N}, \hat{C} \equiv \hat{P} \\ \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} \end{cases}$$

<u>Teorema fundamentală a asemănării</u>:
O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi sau cu prelungirile lor un triunghi asemenea cu cel dat.
$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$.

<u>Criteriile de asemănare a triunghiurilor</u>.

$\hat{A} \equiv \hat{M}$ *si* $\hat{B} \equiv \hat{N} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$ (u.u)

$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}$ *si* $\hat{A} \equiv \hat{M} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$ (l.u.l)

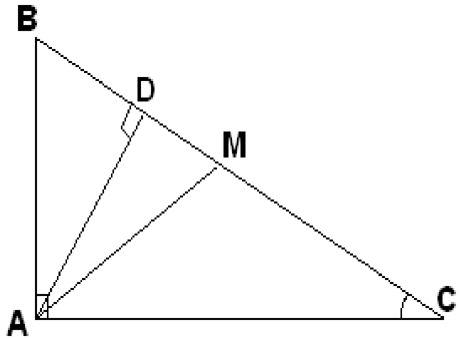
$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP} = \dfrac{BC}{NP} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$ (l.l.l)

<u>Proprietăți ale asemănării triunghiurilor</u>:
1. $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.(Reflexivitatea relației de asemănare)
2. $\Delta ABC \sim \Delta AMN \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$.(Simetria)
3. $\Delta ABC \sim \Delta AMN$, $\Delta AMN \sim \Delta PQR \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$.(Tranzitivitatea)

4. Două triunghiuri isoscele sunt asemenea $\Leftrightarrow$ au o pereche de unghiuri congruente;
5. Două triunghiuri echilaterale sunt asemenea întodeauna;
6. Două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea $\Leftrightarrow$ au o pereche de unghiuri ascuțite congruente;
7. Două triunghiuri cu laturile respectiv paralele sunt asemenea;
8. Două triunghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt asmenea;
9. Dacă două triunghiuri sunt asemenea atunci raportul de asemănare al laturilor este egal cu:
- raportul medianelor;
- raportul bisectoarelor;
- raportul înălțimilor;
- raportul razelor cercurilor înscrise;
- raportul razelor cercurilor circumscrise;

10. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare al laturilor.

RELAȚII METRICE
ÎN TRIUNGIUL DREPTUNGHIC



Formula distanței dintre punctele A(x_1,y_1), B(x_2,y_2): **AB=**$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Teorema lui Pitagora.
Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

$$\mathbf{BC^2=AB^2+AC^2;}$$

Teorema reciprocă a lui Pitagora:
Dacă într-un triunghi, suma pătratelor a două laturi este egală cu pătratul celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Dacă $\mathbf{BC^2=AB^2+AC^2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^0$

Teorema înălțimii:
Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

Teorema a II-a a înălțimii: $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.

Teorema catetei:
Cateta este media geometrică dintre ipotenuză şi proiecția catetei pe ipotenuză.

$AB^2 = BC \cdot BD$; $AC^2 = BC \cdot CD$

Teorema unghiului de 30^0:
Cateta opusă unghiului de 30^0 este jumătate din ipotenuză**.** Dacă $m(\hat{C}) = 30^0 \Rightarrow AB = \dfrac{BC}{2}$;

Teorema unghiului de 15^0:
Înălțimea corespunzăroare ipotenuzei într-un triunghi dreptungic cu un unghi de 15^0 este un sfert din ipotenuză.

Dacă $m(\hat{C}) = 15^0 \Rightarrow AD = \dfrac{BC}{4}$

Teorema medianei într-un triunghi dreptunghic:
Mediana într-un triunghi dreptunghic este jumătate din ipotenuză;

AM mediană $\Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2}$.

În orice triunghi dreptunghic are loc relația:

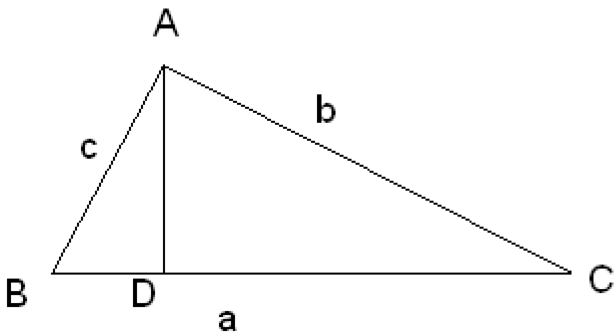
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Aria triunghiului dreptunghic:

$A_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$ *sau* $\dfrac{AB \cdot AC}{2}$

Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic:

α	**30^0**	**45^0**	**60^0**
$\sin\hat{C} = \frac{AB}{BC}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\hat{C} = \frac{AB}{AC}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$
$ctg\hat{C} = \frac{AC}{AB}$	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



Teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

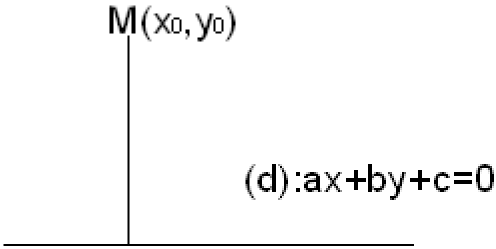
Teorema lui Pitagora generalizată:

$AB^2=BC^2+AC^2-2BC.DC \quad m(\hat{C})\langle 90^0$

$AB^2=BC^2+AC^2+2BC.DC \quad m(\hat{C})\rangle 90^0$

$AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD \quad m(\hat{B})\langle 90^0$

$AC^2=AB^2+BC^2+2BC.BD \quad m(\hat{B})\rangle 90^0$



Distanța de la un punct $M(x_0,y_0)$ la o dreaptă de ecuație: ax+by+c=0;

$$d(M,d)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

PATRULATERE

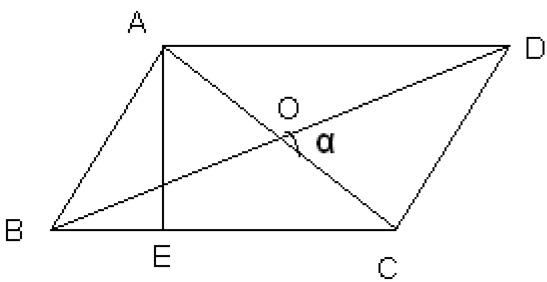
DEFINIȚIE. Se numeşte **patrulater convex** patrulaterul în care segmentul determinat de oricare două puncte ale lui este interior patulaterului.

PARALELOGRAMUL

Definiție: Se numeşte **paralelogram**, patulaterul convex care are laturile opuse paralele.

Teoreme:

1. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă laturile opuse sunt congruente două câte două.
2. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai oricare două unghiuri opuse sunt congruente şi oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare.
3. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele se înjumătățesc.
4. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă două laturi opuse sunt paralele şi congruente.
5. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare.



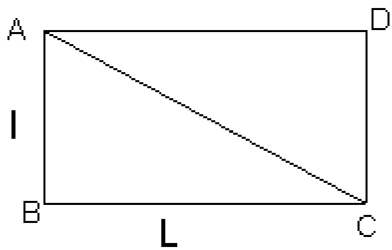
Aria paralelogramului:

$\mathbf{A_{ABCD}}= BC \cdot AE$

$\mathbf{A_{ABCD}}= \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$

$\mathbf{A_{ABCD}}= AB \cdot BC \cdot \sin(A\hat{B}C)$

DREPTUNGHIUL
Definiție: Se numeşte **dreptunghi,** paralelogramul cu un unghi drept.
Proprietăți:
Într-un dreptunghi, toate unghiurile sunt de 90^0.
Într-un dreptunghi, diagonalele sunt congruente.
Teoremă: Dacă un paralelogram are diagonalele congruente, atunci el este dreptunghi.



Aria dreptunghiului:

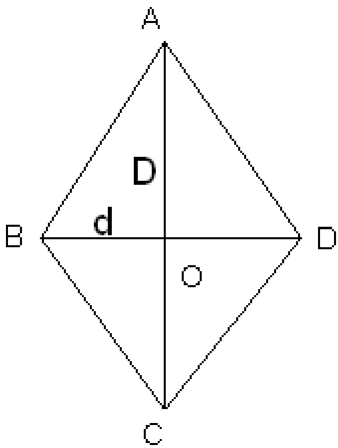
$\mathbf{A_{ABCD}}= AB \cdot BC$

ROMBUL

Definiție: Se numeşte **romb**, paralelogramul care are două laturi consecutive congruente.

Teoremă:

1. Un patrulater este romb dacă şi numai dacă are toate laturile congruente.
2. Un paralelogram se numeşte romb dacă şi numai dacă are diagonalele perpendiculare.
3. Un paralelogram se numeşte romb dacă şi numai dacă o diagonală este bisectoarea unui unghi.

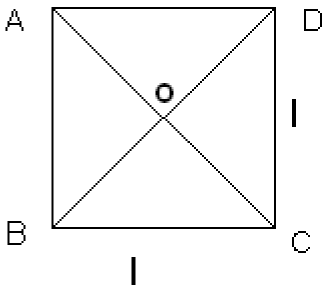


Aria rombului:

$A_{ABCD}=\dfrac{D \cdot d}{2}$**, unde D este diagonala mare iar d este diagonala mică.**

PĂTRATUL

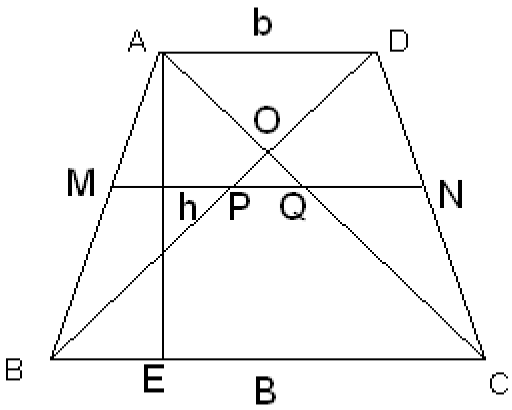
Definiție: Se numeşte pătrat, paralelogramul care este şi romb şi dreptunghi.
Proprietăți:
1. Toate unghiurile pătratului sunt drepte.
2. Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor pătatului.
3. Diagonalele sunt perpendiculare şi congruente.



Aria pătratului:
$A_{ABCD}=l^2$

TRAPEZUL
Definiție: Se numeşte trapez, patrulaterul care are două laturi opuse paralele, iar celelalte laturi neparalele.

Proprietăți.
1. Patrulaterul ABCD este trapez isoscel dacă şi numai dacă $\hat{A} \equiv \hat{D}$ *si* $\hat{B} \equiv \hat{C}$.
2. Patrulaterul ABCD este trapez isoscel dacă şi numai dacă diagonalele sunt congruente.



Aria trapezului:

$\mathbf{A_{ABCD}}=\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$**,** unde B este baza mare, b este baza mică, iar h este înălțimea trapezului.

Linia mijlocie: MN=$\dfrac{B+b}{2}$;

PQ=$\dfrac{B-b}{2}$

CERCUL

1. Elemente în cerc

Definiții:

Se numeşte **cerc de centru O şi rază r** şi scriem $\mathcal{C}$(O,r) mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța r față de punctul O.

$C(O,r) = \{ M \mid OM = r, r \in R_+ \}$

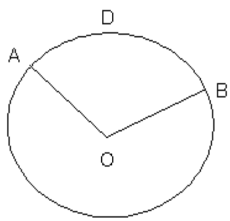
Segmentul care uneşte două puncte de pe cerc se numeşte **coardă;** Coarda care trece prin centrul cercului se numeşte **diametru**, iar capetele diametrului se numesc puncte diametral opuse.

Porțiunea dintr-un cerc determinată de două puncte distincte ale cercului se numeşte **arc de cerc.** Dacă extremitățile unui arc sunt diametral opuse, atunci arcul se numeşte **semicerc**.

Se numeşte **interiorul cercului**, mulțimea punctelor aflate față de centru la distanțe mai mici decât raza cercului, **iar exteriorul cercului** reprezintă mulțimea punctelor situate față de centru la distanțe mai mari decât raza cercului.

Mulțimea punctelor cercului $\mathcal{C}$(O,r) reunită cu interiorul cercului se numeşte **disc de centru O şi rază r**: $\mathcal{D}$(o,r).

Se numeşte **unghi la centru**, unghiul cu vârful în centrul unui cerc.



Măsura în grade a **unui arc** este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.

$$m(A\overset{\frown}{D}B) = m(A\hat{O}B)$$

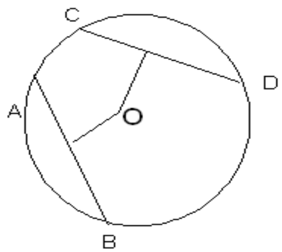
Măsura în grade a unui semicerc este de 180^0, iar a unui cerc este de 360^0.

180^0.................. $\pi\, rad$

x^0.....................y rad $\rightarrow$ y=$\dfrac{x^0 \cdot \pi}{180^0}$

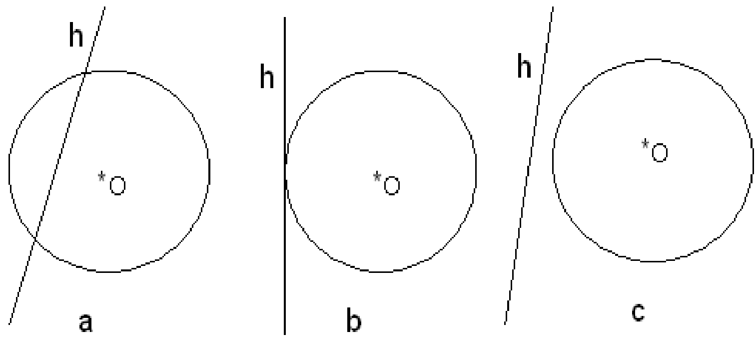
Se numeşte **sector de cerc**, o porțiune dintr-un cerc cuprinsă între două raze ale sale şi arcul pe care îl subîntind.
Se numesc **arce congruente** , arcele care au aceeaşi măsură.
Teoreme:
1. Într-un cerc, arcelor congruente le corespund coarde congruente şi reciproc.

$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow [AB] \equiv [CD]$



2. Într-un cerc, diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul arcului subîntins de coardă.
3. Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă şi numai dacă sunt egal depărtate de centru. $[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow d(O, AB) = d(O, CD)$.
4. Dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente.

2. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.

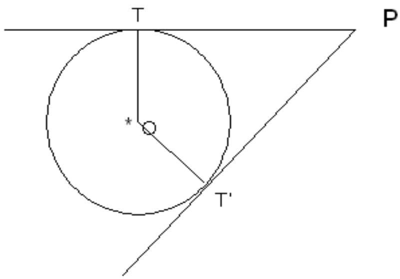


a) h dreaptă secantă $d(O,h)\langle r$

b) h dreaptă tangentă $d(O,h) = r$

c) h dreaptă exterioară $d(O,h)\rangle r$

Tangente dintr-un punct exterior la un cerc



1. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două tangente şi numai două la cerc;

2. $PT \equiv PT'$;

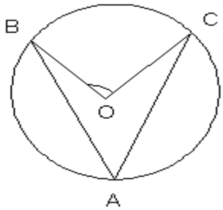
3. PO este bisectoarea unghiului TPT';

4. PO este mediatoarea segmentului TT'

5. Măsura unui unghi cu vârful pe cerc, care are una din laturi secantă şi cealaltă tangentă la cerc, este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

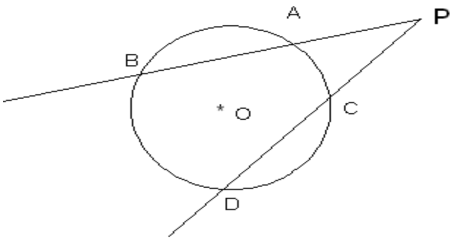
Unghiul înscris în cerc

Se numeşte **unghi înscris în cerc**, unghiul cu vârful pe cerc ale cărui laturi includ două coarde ale cercului.

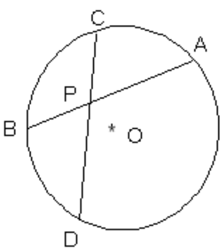


$$m(B\hat{A}C) = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2};$$

$$m(B\hat{O}C) = m(\overset{\frown}{BC})$$

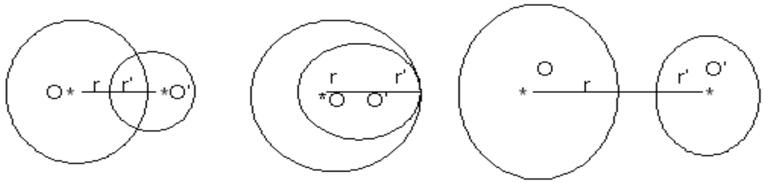


$$m(B\hat{P}D) = \frac{m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}$$

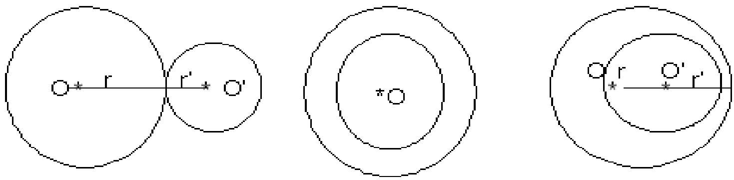


$$m(A\hat{P}C) = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$

3. Pozițiile relative ale două cercuri



a b c



d e f

a) cercuri secante	$r-r'<OO'<r+r'$, $r>r'$
b) cercuri tangente interioare	$OO'=r-r'$, $r>r'$
c) cercuri exterioare	$OO'>r+r'$
d) cercuri tangente exterioare	$OO'=r+r'$
e) cercuri concentrice	au acelaşi centru
f) cercuri interioare	$OO'<r-r'$, $r>r'$

4.Triunghi înscris în cerc. Patrulater înscris în cerc

Definiții:

Cercul care conține cele trei vârfuri ale unui triunghi se numeşte **cercul circumscris** triunghiului.

Centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului.

Patrulaterul cu vârfurile pe cerc se numeşte **patrulater înscris în cerc(patrulater inscriptibil)**.

Teoremă:

1. Într-un patrulater înscris în cerc, diagonalele formează cu laturile opuse perechi de unghiuri congruente.
2. Unghiurile opuse ale unui patrulater înscris în cerc sunt suplementare.

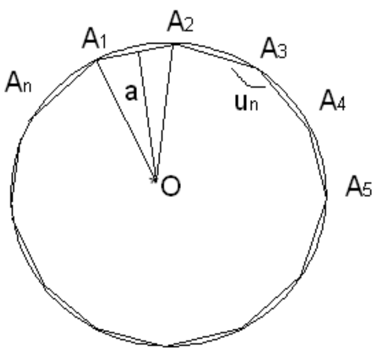
Raza cercului circumscris unui triunghi în funcție de aria triunghiului şi de laturile sale este:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

5. Poligoane regulate înscrise în cerc.

Definiție: Un poligon se numeşte regulat dacă este convex, are toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente.

Distanța de la centrul poligonului regulat la oricare dintre laturile sale se numeşte apotema poligonului (a).

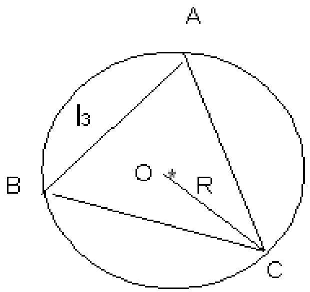


Perimetrul poligonului regulat cu n laturi este $P = n \cdot l$ unde l este latura poligonului;

Aria poligonului regulat cu n laturi este $A = \frac{a \cdot P}{2}$, unde a este apotema ;

Măsura unui unghi este $u_n = \frac{(n-2) \cdot 180^0}{2}$

Triunghiul echilateral

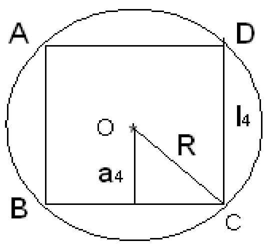


$l_3 = R\sqrt{3}$ $a_3 = \frac{R}{2}$ sau

$a_3 = \frac{1}{3}h$

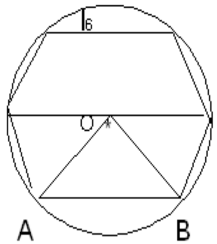
Aria triunghiului. $A_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Pătratul



$l_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{2}$

Hexagonul regulat



$$l_6 = R;$$

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$A_3 = 6l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Un patrulater ABCD este **inscriptibil** dacă unghiul dintre o diagonală a sa şi o latură este egal cu unghiul dintre cealaltă diagonală şi latura opusă, sau dacă două unghiuri opuse fac 180^0.

Un **triunghi** este **circumscris** unui cerc sau un **cerc** este **înscris** în triunghi dacă distanțele de la centrul cercului la toate cele trei laturi sunt egale.

Raza cercului înscris într-un triunghi în funcție de aria triunghiului şi de semiperimetrul triunghiului.

$r = \frac{S}{p}$ *unde* $p = \frac{a+b+c}{2}$, a,b,c sunt laturile triunghiului.

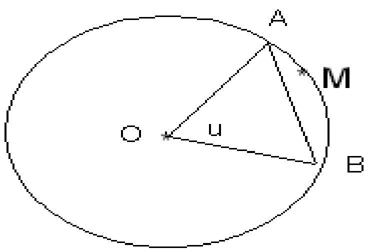
6. Lungimea cercului. Aria cercului

Lungimea cercului: $l_c = 2\pi R$

Aria cercului: $A = \pi R^2$

Lungimea arcului de cerc AMB: $l_{AMB} = \dfrac{u\pi R}{180^0} = uR$

Aria sector de cerc AOB: $A_{AOB} = \dfrac{u\pi R^2}{360^0} = \dfrac{uR^2}{2}$



Elemente de geometrie în spaţiu

Cap I. PUNCTE, DREPTE, PLANE

1. RELAŢII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ŞI PLANE

Noţiunile fundamentale ale geometriei sunt:punctul,dreapta, planul, distanţa şi măsura unghiurilor.

Definiţie: Se numeşte **axiomă** un adevăr simplu matematic care nu se demonstrează deoarece se verifică în natură.

Axiome: 1.Spaţiul este o mulţime infinită de puncte.

2. Dreptele şi planele sunt submulţimi ale spaţiului.
3. Orice plan conţine cel puţin trei puncte necoliniare (nu sunt situate pe aceeaşi dreaptă)
4. Există patru puncte care nu aparţin aceluiaşi plan (necoplanare).
5. Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.
6. Prin orice trei puncte necoliniare trece un singur plan.

Definiţie: O dreaptă este inclusă într-un plan dacă orice punct al dreptei aparţine planului.

Teorema 1.1 Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparţin unui plan atunci dreapta este inclusă în acel plan.

Teorema 1.2 Dacă două plane au un punct comun atunci ele au o dreaptă comună.

2. DETERMINAREA PLANULUI

Conform axiomei **6** trei puncte necoliniare determină un plan , în plus următoarele teoreme ne indică alte situaţii de determinare a planului.

Teorema 2.1 O dreaptă şi un punct exterior ei determină un plan.

Teorema 2.2 Două drepte paralele determină un plan.

Teorema 2.3 Două drepte concurente determină un plan.

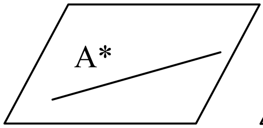


fig 1

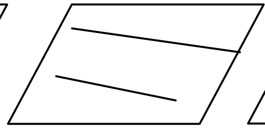


fig 2

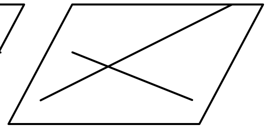


fig 3

3. CORPURI GEOMETRICE

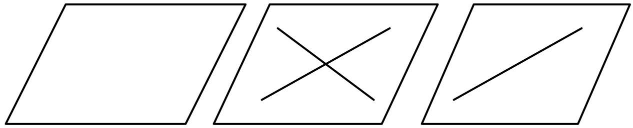
Definiție: Corpurile geometrice se definesc ca fiind mulțimea tuturor punctelor, dreptelor şi planelor din spațiul cu trei dimensiuni care se găseşte în interiorul unei suprafețe închise, inclusiv punctele , dreptele şi porțiunile de plan care se găsesc pe această suprafață. Mulțimea tuturor punctelor din spațiu care se găsesc în interiorul suprafeței corpului se numeşte volumul corpului.

POLIEDRE

Definiție: Corpurile mărginite numai de suprafețe plane se numesc poliedre. Poligoanele plane care mărginesc poliedrul se numesc fețe(laterale), segmentele comune fețelor se numesc muchii şi capetele acestor segmente , vârfuri.

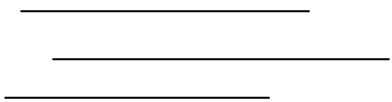
4. POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ DREPTE ÎN SPAȚIU

Definiție: Se numesc **drepte coplanare** , dreptele care sunt situate în acelaşi plan. În caz contrar se numesc **drepte necoplanare**.
Două drepte coplanare pot fi:
1. **paralele** (nu au nici un punct în comun).
2. **concurente** au un singur punct în comun).
3. **identice** (mulțimea punctelor lor coincid)



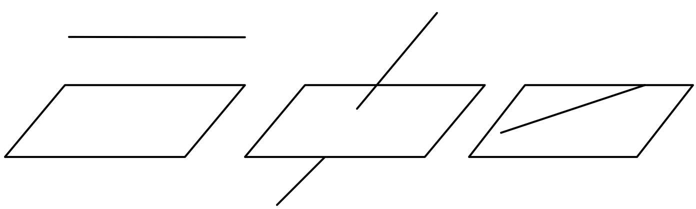
Axioma paralelelor: Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce cel mult o paralelă la dreapta dată.

Teorema 4.1: Două drepte distincte din spațiu, paralele cu o a treia sunt paralele între ele.



5. POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN PLAN

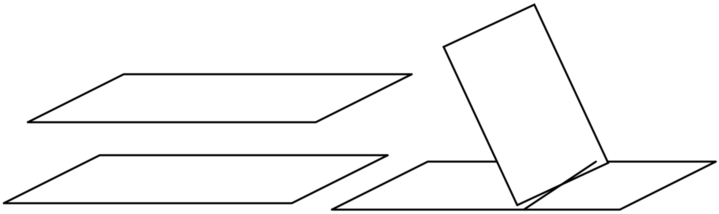
Definiție: O dreaptă este paralelă cu un plan dacă dreapta şi planul nu au puncte comune.
Definiție: O dreaptă este secantă unui plan dacă dreapta are un singur punct comun cu planul.
Definiție: O dreaptă este inclusă în plan dacă orice punct al ei aparține planului.



Teorema 5.1: O dreaptă paralelă cu o dreaptă din plan este paralelă cu planul sau conținută în el.

6. POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ PLANE

Planele pot fi de trei feluri: **paralele** (adică nu au nici un punct comun) , **secante**(adică au în comun o dreaptă după care se intersectează) sau identice(mulțimea punctelor lor coincid).



OBSERVATII:

1. O dreaptă paralelă cu un plan nu este neapărat paralelă cu orice dreaptă din plan.
2. Două drepte paralele cu un plan nu sunt neapărat paralele între ele.
3. Două drepte situate în plane paralele nu sunt neapărat paralele.
4. Două plane, paralele cu o dreaptă, nu sunt neapărat paralele între ele.

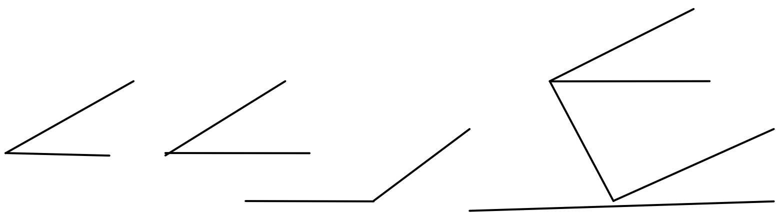
7. TEOREME DE PARALELISM

Teorema 7.1 Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α şi conținută într-un plan β care se intersectează după o dreaptă g, atunci d şi g sunt paralele.
Teorema 7.2 Dându-se două plane paralele, orice dreaptă dintr-un plan este paralelă cu al doilea plan.
Teorema 7.3 Dacă două plane paralele sunt tăiate de un al treilea plan atunci dreptele de intersecție sunt paralele.
Următoarea teoremă stabileşte când două plane sunt paralele.

Teorema 7.4 Dacă un plan conține două drepte concurente paralele cu un alt plan atunci cele două plane sunt paralele.
Teorema 7.5 (Tranzitivitatea relației de paralelism îmtre plane). Două plane distincte paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.
Teorema 7.6 Două plane paralele determină pe două segmente paralele pe care le intersectează segmente congruente.
Teorema 7.7 (Teorema lui Thales în spațiu)
Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare pa care le intersectează segmente respectiv proporționale.

8. UNGHIUL A DOUĂ DREPTE ÎN SPAȚIU

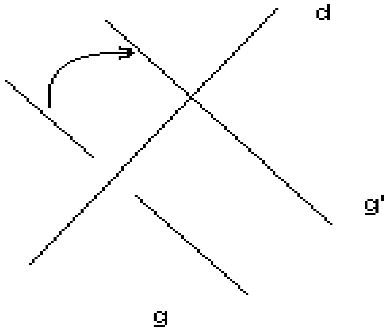
Definiție: Două unghiuri se numesc suplementare dacă suma măsurilor lor este de 180° şi se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este de 90°.
Teorema 8.1 Două unghiuri din acelaşi plan sau din plane diferite cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.



Unghiuri congruente respectiv suplementare în acelaşi plan

Unghiuri congruente respectiv suplementare în plane diferite

Definiție: Prin **unghiul a două drepte în spațiu** se înțelege unghiul de măsură mai mică sau cel mult egală cu 90° cu vârful în orice punct al spațiului format prin ducerea de paralele la dreptele date prin acel punct.

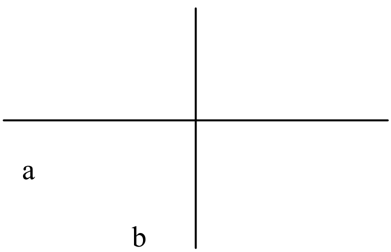


Observații:

1. De obicei, vârful unghiului a două drepte din spațiu se ia pe una din drepte.
2. Dacă dreptele sunt paralele, atunci ele formează un unghi de 0°.
3. Dacă dreptele sunt concurente atunci ele formează un unghi plan

9. DREAPTA PERPENDICULARĂ PE UN PLAN

Definiție: Două drepte din spațiu(concurente sau necoplanare) care formează între ele un unghi drept se numesc **drepte perpendiculare.**

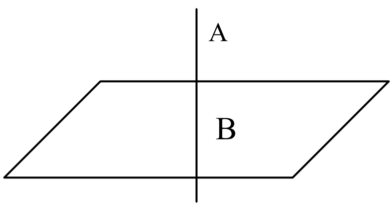


Definiție: Se numeşte **dreaptă perpendiculară pe un plan** , dreapta care este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

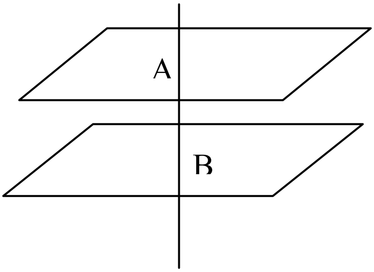
Teorema 9.1 (**Criteriul de perpendicularitate**.) Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente dintr-un plan atunci ea este perpendiculară pe plan.
Teorema 9.2 Dintr-un punct exterior se poate duce pe un plan o perpendiculară şi numai una.
Teorema 9.3 Două drepte distincte perpendiculare pe un acelaşi plan sunt paralele între ele.
Teorema 9.4 Printr-un punct se poate duce un plan şi numai unul perpendicular pe o dreaptă dată.
Definiție: Prin distanța dintre două puncte din spațiu se înțelege lungimea segmentului determinat de cele două puncte.

Lungimea diagonalei cubului: **D=** $a\sqrt{3}$
Lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic
D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Definiție: **Distanța dintre un punct şi un plan** este lungimea segmentului determinat de punct şi de plan pe perpendiculara dusă din acel punct pe plan.



Definiție: **Distanța dintre două plane paralele** este lungimea segmentului determinat de cele două plane pe o perpendiculară comună.



10. SECȚIUNI PARALELE CU BAZA ÎN POLIEDRE

Definiție: A secționa o prismă cu un plan paralel cu baza înseamnă a intersecta fețele laterale cu un plan paralel cu baza. Secțiunea rezultată este un poligon asemenea cu cel de la bază chiar mai mult este congruent cu acesta. În urma secționării se formează două prisme de acelaşi tip cu prisma inițială.

Definiție: Se numeşte trunchi de piramidă corpul geometric obținut prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu baza, situat între bază şi planul de secțiune.

Observație:Clasificarea trunchiurilor de piramidă se face după numărul de laturi ale poligonului de la bază (triunghiulare, patrulatere,hexagonale), după natura poligonului de la bază(regulat, neregulat) şi după felul cum sunt fețele laterale(trapeze isoscele sau nu –trunchi drept sau oblic).

Definiție: Distanța dintre bazele trunchiului se numeşte înălțimea trunchiului. Ea poate fi calculată ca diferența dintre înălțimea piramidei din care provine trunchiul şi înălțimea piramidei noi formate.

CORPURI ASEMENEA. RAPORTUL DE ASEMĂNARE.

În urma secționării unei piramide cu un plan paralel cu baza se obține o piramidă de acelaşi vârf cu baza în planul de secțiune asemenea cu piramida inițială.

Definiție: Raportul a două segmente omoloage corespunzător unei perechi de corpuri asemenea se numeşte raportul de asemănare .

Definiție: Raportul ariilor a două suprafețe omoloage corespunzător unei perechi de piramide asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

11. SECȚIUNI AXIALE ÎN CORPURILE CARE ADMIT AXĂ DE SIMETRIE

Definiție: Două puncte Aşi B sunt simetrice față de un punct O, dacă O este mijlocul segmentului AB.
Definiție: Un punct O este centru de simetrie al unei figuri plane dacă orice punct al figurii are simetric față de O tot un punct al figurii.
Definiție: O figură geometrică plană admite o axă de simetrie **d** dacă orice punct al figurii are simetric față de dreapta **d** tot un punct al figurii.

Axa de simetrie a unui corp este dreapta față de care punctele unui corp sunt simetrice.
Axa de simetrie a unei piramide regulate este dreapta ce trece prin vârful piramidei şi centrul bazei.

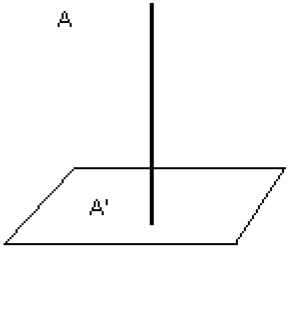
Axa de simetrie a unei prisme drepte şi a unui trunchi este dreapta ce trece prin centrele bazelor.

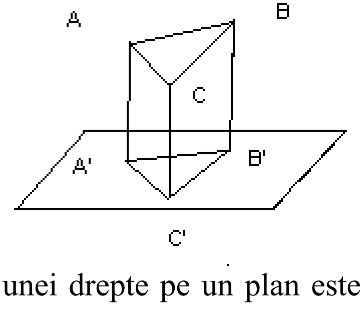
Definiție: Se numeşte **secțiune axială a unui corp**, poligonul obținut prin secționarea printr-un plan care conține axa de simetrie a corpului.
Observație: Secțiunile axiale în poliedre sunt variabile ca formă, iar în corpurile de rotație sunt congruente.
La prisme , planele care conțin diagonalele se numesc secțiuni diagonale(sau plan diagonal).

Cap II PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

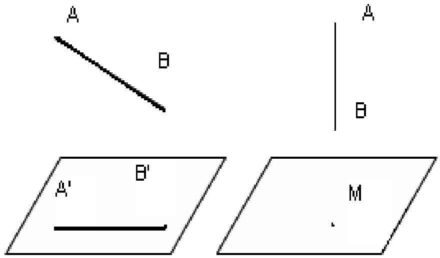
12. Proiecții de puncte, drepte şi segmente pe un plan

Definiție. Se numeşte proiecție a unui punct pe un plan, piciorul perpendicularei duse din acel punct pe un plan.
Definiție: Se numeşte proiecție a unei figuri geometrice pe un plan mulțimea proiecțiilor punctelor acelei figuri pe plan.

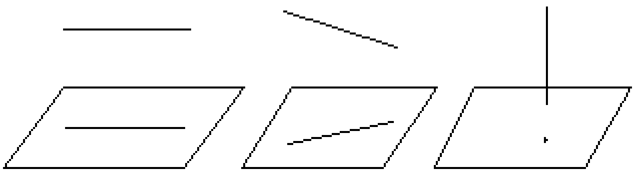




Teorema 12.1 Proiecția unei drepte pe un plan este o dreapta sau un punct.



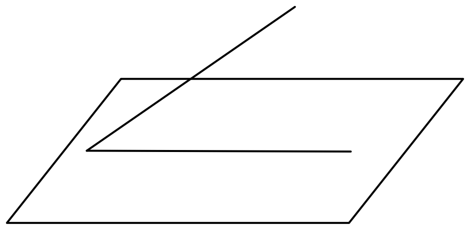
Teorema12.2 Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct.



Teorema 12.3. Proiecția mijlocului unui segment pe un plan sau dreaptă este mijlocul proiecției acelui segment pe planul dat sau pe dreapta dată.

13. Unghiul unei drepte cu un plan

Definiție: Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul făcut de dreaptă cu proiecția ei pe plan.



Teorema13.1. Unghiul unei drepte cu un plan este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu o dreaptă oarecare a planului.

Teorema 13.2. Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu lungimea segmentului înmulțit cu cosinusul unghiului format de dreapta suport a segmentului cu planul.

A’B’= AB.cos u

Teorema 13.3. Aria proiecției unei figuri pe un plan este egală cu aria figurii date înmulțit cu cosinusul unghiului făcut de figură cu planul. Aria A’B’C’ = Aria A’B’C’ cos u

14. Diedru. Unghi plan corespunzător unui diedru.

Definiție: Se numeşte **diedru** reuniunea a două semiplane care au aceeaşi frontieră.
Definiție: Se numeşte **unghi plan corespunzător unghiului diedru**, unghiul format de două semidrepte conținute în fețele diedrului, şi perpendiculare pe muchia diedrului în acelaşi punct.
Teorema 14.1. Orice două unghiuri plane corespunzătoare diedrului au aceeaşi măsură.

Definiție: **Măsura unui diedru** este măsura unui unghi plan corespunzător diedrului.
Definiție: Măsura unghiului dintre două plane secante este cea mai mică dintre măsurile diedrelor formate de aceste plane şi este egală cu măsura unghiului format de două drepte perpendiculare respectiv pe planele date.

15. Plane perpendiculare

Definiție: Două **plane** se numesc **perpendiculare** dacă unul dintre diedrele determinate de ele are măsura de 90^{o}.
Teorema15.1 Două plane secante sunt perpendiculare dacă şi numai dacă unul dintre plane conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.
Teorema15.2 Dacă două plane sunt perpendiculare, proiecția pe unul dintre plane a oricărui punct din celălalt plan aparține dreptei de intersecție a planelor.

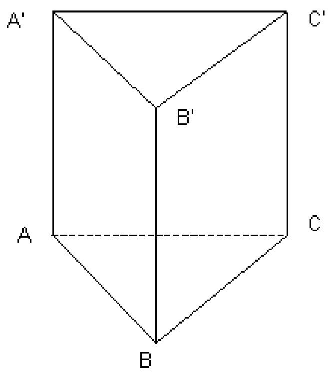
16. Teorema celor trei perpendiculare.

Teorema celor trei perpendiculare: Dacă o dreaptă **d** este perpendiculară pe un plan şi prin piciorul ei ducem o perpendiculară **f** pe o dreaptă **g** din acel plan, atunci dreapta determinată de un punct de pe **d** şi de intersecția celor două drepte din plan, este perpendiculară pe dreapta **g**.
Prima reciprocă a T. C.3. P: Dacă dintr-un punct exterior unui plan ducem perpendiculara pe un plan şi perpendiculara pe o dreaptă din plan, atunci dreapta ce uneşte picioarele celor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta dată din plan.

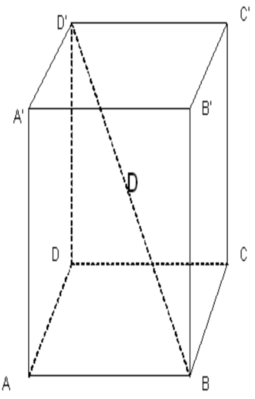
A doua reciprocă a T.C.3:P: Dacă într-un punct al unei drepte dintr-un plan se duc două drepte perpendiculare pe ea, prima exterioară planului şi a doua conținută în plan atunci perpendiculara dintr-un punct al primei drepte pe cea de-a doua este perpendiculară pe plan.

POLIEDRE ŞI CORPURI ROTUNDE

PRISMA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ



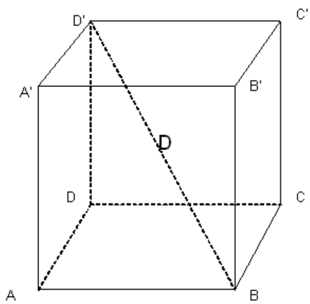
$$A_l = P_b \cdot h$$
$$A_t = A_l + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot h$$



PRISMA PATRULATERĂ REGULATĂ

$$A_l = P_b \cdot h$$
$$A_t = A_l + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot h$$

CUBUL

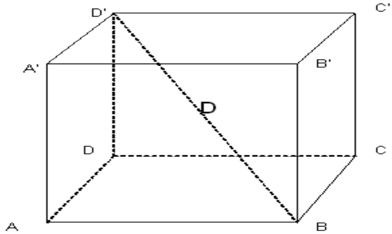


a= muchia cubului

$$D = a\sqrt{3}$$
$$A_l = 4a^2$$
$$A_t = 6a^2$$
$$V = a^3$$

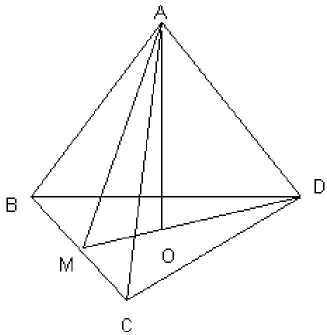
PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC

a,b,c = dimensiunile paralelipipedului



$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$A_l = 2ac + 2bc$$
$$A_t = 2ab + 2bc + 2ca$$
$$V = a \cdot b \cdot c$$

TETRAEDRUL REGULAT



l =latura tetraedrului

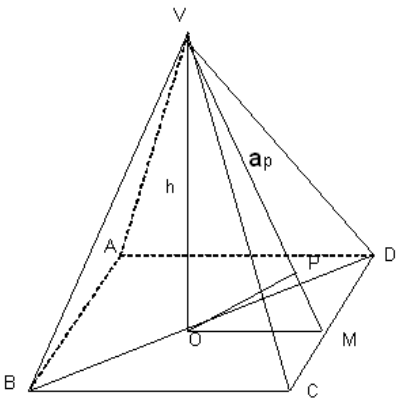
$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$A_l = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = \frac{4l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

PIRAMIDA REGULATĂ

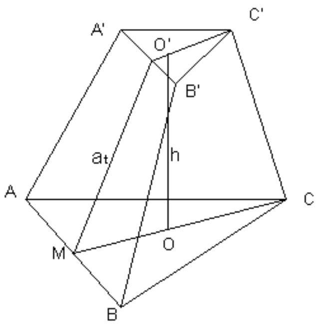


$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$

$$A_t = A_l + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ REGULATĂ



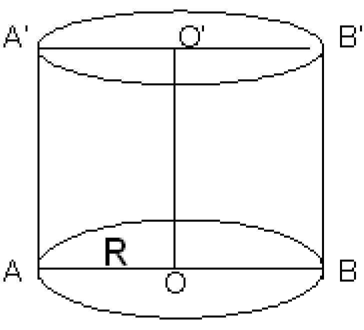
$$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$$

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$

$$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$$

CORPURI ROTUNDE

CILINDRUL CIRCULAR DREPT

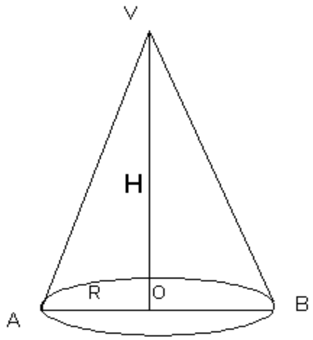


$$A_l = 2\pi RG$$

$$A_t = 2\pi RG(G + R)$$

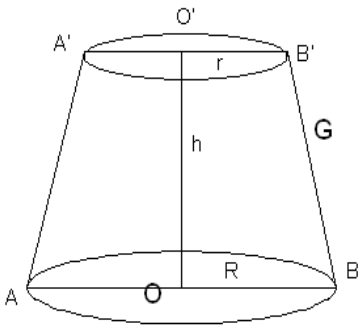
$$V = \pi R^2 \cdot H$$

CONUL CIRCULAR DREPT



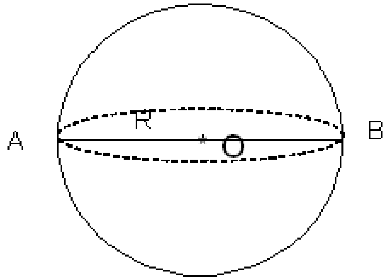
$$A_l = \pi RG$$
$$A_t = \pi R(G + R)$$
$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$$
$$G^2 = H^2 + R^2$$

TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT



$$A_l = \pi G(R + r)$$
$$A_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$
$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$$
$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$

SFERA



$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

PROBLEME – ENUNTURI SI REZOLVARI

CLASA A V –A

1. O veveriță aduce alune la vizuină în 14 minute, Ştiind că ea fuge fără alune cu 3m/s şi cu alune cu 2m/s, aflați distanța de la alun la vizuină.

Rezolvare:

Timpul cât fuge veverița este dat de raportul dintre lungimea drumului şi viteza cu care fuge:

Aşadar, fie d distanța de la alun la vizuină; Atunci

$$\frac{d}{3}+\frac{d}{2}=14\cdot 60 \Rightarrow \frac{5d}{6}=840 \Rightarrow d=1008m.$$

2. Să se determine a 2007-a zecimală a fracției $\frac{7}{11}$.

Rezolvare: $\frac{7}{11}$=0,(63); Rezultă că a 2007-a zecimală este 6.

3. Să se afle n є N din egalitatea:

2^{2n} **-4=3(4+4+…….4^{2007})**

Rezolvare : 2^{2n} $=4+3\cdot 4+3\cdot 4^2+...+3\cdot 4^{2007}$. Din aproape în aproape ,rezultă $2^{2n}=4^{2008}$ $2^{2n}=2^{4016}$, rezultă n=2008.

4. Să se determine nєℕ; n<10, astfel încât

$\frac{9n+4}{2n-1}$ єℕ

Rezolvare:

Pentru n=1 si n=9 => $\frac{9n+4}{2n-1}$ є ℕ

5. Să se arate că $N=4^{4n+2}.5^{3n+3}.3^{4n}+2^{8n+1}.5^{3n}.3^{4n+1}$ este divizibil cu 2006 $\forall n \in N^*$

Rezolvare:

$N=(4^4)^n\ 4^2\ (3^4)^n\ (5^3)^n\ 5^3+(2^8)^n\ 2\ (5^3)^n\ (3^4)^n\ 3=$

$=2^{8n}\ 3^{4n}\ 5^{3n}\ (2^4\ 5^3+2\ 3)=$

$=2^{8n}\ 3^{4n} 5^{3n}\ \underbrace{2(10^3+3)}_{=2006}\ \vdots 2006$

6. Să se arate că numărul

$N=2005^{2007}+2006^{2008}+2007^{2005}+2008^{2006}$ nu e pătrat perfect.

Rezolvare : Evident $u(2005^{2007})=5$

$u(2006^{2008})=6$

$u(2007^{2005})=u(7^{4*501+1})=u(7^1)=7$

$u(2008^{2006})=u(8^{2006})=4$

$\Rightarrow u(N)=u(5+6+7+4)=2 \Rightarrow$ N nu e pătrat perfect.

7. **Să se afle ultima cifră a numărului**

$N=1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+\ldots+2005^{2006}+2006^{2006}$

Rezolvare : $u(1^{2006})=1$

$u(2^{2006})=4$

$u(3^{2006})=9$

$u(4^{2006})=6$

$u(5^{2006})=5$

$u(6^{2006})=6$

$u(7^{2006})=9$

$u(8^{2006})=4$

$u(9^{2006})=1$

$u(10^{2006})=0$

Ultima cifră a primelor zece numere este 5

$\Rightarrow u(N)=5*400+\underbrace{1+4+9+6+5+6}$

$= \quad 0 \quad + \quad 31$

$\Rightarrow$ u (N) = 1.

8. Sa se determine numărul natural a, pentru care:

$27^{a^3} \cdot 9^{a^2} \cdot 3^a = 729^{17}$

Rezolvare: Relația data este echivalenta cu:

$3^{3a^3} \cdot 3^{2a^2} \cdot 3^a = (3^6)^{17}$

$3^{3a^3+2a^2+a} = 3^{102} \Rightarrow 3a^3 + 2a^2 + a = 102$

Pentru a = 3 $\rightarrow$ 3·27 + 2·9 + 3 = 102

9. Sa se arate ca numarul:

N = 2007 + 2008 · (1+2+3+….+2006) · 2 este cubul unui număr natural.

Rezolvare:

N = 2007 + 2008 · (2006 · 2007) : 2 · 2 =
= 2007 + 2008 · 2006 · 2007 =
= 2007 [1 + (2007+1) (2007-1)] =
= 2007 (1 +2007^2 – 1) = 2007^3

10. Sa se compare numerele:

$A=2006^{2007}+2007^{2006}$ si $B=2006^{2006}+2007^{2007}$

Rezolvare: 2006=2005+1 , 2007=2006+1

$A=2006\cdot2006^{2006}+2007^{2006}=2006^{2006}+2005\cdot2006^{2006}+2007^{2006}$
$B=2006^{2006}+2007\cdot2007^{2006}=2006^{2006}+2006\cdot2007^{2006}+2007^{2006}$
Cum 2005<2006 si $2006^{2006}<2007^{2006}$ =>A<B

11. Se considera numerele $a_1=4$, $a_2=3\cdot a_1=4$, $a_3=3\cdot a_2+4^2$,........ $a_{100}=3a_{99}+4^{99}$,.....

a)Sa se determine a_{2007}.

b)Sa se compare numerele a_{100} cu 3^{150}

Rezolvare:

Se observa ca pentru orice număr natural n, avem

$a_n=3\cdot a_{n-1}+4^{n-1}=4$ =>

a) $a_{2007}=4^{2007}$

b)$a_{100}=4^{100}=2^{200}=(2^4)^{50}$

$3^{150}=(3^3)^{50}$ cum $2^4<3^3$ =>$a_{100}<3^{150}$

12. Să se rezolve ecuația:

$$\mathbf{9^{x-2004}-15\cdot 9^{x-2005}+7\cdot 9^{x-2006}+7\cdot 9^{x-2007}=2007}$$

Rezolvare :

Ecuatia dată este echivalentă cu:

$9^{x-2007}(7+15\cdot 9-8\cdot 9^2+9^3)=2007$=> $9^{x-2007}\cdot 223=9\cdot 223$=> $9^{x-2007}=9^1$=> $x-2007=1$=>$x=2008$

13. Calculați câtul şi restul împarțirii numărului $9\cdot 7^{2007}$ la $2\cdot 7^{2005}$

Rezolvare :

$D=I\cdot C+R$ $R<I$ $9\cdot 7^{2007}=(7+2)\cdot 7^{2005}\cdot 7^2=7^3 . 7^{2005}+2\cdot 49\cdot 7^{2005}=(342+1)\cdot 7^{2005}+49\cdot 2\cdot 7^{2005}$

$(171\cdot 2+1)\cdot 7^{2005}+49\cdot 2\cdot 7^{2005}=171\cdot 2\cdot 7^{2005}+7^{2005}+49\cdot 2\cdot 7^{2005}$ =>

=>$9\cdot 7^{2007}=(171+49)\cdot 2\cdot 7^{2005}+7^{2005}$

Câtul este 220

Restul este 7^{2005}.

14. Găsiți toate numerele naturale pătrate perfecte mai mici decât 2007 care la împărțirea cu 45 dau restul 36.

Rezolvare :

Fie n un număr natural. Rezultă (conform T impartiri cu rest) că $n^2=45\cdot c+36$, $n^2<2007$

$\Rightarrow 9\cdot(5c+4)<2007 \Rightarrow 5c+4 \leq 223$ 5c+4 trebuie sa fie patrat perfect

$\Rightarrow 5c+4$ $\{2^2 ;3^2 ;7^2 ;8^2 ;12^2 ;13^2 ;\}$cum

$n^2=3^2\cdot(5c+4) \Rightarrow n^2 \in \{6^2 ;9^2 ;21^2 ;24^2 ;36^2 ;39^2\}$

15. Împărțind numărul 185 la un numar natural se obține restul 15.Aflați împărțitorul.

Rezolvare:

$D=I\cdot C+R \quad R<I$

$185=X\cdot C+15 \Rightarrow 185-15=X\cdot C$ cum$170=2\cdot5\cdot17$ si $R<X$ adică $X>15$

$\Rightarrow X$ poate fi 17 sau $2\cdot17=34$ sau $5\cdot17=85$ sau $2\cdot5\cdot17=170$

Aşadar împărțitorul aparține mulțimi$\{17,34,85,170\}$.

16. Sa se arate că nu există nici un număr natural n astfel încât $2007^{2007} = 7^n +2007$

Rezolvare :

$2007^{2007}-2007=7^n$ nu poate fi adevărat pentru nici un număr natural n deoarece ultima cifră a lui $(2007^{2007} - 2007)$este $U(2007^{2007}) -7=6$; $U(7^{2007})=3$; $13-7=6$, în timp ce $U(7^n)$ poate fi 7,9,3,sau 1,în nici un caz 6.

17. Dacă $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}$ =264, unde a,b,c sunt cifre în baza 10 atunci suma a+b+c este egală cu ....;

Rezolvare:

$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}=264 \Leftrightarrow 11(a+b+c)=11\cdot24 \quad \Rightarrow a+b+c=24.$

18. Aflați numărul natural n pentru care $4^n+4^n+4^n+4^n=256$
Rezolvare : Este evident ca $4^n+4^n+4^n+4^n=4.4^n=4^{n+1}=2^{2n+2}=256=2^8$. Deci se obtine ca 2n+2=8, adica n=3.

19. Dacă $\overline{ab6}+\overline{b8a}+\overline{7ab}=2007$ atunci $\overline{ab}\,\vdots\,17$.
Rezolvare:
100a+10b+6+100b+80+a+700+10a+b=2007,
rezultă 111a+111b+786=2007
111(a+b)=1221, a+b=11
Pentru a=3 şi b=8 se verifică relația dată.

20. Să se arate că numărul n= $(2007^{2007}-2007)(2006^{2006}-2006)(2005^{2005}-2005)$ este divizibil cu 200.
Rezolvare:
Ultima cifră a numărului din prima paranteză este 6, a celui din a doua paranteză este 0, şi a celui din a treia paranteză este 0, rezultă produsul n are ultimele două cifre 00 şi cum $2007^{2007}-2007$ este divizibil cu 2 rezultă că n este divizibil cu 200.

21. Să se arate că numărul 1+3+5+7+......+2005+2007 este pătrat perfect.
Rezolvare:
Notăm cu s suma 1+3+5+7+..............+2005+2007 =S şi tot cu s suma 2007+2005+2003+.............+3+1=S, după ce adunăm sumele rezultă ca 2008+2008+...................+2008 = 2S rezultă $S=2008.1004:2=1004^2$.

22. Să se arate că numărul N=$4^{n+1}\cdot5^{2n+5}+2^{2n+4}\cdot25^{n+2}$ e pătrat perfect, oricare ar fi n natural.
Rezolvare:
N=$2^{2n+2}\cdot5^{2n+5}+2^{2n+4}\cdot5^{2n+4}=$

$2^{2n+2} \cdot 5^{2n+4}(5+4) = (2^{n+1} \cdot 5^{n+2})^2 \cdot 3^2$ ceea ce înseamnă că este pătrat perfect.

23. Să se determine valoarea numărului natural a astfel încât numărul $N=4a^2+2^a.a+2^{a+1}$ să fie pătrat perfect.

Rezolvare:

Pentru a= 5 se obține N= 324=18^2.

24. O persoană împlineşte în anul 2007 o vârstă egală cu dublul sumei cifrelor anului de naştere. Aflați vârsta persoanei şi anul când s-a născut.

Rezolvare:

$\overline{19xy}$+2(1+9+x+y)=2007

1965+2(1+9+6+5)=2007. Aşadar x=6 şi y=5.

25. Să se determine numerele de forma $\overline{ab}$ ştiind că $7 \cdot \overline{ab} + \overline{ba} = \overline{abba} : 11 + 1$.

Rezolvare:

7(10a+b)+10b+a=(1001a+110b):11+1

71a+17b=91a+10b+1 $\Rightarrow$ 20a+1=7b $\Rightarrow$ a=1; b=3.

26. Suma a patruzeci şi două de numere naturale nenule este 900. Arătați că există printre aceste numere cel puțin două egale.

Rezolvare:

Dacă considerăm primele 42 de numere naturale consecutive atunci 1+2+3+4+....42= (42.43):2=903, aşadar putem avea în loc de 4 pe 1.

27. Într-o încăpere sunt 11 scaune cu trei respectiv patru picioare. Ştiind că s-au folosit 40 de picioare metalice pentru scaune, să se spună câte scaune cu trei respectiv patru picioare s-au făcut.
Rezolvare:
Presupunem că la scaunele care au câte patru picioare le rupem un picior în aşa fel încât să avem numai scaune cu trei picioare, în total un număr de 33 de picioare. Aşadar din 40 scădem 33 şi obținem 7 adică cele 7 picioare rupte provin tot de la atâtea scaune cu patru picioare. În rest scaunele cu trei picioare sunt în număr de 11-7=4.

28. a) Să se arate că numărul $N=6+6^2+6^3+6^4+.....+6^{100}$ este divizibil cu 7;
b) Să se afle ultima cifră a lui $2007^{2005}\cdot N$.
Rezolvare:
a) $N=6(1+6)+6^3(1+6)+........+6^{99}(1+6)$ este divizibil cu 7;
b) $u(N)=u(2007^{2005})u(N)=u(7^{2005})u(N)=0$.

29. **Determinați numărul natural x din egalitatea:**
a) $\left[\left(3^{10}\cdot 3^5\right)^2 : 81 + 3\cdot\left(9^3\right)^4\right] : x = 3^{25}$.
b) $\left[5+125^6 : (5^2)^7 - 5^3\right]\cdot x = 10+20+30+....1000$
Rezolvare: a) $\left(3^{25}\cdot 4\right) : x = 3^{25} \Rightarrow x = \left(3^{25}\cdot 4\right) : 3^{25} \Rightarrow x = 4$.
b)
$505\cdot x = 10(1+2+3+4+....+100) \Leftrightarrow 505\cdot x = 10\cdot(100\cdot 101):2$
Rezultă: x=100.

30. Să se determine numărul natural n astfel încât $\dfrac{4^{n+1}+4^n}{2^{n+1}+3\cdot 2^n} = 2^{2007}$**.**

Rezolvare:

$$\frac{2^{2n+2}+2^{2n}}{2\cdot 2^n+3\cdot 2^n}=2^{2007}\Leftrightarrow\frac{5\cdot 2^{2n}}{5\cdot 2^n}=2^{2007}\Rightarrow 2^n=2^{2007}\Rightarrow n=2007$$

31. Să se arate că pentru m, n $\in$N, fracția $\frac{2^m\cdot 3^{m+1}+2}{7^{n+1}\cdot 8^n+8}$ se simplifică cu 10.

Rezolvare:

$\frac{2^m\cdot 3^{m+1}+2}{7^{n+1}\cdot 8^n+8}=\frac{6^m\cdot 3+2}{56^n\cdot 7+8}$. Cum ultima cifră a numărătorului şi a numitorului este 0, rezultă că fracția se simplifică cu 10.

32. Să se determine numerele naturale n astfel încât fracția $\frac{n^2+3}{n^3+n^2+5}$ să se simplifice cu 5.

Rezolvare:

Fie 5| n^2+3 si 5| n^3+n^2+5 => 5| $(n^3+n^2+5)-(n^2+3)$ =>5| n^2+3
Atunci n poate fi de forma 5K, 5K+1, 5K+2,5K+3, 5K+4

Se observă că numai pentru n = 5k+2 se obține că fracția dată se poate simplifica cu 5 deoarece:
$(5K+2)^3+2 = M_5+8+2 \vdots 5$.

33. Să se determine numărul natural n astfel încât fracția $\frac{n^2-5}{n-3}\in N.$

Rezolvare:

$$\frac{n^2-5}{n-3}=n+3+\frac{4}{n-3}\in N\Leftrightarrow n-3|4\Rightarrow n\in\{4,5,7\}.$$

34. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 8 bile roşii şi 12 bile negre. Care este cel mai mic număr de extrageri pe care-l putem face astfel încât să fim siguri că am extras cel puțin 5 bile de aceeaşi culoare.

Rezolvare: Presupunand ca extragerile se fac în aşa mod încât de fiecare dată extragem o bilă de culoare diferită de cea extrasă anterior(ex. albă, roşie, neagră), după 3 astfel de cicluri de câte 4 bile de culori diferite, deci după 12 extrageri, cea de-a zecea extragere ne va aduce 5 bile care vor avea aceeaşi culoare.

Deci numărul minim este 13.

35. Să se arate că numărul n= 11112222 în baza zece se poate scrie ca un produs de două numere naturale consecutive.

Rezolvare:

$n=1111*10^4+2222=1111(10^4+2)=1111(10^4-1+3)=1111(9999+3)=1111(3.3333+3)=3333(3333+1)=3333*3334$

36. Să se arate că numărul :

$$N=\frac{16057}{2007}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2006\cdot 2007}$$ **este pătrat perfect.**

Rezolvare :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2006\cdot 2007}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-$$

$$\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}=$$

$$=1-\frac{1}{2007}=\frac{2007-1}{2007}=\frac{2006}{2007}$$

$$\frac{16057+2006}{2007}=\frac{18063}{2007}=9=3^2$$

$\Rightarrow$ N= 3^2

37. Să se rezolve ecuația : xy + x - 4y = 2007

Rezolvare : Ecuația dată este echivalentă cu (x-4) (y+1) = 2003

$\Rightarrow$ x-4=1 şi y+1=2003 $\Rightarrow$ x=5, y=2002 sau
x-4=2003 şi y+1=1 $\Rightarrow$ x=2007, y=0 sau
x-4= -1 şi y+1= -2003 $\Rightarrow$ x=3, y= -2004 sau
x-4= -2003 şi y+1= -1 $\Rightarrow$ x- -1999, y= -2

CLASA A VI –A

ALGEBRA

1. Numerele a,b,c verifică simultan condițiile:

a) media aritmetică a numerelor a,b,c este $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 0,4(1)$

b) a,b,c sunt direct proporționale cu 0,(3), 0,0(3), 0,00(3). Să se afle a,b,c.

Rezolvare:

a+b+c=$3 \cdot 3 \cdot \frac{37}{90} = \frac{111}{30}$

$$\frac{a}{0,(3)} = \frac{b}{0,0(3)} = \frac{c}{0,00(3)} = \frac{a+b+c}{\frac{3}{9}+\frac{3}{90}+\frac{3}{900}} = 10 \Rightarrow$$

a=30; b=300; c=3000.

2. Să se determine restul împărțirii lui 4^{6^n} **la 33.**

Rezolvare:

$$4^{6^n} = 4^{(5+1)^n} = 4^{(5k+1)} = (4^5)^k \cdot 4 = 1024^k \cdot 4 = (1023+1)^k \cdot 4$$

Rezultă că restul împărțirii este 4.

Observație: Întodeauna, un număr de forma $(a+1)^n$ va fi un multiplu de a la care se adaugă 1.

3. Aflați $x \in Q$ **din proporția:** $\frac{2^{2007}}{4^{1004}} = \frac{x}{0,5}$.

Rezolvare: Se rescrie 4^{1004} ca putere a lui 2, se fac simplificarile si rezulta x=1.

4. Să se determine numerele întregi x,y dacă $x^2+xy-2x-2y=3$.

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu (x+y)(x-2)=3$\Rightarrow$
x+y=1 şi x-2=3 $\Rightarrow$x=5, y=-4;
x+y=3 şi x-2=1 $\Rightarrow$x=3, y=-2;
x+y=-1 şi x-2=-3$\Rightarrow$x=-1,y=0;
x+y=-3 şi x-2=-1$\Rightarrow$x=1,y=-4.

5. Să se rezolve în numere naturale, ecuația: xy-5=3x+2y-13.

Rezolvare:

xy-5=3x+2y-13 $\Leftrightarrow$ xy-3x=2y-13+5
$\Leftrightarrow$ x(y-3)=2y-
8$\Rightarrow x=\frac{2y-8}{y-3}=\frac{2(y-3)-2}{y-3}=2-\frac{2}{y-3}\in N, y\neq 3\Rightarrow$
$y-3\in D_2\Rightarrow$
y-3=1$\Rightarrow$y=4; $\Rightarrow$x=0;
y-3=-1$\Rightarrow$y=2; $\Rightarrow$x=4;
y-3=2$\Rightarrow$y=5; $\Rightarrow$x=1;
y-3=-2$\Rightarrow$y=1; $\Rightarrow$x=3.

6. Să se determine a$\in$Z astfel încât $\frac{a^2-2a+3}{a+2}\in Z$.

Rezolvare:

$$\frac{a^2-2a+3}{a+2}=\frac{a(a+2)-4a+3}{a+2}=a+\frac{-4a+3}{a+2}=a+\frac{-4(a+2)+8+3}{a+2}=$$
$$a-4+\frac{11}{a+2}\in Z\Leftrightarrow a+2|11\Rightarrow$$
$$a+2\in D_{11}=\{-11,-1,1,11\}\Rightarrow$$

a+2=-11 => a=-13
a+2=-1 => a=-3
a+2=1 => a=-1

a+2=-11 => a=9.

7. **Să se rezolve în Z ecuația:** $\frac{x}{3}-\frac{3}{y}=2.$

Rezolvare: $\frac{x}{3}-\frac{3}{y}=2 \Rightarrow xy-9=6y \Leftrightarrow (x-6)\cdot y=9 \Rightarrow$

x-6=1 şi y=9 $\Rightarrow$ x=7,y=9
x-6=-1 şi y=-9 $\Rightarrow$ x=5,y=-9
x-6=9 şi y=1 $\Rightarrow$ x=15,y=1
x-6=-9 şi y=-1 $\Rightarrow$ x=-3,y=-1
x-6=3 şi y=3 $\Rightarrow$ x=9,y=3
x-6=-3 şi y=-3 $\Rightarrow$ x=3,y=-3

8. Sa se calculeze :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2006\cdot 2007}$$

Rezolvare :

Suma dată este egală cu

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}=$$

$$=1-\frac{1}{2007}=\frac{2006}{2007}$$

S-a folosit formula :

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

9. Să se determine numerele întregi pozitive a si b care satisfac condițiile a+b=165 si câtul împărțirii lui a la b este 10.

Rezolvare:

$a=10b+r \;, 0 \leqslant r < b$

$a+b=165 \Rightarrow 10b+r+b=165 \Rightarrow 11b+r=11\cdot 15 \Rightarrow$ r este divizibil cu 11=> $r=11x \Rightarrow 11(b+x)= 11\cdot 15 \Rightarrow b+x=15 \Rightarrow x=1$, deoarece $r=11x<b \Rightarrow r=11 \Rightarrow b=14 \Rightarrow a=151$.

10. Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in Z \middle| \frac{2x-4}{x-3}\in Z\right\}$

Rezolvare :

$$\frac{2x-4}{x-3}=2+\frac{2}{x-3}\in Z \Leftrightarrow x-3 \mid 2 \Leftrightarrow x-3\in D_2=\{-2,-1,1,2\}\Rightarrow$$

$x-3=-2\Rightarrow x=1$

$x-3=-1\Rightarrow x=2$

$x-3=1\Rightarrow x=4$

$x-3=2\Rightarrow x=5$.

11. Să se rezolve în N ecuația: $4^x+8^y+64^z=192$

Rezolvare:

$$2^{2x}+2^{3y}+2^{6z}=2^6\cdot 3 \,\big|\, : 2^6 \Rightarrow 2^{2x-6}+2^{3y-6}+2^{6z-6}=3$$

Cum $2x-6<1$,

$3y-6<1$

$6z-6<1\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3$

$3y-6=0\Rightarrow y=2$

$6z-6=0\Rightarrow z=1$

12. Să se rezolve în numere întregi pozitive ecuația : $3x+5y^2=189$.

Rezolvare:

Cum 3x şi 189 se divid cu 3 => $5y^2$ e divizibil cu 3 =>

$y=3a$ => $3x+5*9a^2=189$ |:3 =>

$x+15a^2=63$ => $x=3b$ => $3b+15a^2=63$ |:3 =>

$b+5a^2=21$ => $b=21$, $a=0$ => $x=63$, $y=0$

$b=1$, $a=2$ => $x=3$, $y=6$.

13. Să se determine numerele întregi pozitive a si b care satisfac condițiile a+b=165 si câtul împărțirii lui a la b este 10.

Rezolvare:

$a=10b+r$, $0 \leqslant r < b$

$a+b=165$=> $10b+r+b=165$ => $11b+r=11\cdot15$ => r este divizibil cu 11=> $r=11x$=> $11(b+x)= 11\cdot15$ => $b+x=15$=> $x=1$, deoarece $r=11x<b$ => $r=11$ => $b=14$ => $a=151$.

14. a) Să se calculeze suma A=1+11+111+…+$\underbrace{111\ldots111}_{2007}$

b) Să se arate că A este divizibil cu 9

c) Să se calculeze B=3+33+333+…+$\underbrace{33\ldots33}_{2007}$

Rezolvare :

a) $A=\frac{1}{9}(9+99+999+\ldots+99\ldots9) \Rightarrow$

$$A=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^{2007}-1}{9}$$

$$\frac{1}{9}(10+10^2+...+10^{2007}-2007)=\frac{1}{9}(\underbrace{111...111}_{2007}0-2007)=$$

$$=$$

$$=\frac{1}{9}(\underbrace{111...11}_{2003}09103)$$

b) Cum suma cifrelor din care este compus A este $2003\cdot 1$+0+9+1+0+3=2016 care este divizibil cu 9 $\Rightarrow$ A$\vdots$9

c) B=3·A=$\frac{1}{3}(\underbrace{111...11091033}_{2008})$

GEOMETRIE

1. Măsura unui unghi al unui triunghi isoscel este de 110^0.

a) Măsurile celorlalte două unghiuri sunt de ……………..;

b) Suma măsurilor tuturor unghiurilor exterioare triunghiului este de ……………..;

c) Măsura unghiului format de bisectoarea unghiului de 110^0 cu latura opusă este de …………;

Rezolvare:

a) Celelalte două unghiuri sunt obligatoriu de 35^0;

b) Pentru fiecare unghi al triunghiului există două unghiuri exterioare congruente prin urmare suma măsurilor tuturor unghiurilor exterioare triunghiului este de $360^0\cdot 2= 720^0$.

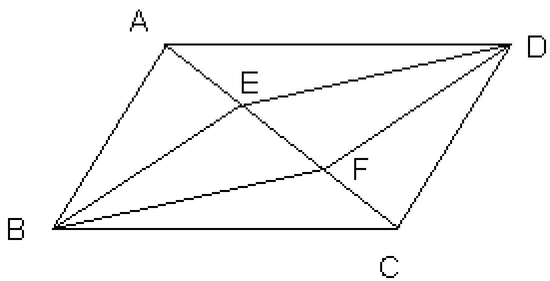
c) $180^0-(55^0+35^0)=90^0$.

2. În dreptunghiul ABCD cu AB=10 cm şi BC =18 cm se ia un punct M pe AB şi N pe BC astfel încât AM este de trei ori mai mic decât NC şi NC este de două ori mai mare decât BN. Să se afle aria triunghiului MND.
Rezolvare:

Din datele problemei, rezultă NC=3AM şi NC=2BN Cum BC=18, rezultă NC=12 şi AM=4. Aşadar $A_{MND}=A_{ABCD}-A_{MBD}-A_{NCD}-A_{AMD}=216-24-72-36=84$.

3. În triunghiul ABC se ia D un punct pe latura BC astfel încât AD este congruent cu DC. Dacă perimetrul lui ABC este de 46 cm şi al lui ABD este de 30 cm se cere lungimea lui AC.
Rezolvare:
AC= $P_{ABC}-P_{ABD}=46-30=16$ cm.

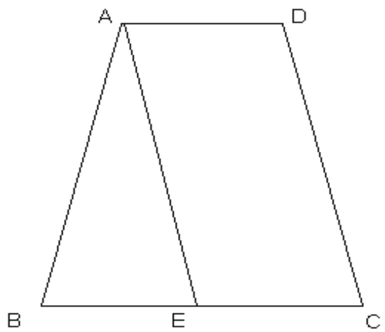
4. În paralelogramul ABCD se ia pe diagonala AC punctele E şi F astfel încât AE=EF=FC. Să se arate că patrulaterul BEDF este paralelogram şi că $A_{ABCD}=3A_{BEDF}$.
Rezolvare.



Din congruența triunghiurilor ABE şi DFC (L.U.L), rezultă BE şi DF sunt paralele şi congruente, rezultă BEDF paralelogram.
$A_{ABCD}=6A_{BEF}=3A_{BEDF}$

5. Fie ABCD un trapez având bazele AD, şi BC, cu BC>AD şi AD=10cm. Paralela prin A la CD intersectează BC în E. Ştiind că perimetrul triunghiului ABE este 24 să se afle perimetrul trapezului.

Rezolvare:



Cum AE este congruent cu DC, rezultă că perimetrul trapezului este $P_{ABCD}= P_{ABE}+2AD=24+20=44$ cm.

6. Fie ABCD un paralelogram cu AB=8 cm şi cu $m(\hat{B})=150^0$. Se cere măsura unghiului A şi distanța de la B la AD. Dacă AD=12 cm, aflați aria paralelogramului.=

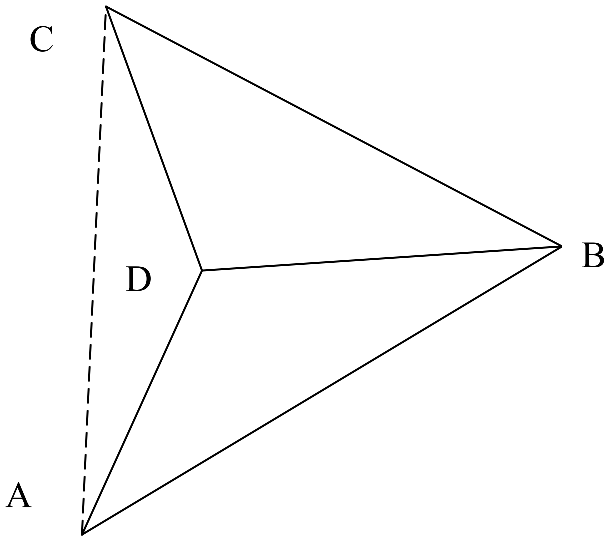
Rezolvare:

Cum m($\hat{B}$)=150^0, rezultă că unghiul A are 30^0 iar BE, unde E este piciorul perpendicularei dusă din B pe AD este jumătate din AB. Rezultă BE este de 4 cm. A_{ABCD}=AD*BE=12*4=48cm^2.

7. În rombul ABCD se duc DP⊥AB şi BQ⊥CD. Ştiind că măsura unghiului A este de 60^0 să se arate că:
a) triunghiul ABD este echilateral;
b) patrulaterul BPDQ este dreptunghi;
c) să se afle cât la sută reprezintă aria patrulaterului BPDQ din aria lui ABCD.

Rezolvare:
Triunghiul ABD este isoscel cu un unghi de 60^0, rezultă că triunghiul ABD este echilateral. Patrulaterul BPDQ este dreptunghi deoarece are două laturi opuse paralele şi congruente.
Cum măsura unghiului A este de 60^0, atunci măsura unghiului ADP este de 30^0 ceeace înseamnă că AP este jumătate din AD. Cum AB este congruent cu AD şi DP⊥AB chiar în mijlocul lui AB, rezultă A_{ABCD}=4A_{APD}. Rezultă, A_{BPDQ}=50%A_{ABCD}.

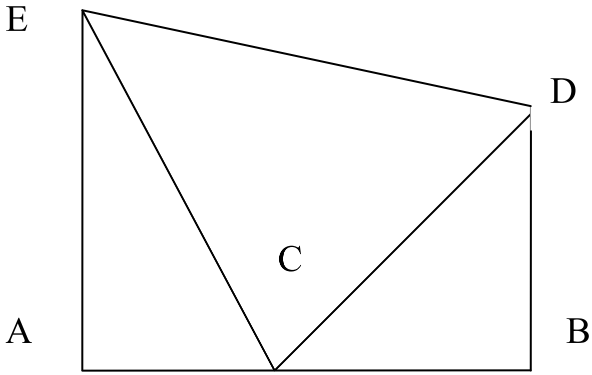
8) În patrulaterul ABCD, AC este perpendiculară cu BD ca în figura alăturată.
C
Dacă AC=13cm şi BD=8cm să se afle aria lui ABCD.



Rezolvare:

Cum DB şi AC sunt perpendiculare, rezultă $A_{ABCD}=A_{ABD}+A_{CBD}=\frac{BD\cdot AC}{2}=\frac{104}{2}=52\ cm^2$

9. În figura alăturată se dau AC=6,BD=8cm, AE=18,CB=12 cm şi A,C,B puncte coliniare.
Dacă EA⊥AC, BD⊥BC să se afle aria triunghiului ECD.



Rezolvare:
$A_{ECD}=A_{ABDE}-A_{AEC}-A_{DBC}=234-54-48=132cm^2$.

11. Fie ABC un triunghi oarecare. Prin mijlocul lui M al laturii AB se duce paralela la AC care intersectează pe BC în N. Prin B se duce paralela la AC care intersectează pe AN în D.
a) Aflați natura patrulaterului ABDC.
b) Dacă aria triunghiului AMN=12 cm² aflați aria patrulaterului ABDC.

Rezolvare:
MN este linie mijlocie în triunghiul ABD respectiv în BAC, atunci N este mijlocul lui AD şi al lui BC, rezultă că patrulaterul ABCD este paralelogram.
În triunghiul ANM, NM este mediană, atunci $A_{ANM}=A_{NBM}$,
în triunghiul ABD, BN este mediană, atunci $A_{ABN}=A_{BND}$,
în triunghiul ABC, AN este mediană iar în triunghiul BDC, DN este mediană, rezultă $A_{ABDC}=4A_{ABN}=4*24=96cm^2$.

CLASA A VII –A

ALGEBRA

1. Să se rezolve ecuația în $\mathbb{Z}$.

$\sqrt{(x-3)^2} + \left|y^2 - 2y\right| = 8$

Rezolvare:

$|x-3| + |y(y-2)| = 8 \Rightarrow y \in \{0,1,2,3,4\}$

y=0 => x=1;

y=1 => x=10;

y=2 => x=11;

y=3 => x=8;

y=4 => x=3.

2. Să se determine cifrele consecutive a şi b astfel încât $\overline{aa}^2 + \overline{bb}^2 - \overline{aa} \cdot \overline{bb} = 8833.$

Rezolvare:

Relația dată este echivalentă cu $(\overline{aa} - \overline{bb}\ )^2 = 8833 - \overline{aa} \cdot \overline{bb}$ Cum a şi b sunt cifre consecutive, rezultă: $(\overline{aa} - \overline{bb}\ )^2 = 11^2 \Rightarrow 121 = 8833 - (10a + a)(10b + b)$

$11a \cdot 11b8833 - 121 \Rightarrow 11^2 a \cdot b = 8712 | : 121 \Rightarrow a \cdot b = 72$

a=9, b=8 sau a=8, =9.

3. Să se determine numerele întregi n astfel încât $\frac{n^2 - 3}{n-3} \in Z$

Rezolvare:

$$\frac{n^2 - 3}{n-3} = \frac{(n-3) \cdot (n^2 + 3n + 9) + 24}{n-3} = n^2 + 3n + 9 + \frac{24}{n-3} \in Z$$

$\Leftrightarrow$ n-3 | 24 $\Leftrightarrow$ n-3 $\in D_{24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

=> n={-21,-9,-5,-3,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,15,27} .

4. Să se rezolve ecuaţia în N: xy-3x+3y=2016.

Rezolvare:

Ecuaţia dată este echivalentă cu (x+3)(y-3)=2007; Cum $2007=3^2.223$ rezultă următoarele situaţii:

x+3=9 şi y-3=223 rezultă: x=6, y=226;

x+3=227 şi y-3=9 rezultă: x=220, y=12;

x+3=3 şi y-3=669 rezultă: x=0, y=672;

x+3=669 şi y-3=3 rezultă: x=666, y=6;

x+3=2007 şi y-3=1 rezultă: x=2004, y=4.

5. Să se arate că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{2007}}\rangle\sqrt{2007}$ **.**

Rezolvare: Cum

$$1\rangle\frac{1}{\sqrt{2007}},\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2007}},........,\frac{1}{\sqrt{2006}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2007}}\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{2007}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2007}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2002}}+\frac{1}{\sqrt{2007}}+....+\frac{1}{\sqrt{2007}}$$

$$=\frac{2007}{\sqrt{2007}}=\sqrt{2007}\ .$$

6. Să se determine numerele întregi a şi b astfel încât $\sqrt{4\sqrt{6}+14}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3};$

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua expresia dată: $4\sqrt{6}+14=2a^2+2\sqrt{6}ab+3b^2$;

Din egalarea termenilor asemenea între ei rezultă : ab=2 şi $2a^2+3b^2=14$ rezultă: a=1 şi b=2.

7. Care număr este mai mare $A=\sqrt{16}-\sqrt{15} sau B=\sqrt{18}-\sqrt{13}$?

Rezolvare: Prin ridicare la puterea a doua se obține: $0<A^2<B^2$ rezultă A este mai mic decât B.

8. Dacă $a-\frac{1}{a}$ =7, să se calculeze $a^4+\frac{1}{a^4}$.

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua relația dată: $(a-\frac{1}{a})^2=49$, $a^2+\frac{1}{a^2}=51$ procedând analog se obține $a^4+\frac{1}{a^4}=51^2-2 \Rightarrow a^4+\frac{1}{a^4}=2599$.

9. Să se arate că numărul $N=2007+2007^2+2007^3...+2007^{2007}$ **este divizibil cu** 2006**.**

Rezolvare :

Evident $N=2007\cdot\frac{2007^{2007}-1}{2007-1}=\frac{2007^{2008}-2007}{2006}\in Z$

$\Rightarrow$ fracția se simplică cu 2006 $\Leftrightarrow N \vdots 2006$.

10. Să se rezolve în Z ecuația :

$\sqrt{(x-5)^2}+|y^2+2y|$**=8**

Rezolvare :

$$|x-5|+|y(y+2)|=8$$
$$y=1 \Rightarrow x-5=5 \Rightarrow x=10$$
$$y=2 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$$

11. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $5x^2+6xy+5y^2=400$

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu $4(x+y)^2+(x-y)^2=400$.

Notăm $x+y=a$ si

$$x-y=b \Rightarrow 4a^2+b^2=400 \Rightarrow b=4b_1 \Rightarrow 4a^2+4^2b_1^{\ 2}=400$$
$$\Rightarrow a^2+4b^2{}_1=100 \Rightarrow a=4a_1 \Rightarrow 4a^2{}_1+b^2{}_1=25$$
$\Rightarrow b_1$ este impar

$b_1 \in \{1,3,5\}$

$\Rightarrow b_1=3 \Rightarrow a_1=2 \ (1)$

si

$b_1=5 \Rightarrow a_1=0 \ (2)$

$$(1)\ \begin{array}{l} x=y=8 \\ x-y=12 \\ \Rightarrow x=10 \\ y=-2 \end{array} \qquad\qquad (2)\ \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=20 \\ x=10 \\ y=-10 \end{array}$$

12. Aflați X din

$$\mathbf{X.3^{2008}=(3^{2008}-1):(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+.......+\frac{1}{3^{2007}})}$$

Rezolvare:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+........+\frac{1}{3^{2007}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3^{2008}-1}{3^{2008}}$, după formula

$$1+X+X^2+.........+X^n=\frac{X^{n+1}-1}{X-1}$$

$$\Rightarrow X \cdot 3^{2008} = [3^{2008} - 1]\frac{2}{3} \cdot \frac{3^{2008}}{3^{2008} - 1} \Rightarrow X = \frac{2}{3}$$

13. Să se calculeze: $\dfrac{2a - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - a}$ **unde** $a = \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}$

Rezolvare:

$$\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{11+3}{2}} - \sqrt{\frac{11-3}{2}} = \sqrt{7} - 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 - \sqrt{2}}} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 2\sqrt{6} + 4 - 3 - \sqrt{6} = \sqrt{6} + 1$$

14. Ştiind ca: $\dfrac{a}{b} = \sqrt{3} - 1$ **să se calculeze partea întreagă a numărului** $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

Rezolvare:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow a = \sqrt{3} + 1, b = 1 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + 1}{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 1} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 1}{3 + 2\sqrt{3} + 1 - 1} =$$

$$= \frac{5 + 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{\left(5 + 2\sqrt{3}\right)\left(3 - 2\sqrt{3}\right)}{9 - 12} =$$

$$= \frac{15 - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 12}{-3} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{-3} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{3}$$

$$\left[\frac{4\sqrt{3} - 3}{3}\right] = 1$$

15. Se dă numarul x $= \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

a) Să se arate ca x² = 4

b) Să se calculeze (X+2)^{2007}

Rezolvare:

a. X= $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} =$

$= \left|1-\sqrt{5}\right| - \left|1+\sqrt{5}\right| = -1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5} = -2 \Rightarrow x^2 = 4$

b. $x = -2 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow (x+2)^{2007} = 0.$

16. Daca $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2007}$, să se calculeze $\dfrac{66b}{a\sqrt{223}-9b}$.

Rezolvare:

$$a = b\sqrt{2007} \Rightarrow \frac{66b}{b\sqrt{2007}\cdot\sqrt{223}-9b} = \frac{66}{223\cdot 3-9} = \frac{66}{660} = \frac{1}{10}$$

17. Să se calculeze suma

S = $\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2007}}$ **.**

Rezolvare:

$$S = \left(\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2007}}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{2^2}+\sqrt{2^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2006}}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+2^{1003}\right)+$$
$$+2+2^2+2^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2^{1003}+1-1 =$$
$$= \left(1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2^{1003}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)-1 =$$
$$= [\left(2^{1004}\right)-1]\left(\sqrt{2}+1\right)-1 .$$

Am adăugat şi am scăzut 1.

18. Calculați:

$$E=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\left(\left|2^{68}-3^{51}\right|+2^{68}\right):3^{50}$$

Rezolvare:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2}{2}}+\sqrt{\frac{4-2}{2}}=\sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$\left(2^4\right)^{17}-\left(3^3\right)^{17}<0\Rightarrow$$

$$E=\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}+\left(-2^{68}+3^{51}+2^{68}\right):3^{50}=$$

$$=3+3^{51}:3^{50}=3+3=6.$$

19. Determinați $n\in Z$ astfel încât $\dfrac{\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{n}\in Z.$

Rezolvare:

$$\frac{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{n}=\frac{\left|3-\sqrt{5}\right|+\left|\sqrt{5}-1\right|}{n}=$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{n}=\frac{2}{n}\in Z\Leftrightarrow n\in\{-2,-1,1,2\}$$

20. Dacă $x^2 + y^2 = 12xy$ **, x,y** $\in$ **R, x,y>0**

Să se calculeze : $a)\dfrac{x+y}{x-y}$

$b)\dfrac{x}{y}$

$c)$ **partea întreagă a numărului** $\dfrac{x}{y}$.

Rezolvare :

a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 14xy$

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 10xy$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$

b) $5x + 5y = \sqrt{35}x - \sqrt{35}y \Rightarrow (\sqrt{35} - 5)x = y(5 + \sqrt{35})$

$$\frac{x}{y} = \frac{5+\sqrt{35}}{\sqrt{35-5}}$$

c) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{(5+\sqrt{35})^2}{35-25} = \dfrac{25+35+10\sqrt{35}}{10} = \dfrac{60+10\sqrt{35}}{10} =$

$= 6 + \sqrt{35}$

$\left[\dfrac{x}{y}\right] = 6 + 5 = 11$

21. Sa se arate ca a= $\sqrt{1+3+5+...2007} \in Q$ b= $\sqrt{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot .....\cdot 2007}$ $\notin \mathbb{Q}$

Ştiind ca: 1+3+5+……+2007= 1004^2 , => a$\in \mathbb{Q}$

Cum 2003 є 1×3×5×…..×2007 iar 2003^2 , nu apartine produsului=> b $\notin \mathbb{Q}$.

22 Determinați $x \in Z$ **pentru care fracția** $\frac{x^2+1}{x+2} \in Z$

Rezolvare:

$$\frac{x^2+1}{x+2} = \frac{x(x+2)-2(x+2)+5}{x+2} = x-2+\frac{5}{x+2} \in Z$$

$$\Leftrightarrow\ x+2 \mid 5 \Leftrightarrow x+2 \in D_5 = \{\pm 1, \pm 5\} \Rightarrow$$

x+2=-1 x=-3
x+2=-5 x=-7
x+2=1 x=-1
x+2=5 x=3 .

23. **Dacă** $\frac{x}{y} = 15\%$ **atunci** $\frac{2x+y-1}{3x+2y+1} = ...\%$ **.**

Rezolvare:

$$\frac{x}{y} = 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} \Rightarrow x = 3; y = 20 \Rightarrow$$

$$\frac{2x+y-1}{3x+2y+1} = \frac{2\cdot 3+20-1}{3\cdot 3+2\cdot 20+1} = \frac{25}{50} = \frac{50}{100} = 50\%$$

24. **Să se rezolve în Z ecuația:** $\frac{x}{3} - \frac{3}{y} = 2.$

Rezolvare: $\frac{x}{3} - \frac{3}{y} = 2 \Rightarrow xy - 9 = 6y \Leftrightarrow (x-6)\cdot y = 9 \Rightarrow$

x-6=1 şi y=9 $\Rightarrow$ x=7,y=9
x-6=-1 şi y=-9 $\Rightarrow$ x=5,y=-9
x-6=9 şi y=1 $\Rightarrow$ x=15,y=1

x-6=-9 şi y=-1 $\Rightarrow$ x=-3,y=-1
x-6=3 şi y=3 $\Rightarrow$ x=9,y=3
x-6=-3 şi y=-3 $\Rightarrow$ x=3,y=-3.

25. **Să se determine numerele întregi x,y dacă x^2+xy-2x-2y=3.**

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu (x+y)(x-2)=3 $\Rightarrow$
x+y=1 şi x-2=3 $\Rightarrow$ x=5, y=-4; x+y=3 şi x-2=1 $\Rightarrow$ x=3, y=-2;
x+y=-1 şi x-2=-3 $\Rightarrow$ x=-1,y=0; x+y=-3 şi x-2=-1 $\Rightarrow$ x=1,y=-4.

26. **Să se rezolve în numere naturale, ecuația: xy-5=3x+2y-13.**

Rezolvare:

xy-5=3x+2y-13 $\Leftrightarrow$ xy-3x=2y-13+5
$\Leftrightarrow$ x(y-3)=2y-8 $\Rightarrow x = \dfrac{2y-8}{y-3} = \dfrac{2(y-3)-2}{y-3} = 2 - \dfrac{2}{y-3} \in N, y \neq 3 \Rightarrow$
$y-3 \in D_2 \Rightarrow$
y-3=1 $\Rightarrow$ y=4; $\Rightarrow$ x=0; y-3=-1 $\Rightarrow$ y=2; $\Rightarrow$ x=4;
y-3=2 $\Rightarrow$ y=5; $\Rightarrow$ x=1; y-3=-2 $\Rightarrow$ y=1; $\Rightarrow$ x=3.

27. **Se dau numerele x,y,z, astfel încât x este 20% din y, iar y este 30% din z. Se cere:**

a) Să se calculeze suma $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$;

b) Dacă 50x+10y+z=350 atunci să se afle x, y, z.

Rezolvare:

a) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{y}{z} = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$; $\dfrac{z}{x} = \dfrac{100}{6}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{100}{6} = \frac{103}{6}.$$

b) Cum $x = \frac{y}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3z}{10} = \frac{3}{50} z$ şi $y = \frac{3}{10} z \Rightarrow$ 50x+10y+z=350

$\Leftrightarrow$ 3z+3z+z=350 $\Rightarrow$ 7z=350 $\Rightarrow$ z=50

$\Rightarrow$ x=3 şi y=15.

28. **Numerele naturale a şi b sunt direct proporționale cu 4 şi 10.**
a) Ce procent din numărul a reprezintă numărul b?
b) Media aritmetică a numerelor a şi b este 28. Aflați numerele a şi b.

Rezolvare:

a) $\frac{a}{4} = \frac{b}{10} \quad b = \frac{10}{4} a = \frac{250}{100} a \Rightarrow b = 250\% \quad din \quad a$;

b) $\frac{a+b}{2} = 28 \Rightarrow a+b = 56 \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{10} = \frac{56}{14} = \frac{28}{7} = 4$.

29. Fie n ϵ $\mathbb{N}$, să se afle restul împărțirii lui N=5^{8n+5} la 2^5.

Rezolvare:

$N = (5^{4n})^2 \cdot 5^5 = [(5^{4n})^2 - 1 + 1] \cdot 5^5 =$

$= [(5^{4n} - 1)(5^{4n} + 1) + 1] \cdot 5^5 =$

$= [(5^{2n} - 1)(5^{2n} + 1)(5^{4n} + 1) + 1] \cdot 5^5$

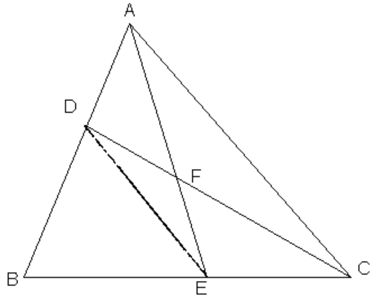
Cum $(5^n-1) \vdots 4$, $(5^n+1) \vdots 2$, $(5^{2n}+1) \vdots 2$, $(5^{4n}+1) \vdots 2$, rezultă că restul împărțirii lui N la 2^5 este restul împărțirii lui 5^5 la 2^5 care este 21.

GEOMETRIE

1. Fie triunghiul ABC cu $D \in AB$, $E \in BC$ astfel încât $A_{ADF}=8$, $A_{AFC}=20$, $A_{CEF}=15$. Se cere aria patrulaterului BDFE.

Rezolvare:

Se ştie că în orice triunghi ABC cu $E \in BC$ există egalitatea :



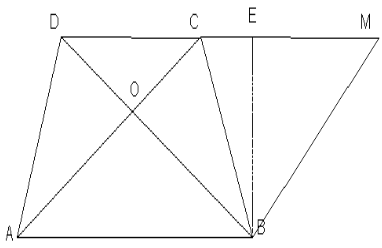
$$\frac{A_{ABE}}{A_{AEC}} = \frac{BE}{EC}$$, atunci vom nota pentru simplitate cu $A_1=A_{ADF}$, $A_2=A_{AFC}$, $A_3=A_{CEF}$, $A_4=A_{DFE}$, $A_5=A_{BDE}$;

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_3} = \frac{AF}{FE} = \frac{A_1}{A_4} \Rightarrow \frac{20}{15} = \frac{8}{A_4} \Rightarrow A_4 = 6, \text{ De asemenea}$$

$$\frac{A_2 + A_3}{A_1 + A_4 + A_5} = \frac{EC}{BE} = \frac{A_4 + A_3}{A_5} \Rightarrow \frac{20+15}{8+6+A_5} = \frac{6+15}{A_5} \Rightarrow A_5 = 21,$$

$\Rightarrow A_{BDFE}=A_4+A_5=6+21=27.$

2. Un trapez isoscel are lungimea diagonalelor de 5 cm şi suma lungimilor bazelor de 6 cm. Să se afle aria trapezului.



Rezolvare:

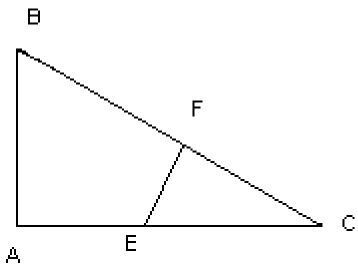
Fie BM $\|$AC, M$\in$(DC , $\Rightarrow$CM $\equiv$AB, $\Rightarrow$DM=DC+AB=6 şi BM $\equiv$AC=5 $\Rightarrow$ ΔBDM isoscel cu BE$\perp$DM, BE înălţime $\Rightarrow$

$BE^2=BM^2-EM^2 \Rightarrow BE=\sqrt{5^2-\left(\frac{DM}{2}\right)^2}=4 \Rightarrow$

$$A_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot DE}{2}=\frac{DM\cdot DE}{2}=A_{DMB}=\frac{6\cdot 4}{2}=12.$$

3. În triunghiul dreptunghic ABC, m($\hat{A}$)=90^0, se ia pe latura BC punctual F la 2 cm de vârful C şi pe AC se ia punctual E astfel încât $\frac{CF}{CE}=\frac{CA}{BC}=\frac{1}{3}$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

Rezolvare:



Cum FC =2 cm, rezultă din relaţia dată că CE=3·2=6 cm, relaţie care mai poate fi scrisă şi sub forma :

$\frac{CF}{CA}=\frac{CE}{BC}$ şi cum unghiul C este comun, rezultă că triunghiul CFE este asemenea cu triunghiul CAB(cazul L.U.L.) $\Rightarrow$ ΔCFE este dreptunghic în F. Din Teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul CFE $\Rightarrow FE^2=CE^2-FC^2$ $\Rightarrow FE=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

Din $\Delta CFE \sim \Delta CAB$ $\Rightarrow \frac{CA}{BC}=\frac{1}{3}=\frac{FE}{AB} \Rightarrow AB=3\cdot FE=12\sqrt{2}$ cm şi BC=3CA

Din triunghiul ABC dreptunghic, rezultă: $BC^2=AB^2+AC^2$ $\Leftrightarrow (3AC)^2=(12\sqrt{2})^2+AC^2$

$\Rightarrow AC=6$ cm şi BC= 18 cm $\Rightarrow P_{ABC}=AB+AC+BC=12\sqrt{2}+18+6=12(\sqrt{2}+2)$ cm.

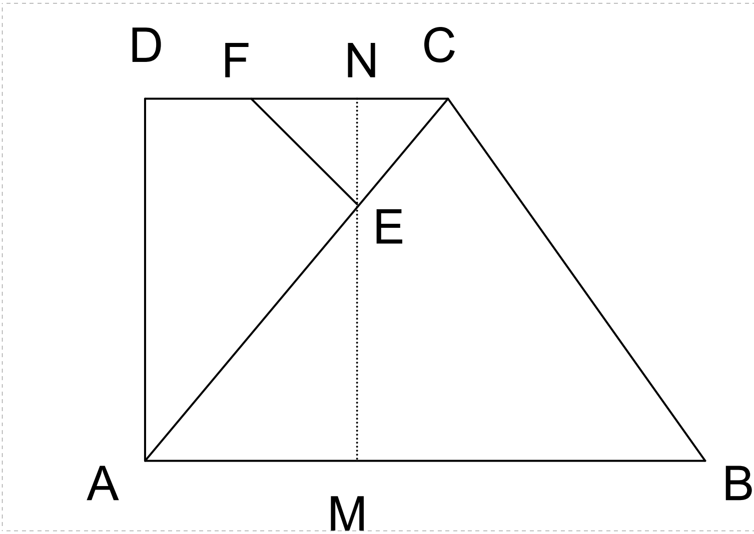
4. În trapezul dreptunghic ABCD, AB||CD, AB=12 cm, CD=6 cm, AD=8 cm se ia pe diagonala AC punctul E astfel încât $\frac{CE}{CA}=\frac{1}{4}$. Din E se duce o perpendiculară pe AC astfel încât ea intersectează pe CD în F. Se cere:

a) perimetrul trapezului ABCD;

b) să se arate că $\Delta CEF \sim \Delta CDA$ şi să se calculeze lungimea segmentului EF;

c) să se calculeze distanța de la E la AB.

Rezolvare:



Prin punctul E se duce o perpendiculară pe bazele trapezului pe care le intersectează în $M \in AB$ şi $N \in CD$. Cum CD=6 şi AB=12 rezultă că triunghiul CAB este isoscel (înălțimea din C cade chiar la mijlocul lui AB). Din T. lui Pitagora aplicată în $\Delta ADC \Rightarrow CB \equiv AC=10$.

Atunci P_{ABCD}= AB+BC+CD+AD=6+8+12+10=36.

b) $\Delta CEF \sim \Delta CDA$ deoarece sunt triunghiuri dreptunghice cu unghiul C comun, $\Rightarrow \dfrac{EF}{DA} = \dfrac{CE}{DC}$ (*)

Cum $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CE = \dfrac{CA}{4} = \dfrac{5}{2}$ Din (*)$\Rightarrow$ EF=$\dfrac{10}{3}$.

c) Din NE|| AD $\Rightarrow \dfrac{NE}{AD} = \dfrac{CE}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{NE}{8} = \dfrac{1}{4}$

d(E,AB)=EM=MN-NE=8-2=6 .

5. În triunghiul dreptunghic ABC, m($\hat{A}$)=90^0, iar AC=12 cm, BC=13 cm. Se cere lungimea bisectoarei BD.

Rezolvare:

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem AB=5 cm. Din Teorema bisectoarei, rezultă:

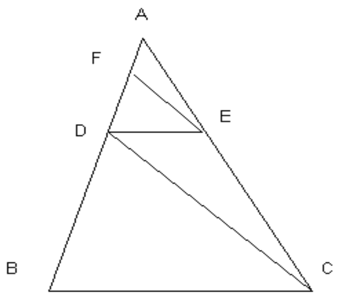
$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DC}=\frac{5}{5+13}\Rightarrow$$

$$\frac{AD}{12}=\frac{5}{18}\Rightarrow AD=\frac{5\cdot 12}{18}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{(\frac{10}{3})^2+5^2}=\frac{5}{3}\sqrt{13}\ .$$

6. În Δ ABC, D $\in$ AB, F $\in$ AD, E $\in$ AC astfel încât $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{4}$ şi AF=2cm, DE$\parallel$ BC, FE$\parallel$ DC. Se cere lungimea lui AB.

Rezolvare:

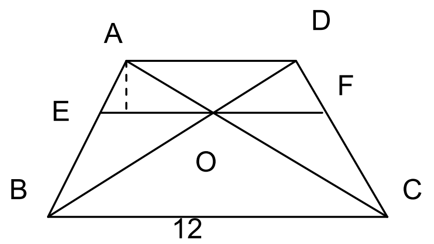


Aplicând de mai multe ori teorema lui Thales, $\Rightarrow\ \frac{1}{4}=\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FD}=\frac{2}{FD}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ FD=8 $\Rightarrow$ AD=10 $\Rightarrow$ $\frac{10}{DB}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ DB=40 $\Rightarrow$ AB =AD+DB=50cm.

7. **În trapezul ABCD, cu BC∥AD, BC=12 se duce o paralelă EF la bazele trapezului, care trece prin intersecția diagonalelor O, astfel încât** $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$**. Se cere** $\frac{A_{AEO}}{A_{AOD}}$ **.**

Rezolvare:



EO∥BC Din Teorema fundamentală a asemănării $\Rightarrow$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EO}{BC}\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{EO}{12}\Rightarrow EO=4$$

$$\frac{AE}{AB-AE}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta OAD\sim\Delta OBC\Rightarrow\frac{AD}{BC}=\frac{OD}{OB}=\frac{EA}{EB}\Leftrightarrow\frac{AD}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow AD=6\Rightarrow$$

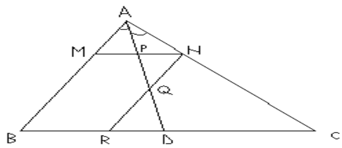
$$\frac{A_{AEO}}{A_{AOD}}=\frac{EO}{AD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

8. **Fie ABC un triunghi şi fie AD o bisectoare astfel încât la o treime față de vârf, prin punctul P de pe bisectoare se duce o paralelă MN la BC.**

Din N $\in$ AC se duce o paralelă la AB care intersectează pe AD in Q si pe BC in R.

Dacă AB=18, BC=16 si AC=6, aflați perimetrul triunghiului QDR.

Rezolvare:



$BD = \dfrac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \dfrac{18 \cdot 16}{24} = 12.$ Analog DC=4 Cum MN||BC, rezultă:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} = \frac{MP}{BD} = \frac{PN}{DC} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{MP}{12} = \frac{PN}{4} \Rightarrow MP = 4, PN = \frac{4}{3}.$$

MN=MP+PN
=

$$4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow BR = MN = \frac{16}{3} \Rightarrow RD = BD - BR = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

Cum PN||RD atunci triunghiurile PQN şi DQR sun asemenea:

$$\frac{QN}{QR} = \frac{PN}{RD} = \frac{4}{20} \Rightarrow \frac{QN + QR}{QR} = \frac{4 + 20}{20} \Rightarrow$$

$$\frac{BM}{QR} = \frac{24}{20} \Rightarrow QR = \frac{20BM}{24}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3}; \Rightarrow AM = 6 \Rightarrow BM = 12 \Rightarrow QR = 10.$$

Din formula lungimii bisectoarei,

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{b \cdot c}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{18 \cdot 6}{(18+6)^2}[(18+6)^2 - 16^2 =$$

60. $\Rightarrow$ AD=$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$$\frac{AP}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AP = \frac{2\sqrt{15}}{3} \Rightarrow PD = 2\sqrt{15} - \frac{2\sqrt{15}}{3} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

$$\frac{QN}{QR} = \frac{PQ}{QD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{PQ+QD}{QD} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{PD}{QD} = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$QD = \frac{5 \cdot 4\sqrt{15}}{3 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{15}}{9}$$

P_{QRD}=QR+QD+RD= $10 + \frac{10\sqrt{15}}{9} + \frac{20}{3} = \frac{150+10\sqrt{15}}{9}$.

9. Să se afle aria triunghiului ABC, dacă se cunosc AC=2 cm şi m($\hat{B}$)=0,1(6)$\cdot m(\hat{A})$ şi m($\hat{C}) = 0,8(3) \cdot m(\hat{A})$).

Rezolvare:

0,1(6)=$\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$ şi 0,8(3)= $\frac{75}{90} = \frac{5}{6}$. Cum

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^0 \Rightarrow$$

$$m(\hat{A}) + \frac{1}{6}m(\hat{A}) + \frac{5}{6}m(\hat{A}) = 180^0 \Rightarrow$$

$$m(\hat{A}) = 90^0 \Rightarrow m(\hat{B}) = 15^0, m(\hat{C}) = 75^0$$

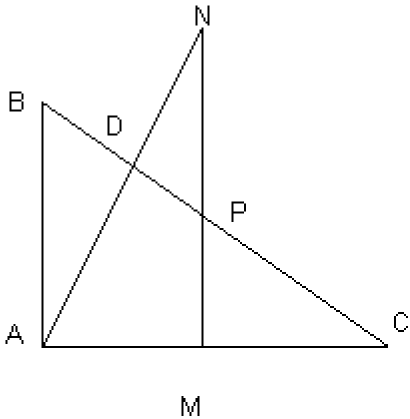
Aşadar, triunghiul ABC este dreptunghic în $\hat{A}$. Cum AC se opune unui unghi de 15^0,rezultă:

BC=4AC=8 şi AB=$\sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

A_{ABC}=$\frac{AB \cdot AC}{2} = 2\sqrt{15}cm^2$.

10. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\hat{A}) = 90^0$, AB=6 cm, CD=9 cm unde AD este perpendiculară pe BC, se duce prin mijlocul M al lui AC o perpendiculară pe AC care intersectează pe BC în P, iar $AD \cap$ PM=$\{N\}$. Se cere lungimea segmentelor BD, AC, AN, AD.

Rezolvare:



Din Teorema înălțimii în triunghiul ABC rezultă:

$AD^2 = BD \cdot DC = 9BD,$

Din Teorema lui Pitagora în triunghiul ABD rezultă:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow 36 = BD^2 + 9BD$$

$$\Rightarrow \quad BD = 3\,cm \quad \Rightarrow$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}\,.$$

Cum $\Delta ABC \sim \Delta MAN \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{AN} \Leftrightarrow$

$$\frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{12}{AN} \Rightarrow AN = 6\sqrt{3}, AD = 3\sqrt{3}$$

$\begin{cases} AM \equiv MC \\ MP \parallel AB \end{cases} \Rightarrow$ P este mijlocul lui BC. Aşadar: BP=PC=6, DP=6-3=3.

$\Delta DBA \sim$
$\Delta DPN \Rightarrow$

$$\frac{3}{DP} = \frac{3\sqrt{3}}{DN} = \frac{6}{NP} \Rightarrow DN = 3\sqrt{3}, NP = 6, MP = 3, MN = 9 \cdot$$

11. Fie ABCD un paralelogram cu baza BC=15 cm în care diagonalele BD=18 cm formează un unghi de 30^0 cu AC=10 cm; Să se calculeze perimetrul paralelogramului.

Rezolvare:

Fie AE înălțimea paralelogramului dusă din A pe BC;

$$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 30^0}{2} = \frac{BC \cdot AE}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{18 \cdot 10}{2} = 15 \cdot AE \Rightarrow AE = 6; \Rightarrow$$

Aplicăm T. lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AEC;

$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8; \Rightarrow$ BE=15-8=7;

Aplicăm t. lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABE: $AB = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \Rightarrow$

$$P = (30 + 2\sqrt{85})cm.$$

12. Pe pătratul ABCD de latură 12cm se ia punctual M pe BC astfel încât BM =3cm si N pe CD astfel încât DN=1cm. Se cere sinusul unghiului MAN.

Rezolvare:

Aplicăm Teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice ABM si AND .

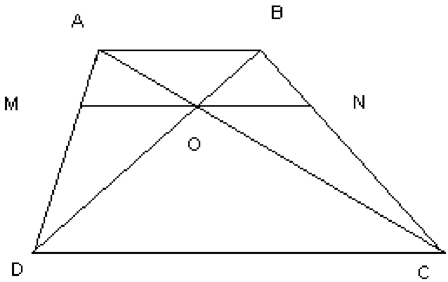
AM= $\sqrt{153}$. AN= $\sqrt{208}$.

A_{ABM}=18, A_{MCN}=18, A_{ADN}=48=>A_{AMN}= A_{ABCD}-18-18-48=> A_{AMN}=144-84=60.

Pe de altă parte ,$A_{AMN} = \frac{AM \cdot AN \cdot \sin(< MAN)}{2}$ =>

$\sin M\hat{A}N = \frac{10\sqrt{221}}{221}$

13. Fie ABCD un trapez oarecare cu bazele AB, CD si O intersectia diagonalelor AC si BD. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele in M si N. Demonstrati ca :
a) OM = ON;
b) Daca PQ este linia mijlocie a trapezului, atunci MN . PQ = AB . CD
Rezolvare:
a)Deoarece MO ‖ AB rezulta ca triunghiurile DOM si DBA sunt asemenea ceea ce conduce la : MO / AB = DO / DB.
In mod analog vom avea egalitatea ON / AB = CO / AC. Folosind faptul ca ABCD este trapez, deci triunghiurile AOB si COD sunt asemenea, adica DO / DB = CO / AC, va rezulta ca MO / AB = NO / AB.Deci MO = NO.
b)Aceleasi asemanari de triunghiuri ne dau urmatoarele egalitati, in care am folosit faptul ca OM = ON:



MN / AB = 2 MO/ AB = 2 DO / BD si
MN / CD = 2 NO / CD = 2 BO / CD, relatii care prin adunare ne dau
MN / AB + MN / CD = 2(DO / BD + BO / BD) =
2 BD / BD = 2.

Prin impartire la 2 si aducere la numitor comun in relatia de mai sus se obtine
MN(AB + CD) / 2 = AB . CD, adica exact ceea ce trebuia demonstrat, pentru ca linia mijlocie PQ este exact semi-suma bazelor.

14. În triunghiul oarecare ABC se ştie:
AB=10 BC=14 AC=12. Se cere:
a) Aria triungiului
b) Înălțimea AD

Rezolvare:

a) $A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde

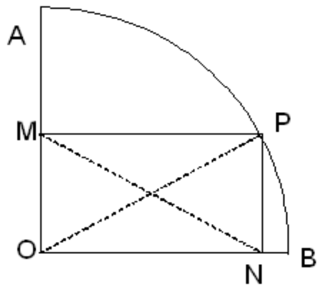
$P = \dfrac{10+14+12}{2} = 18$

$A = \sqrt{18(18-10)(18-14)(18-12)} = 24\sqrt{6}$

b) $A_{ABC} = \dfrac{BC \cdot h}{2}$

$24\sqrt{6} = \dfrac{14 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{24\sqrt{6}}{7}$

15. În figura alăturată , AOB este un sfert de cerc cu raza de 8 cm şi perimetrul suprafeței MPNO este de 20 cm. Dacă MP este paralel cu OB şi PN paralel cu OA se cere să se afle perimetrul figurii AMNBPA.



Rezolvare:
Patrulaterul OMPN este dreptunghi, rezultă 2(OM+ON)=20, aşadar OM+ON=10.
Pe de altă parte diagonalele dreptunghiului sunt congruente, rezultă MN=OP=8 cm.(OP este rază). Rezultă, AM+BN=AO+OB-(OM+ON)=8+8-10=6.
Cum lungimea arcului AB este
$l_{\hat{A}B} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 8}{4} = 4\pi \Rightarrow P_{AMNBPA} = AM+MN+NB+l_{AB} =$ 6+8+4π=14+4π.

CLASA A VIII -A

ALGEBRA

1. Fie $f : N \to R$**,** $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Să se calculeze:

$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(2007)$

Rezolvare:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$f(1) + f(2) + ... + f(2007) = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} +$$

$$+ ... + \sqrt{2006} - \sqrt{2005} + \sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \sqrt{2007} - 1$$

2. Să se determine x şi y din:

$$\sqrt{x^2+2x+17} + \sqrt{x^2+y^2+2xy-6x-6y+25} = 6$$

Rezolvare:

Relatia data este echivalenta cu :

$$\sqrt{(x+1)^2 + 4^2} + \sqrt{(x+y-3)^2 + 2^2} = 6 \Rightarrow$$

x+1=0

x+y-3=0 => x=-1; y=4

3. Sa se simplifice fractia:

E(x)= $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$

Rezolvare :

$$E(x)=\frac{x^4-x^3-x^3+x-3x^2+3x+4x-4}{x^3(x+2)-x(x+2)}=$$

$$\frac{x^3(x-1)-x(x^2-1)-3x(x-1)+4(x-1)}{x(x+2)(x^2-1)}$$

$$\frac{(x-1)(x^3-x(x+1)-3x+4)}{x(x+2)(x^2-1)}=\frac{(x-1)(x^3-x^2-4x+4)}{x(x+2)(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2(x-1)-4(x-1)}{x(x+2)(x+1)}=\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{x(x+2)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+1)}.$$

4. Fie f: A→R, f(x)=x-3;

a) Să se reprezinte graficul funcției f când A=R, A=[0;∞); A=(-3;2] .

b) Să se determine mulțimea A={n$\in$N | n$\leq$20, f(n) e pătrat perfect};

c) Arătați că fracția $\frac{f(n+2)}{f(n+1)}$ **e o fracție ireductibilă,** $\forall n \in N$ **;**

d) Să se rezolve în R inecuația : f(7-2x) $\leq$f(3x+2);

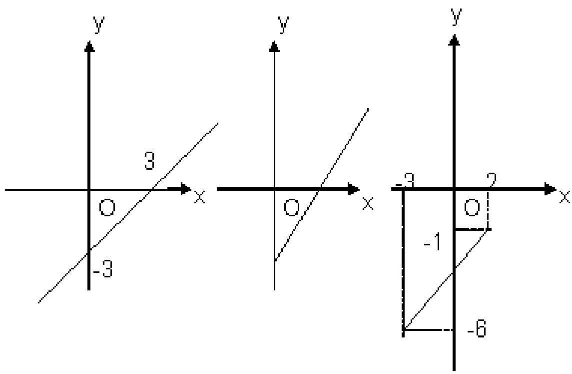
e) Să se determine cel mai mic număr natural x pentru care există n$\in$N astfel încât f(3x+4)=7^n;

f) Să se rezolve ecuația: $f\left(\frac{2x-4}{3}\right)+f(x+5)=1.$

g) Aflați numerele reale a şi b cu proprietatea 2a-3b=4 şi că punctual A(a,b) aparține graficului lui f;

h) Ştiind că A(m,n) este punctul de intersecție al graficului lui f cu graficul funcției g:R→R, să se determine m şi n.

i) Să se calculeze aria triunghiului determinat de axele de coordonate şi graficul lui f.
Rezolvare: a)



b) f(n) e pătrat perfect $\Leftrightarrow$ n-3 = k^2 $\Leftrightarrow$ $n\in\{3,4,7,12,19\}$.

c) Presupunem prin absurd că fracția $\dfrac{f(n+2)}{f(n+1)}=\dfrac{n-1}{n-2}$ este reductibilă adică există un divizor comun diferit de 1 $\Leftrightarrow \exists\ d=(n-1,n-2)$,

$d\neq 1 \quad \Rightarrow d\,|\,n-1, d\,|\,n-2 \Rightarrow d\,|\,n-1-n+2 \Rightarrow d\,|\,1 \Rightarrow d=1$.

Contradicție; rezultă că f este ireductibilă.

d) f(7-2x) $\leq$ f(3x+2) $\Leftrightarrow$ 7-2x-3 $\leq$ 3x+2-3 $\Leftrightarrow$ 5x ≥ 5 $\Rightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow x\in[1;+\infty)$.

e) f(3x+4)=7^n $\Leftrightarrow$ 3x+4-3=7^n $\Leftrightarrow$ 3x+1=7^n ; Pentru n=3 $\Rightarrow$ x=114 este cel mai mic număr natural pentru care este adevărată relația dată;

f)

$$f\left(\frac{2x-4}{3}\right)+f(x+5)=1.\Leftrightarrow$$

$$\frac{2x-4}{3}-3+x+5-3=1\Leftrightarrow 2x-4+3x=6\Rightarrow x=2;$$

g) A(a,b) $\in G_f$ $\Leftrightarrow$ f(a)=b $\Leftrightarrow$ a-3=b

$$\Rightarrow\begin{cases} a-b=3 & \big|\cdot(-2) \\ 2a-3b=4 \end{cases}\Rightarrow b=2; a=5;$$

h) $\begin{cases} y=x-3 \\ y=-2x+18 \end{cases}\Rightarrow x=7; y=4$; $\Rightarrow$ A(7,4).

i) Triunghiul format de axele de coordonate şi graficul lui f este dreptunghic $\Rightarrow$ A= $\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5$.

5. a) Să se determine funcția f:R→R, f(x)=ax+b, a,b$\in$R cu proprietatea f(x-2)=3x-2f(2)+3;

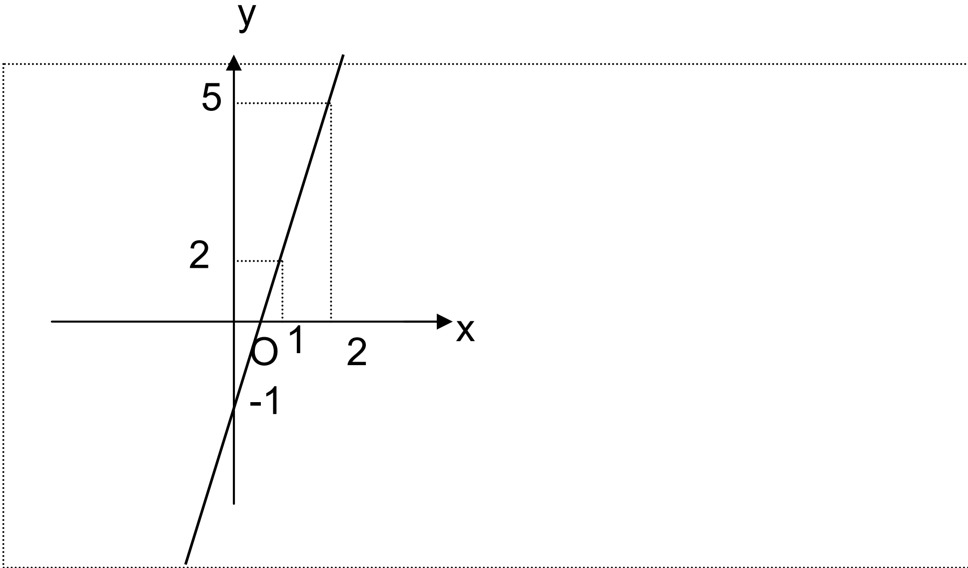
b) Să se reprezinte graficul lui f,

c) Să se rezolve ecuația: 3f(x-1) -2f(x)=x+7.

Rezolvare:

a) Din f(x-2)=3x-2f(2)+3 $\Rightarrow$ a(x-2)+b=3x-2(2a+b) +3$\Rightarrow$(a-3)x+2a+3b-3=0$\Rightarrow$a=3 şi b=-1; $\Rightarrow$f(x)=3x-1.

b)



c) 3[3(x-1)-1]-1-2(3x-1)=x+7$\Rightarrow$x=2.

6. Fie f:R→R , g:R→R, f(x)=$3\sqrt{2}x-\sqrt{3}$**,**

g(x)= $\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$ **.**

a) Să se calculeze: f(1)+g(1)+f(-2)+g(-2);

b) Să se rezolve inecuația: f(x) $\geq$g(x);

c) Să se determine m$\in$R astfel

încât f($m+\sqrt{2}$**)=g(**$m+2\sqrt{3}$**).**

Rezolvare:

a) f(1)+g(1)+f(-2)+g(-2)= $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

$$3\sqrt{2}x-\sqrt{3}\ge\sqrt{3}x+2\sqrt{2}\Leftrightarrow(3\sqrt{2}-\sqrt{3})x\ge 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

b)

$$\Rightarrow x\ge\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\Rightarrow x\ge\frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{18-3}$$

$$\Rightarrow x\ge\frac{3+\sqrt{6}}{3}\quad .$$

c)

f($m+\sqrt{2}$)=g($m+2\sqrt{3}$)$\Leftrightarrow$

$$3\sqrt{2}(m+\sqrt{2})-\sqrt{3}=\sqrt{3}(m+2\sqrt{3})+2\sqrt{2}\Rightarrow m=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$

$$m=\frac{3+\sqrt{6}}{3}.$$

7. Dacă f:A→{0; $\sqrt{3}$;4}, f(x)=3x-2 atunci A=………………

Rezolvare: f(a)=3a-2=0 $\Rightarrow$a=$\frac{2}{3}$; f(a)= $\sqrt{3}\Rightarrow$a=$\frac{\sqrt{3}+2}{3}$;

f(a)=4$\Rightarrow$a=2

A={$\frac{2}{3}$,$\frac{\sqrt{3}+2}{3}$,2}.

8. Se consideră funcția f:R→R, f(x)=6x-5.
a) Soluția ecuației f(x-2)=1 este egală cu..............-;
b) Soluțiile ecuației f(x)=x^2 sunt…………;
c) Suma f(1)+f(2)+f(3)+….f(50) este egală cu ……..;
d) Numărul a$\in$R pentru care f(f(a)) =37 este…………;
e) Soluțiile în Z ale ecuației f^2(x)-8f(x)+7=0 sunt ………;
f) Lungimea segmentului AB unde A(m,1) și B(2,n) sunt puncte ale graficului lui f este……….
Rezolvare:
a) f(x-2)=1 $\Leftrightarrow$ 6(x-2)-5=1 $\Rightarrow$x=3;

b) $f(x)=x^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1$ sau $x=5$;
c) $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(50)= 6(1+2+3+4+\ldots+50)-5\cdot 50= 3\cdot 50\cdot 51-5\cdot 50=50(153-5)=7400$.
d) $f(f(a)) =37 \Leftrightarrow 6(6a-5)-5=37 \Rightarrow a=2$.
e) $f^2(x)-8f(x)+7=0 \Leftrightarrow f(x)=1 \Rightarrow 6x-5=1 \Rightarrow x=1$ sau $f(x)=5 \Leftrightarrow 6x-5=7 \Rightarrow x=2$.
f) $A(m,1) \in G_f \Leftrightarrow f(m)=1 \Rightarrow 6m-5=1 \Rightarrow m=1$;
$B(2,n) \in G_f \Leftrightarrow f(2)=n \Rightarrow 12-5=n \Rightarrow n=7. \Rightarrow A(1,1), B(2,7)$
$\Rightarrow AB=\sqrt{(2-1)^2+(7-1)^2}=\sqrt{37}$

9. Fie $f:R\to R$, cu proprietatea $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$. Să se calculeze $f(2007)$.
Rezolvare:
Pentru $x=y=0 \Rightarrow f(0)=2f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$; Fie $y=0$ şi $x\neq 0 \Rightarrow f(0)=f(x)+f(0) \Rightarrow f(x)=0, \forall x\in R \Rightarrow f(2007)=0$.

10. Trei numere naturale consecutive a,b,c au proprietate $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=146$; Să se calculeze suma $a+b+c$.
Rezolvare:
Fie cele trei numere de forma a, a+1, a+2 Atunci $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=146 \Leftrightarrow a(a+1)+(a+1)(a+2)+(a+2)a=146 \Leftrightarrow 3a^2+6a+2=146 \Leftrightarrow 3a^2+6a-144=0 \Rightarrow a=6$.
Numerele sunt 6,7,8 iar suma lor este 21.

11. Să se determine numerele întregi a, astfel încât numărul $a^2+7a+10$ să fie pătratul unui alt număr întreg.
Rezolvare:
Fie k $\in Z, a.i, a^2+7a+10=k^2 \Leftrightarrow 4a^2+28a+40=4k^2 \Leftrightarrow$
$4a^2+28a+49-9=4k^2$
$\Leftrightarrow (2a+7)^2-(2k)^2=3^2 \Rightarrow (2a+7-2k)\cdot(2a+7+2k)=9 \Rightarrow$

Cum divizorii lui 9 sunt $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2a+7-2k = |1|9|-1|-9|3|-3 \\ 2a+7+2k = |9|1|-9|-1|3|-3 \end{cases}$$

$4a+14 = \quad 10,10,10,-10.-10.6.-6 \Rightarrow$

$a = -1,-1,-6,-6,-2,-5$

$\Rightarrow a \in \{-6,-5,-2,-1\}$.

12. Să se arate că numărul:

$$\frac{\sqrt{116+\sqrt{2007}} - \sqrt{116-\sqrt{2007}}}{\sqrt{2}}$$ **este rațional.**

Rezolvare:

Notăm numărul dat cu k . Prin ridicare la puterea a doua rezultă:

$116 - \sqrt{(116+\sqrt{2007})(116-\sqrt{2007}} = k^2 \Leftrightarrow$

$116 - \sqrt{116^2 - 2007} = k^2 \Leftrightarrow$

$116 - \sqrt{11449} = k^2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k \in \{-3,3\}$.

Aşadar, k este număr rațional.

GEOMETRIE

1. Să se arate că suma distanțelor de la un punct oarecare din interiorul unui tetraedru regulat la fețele sale este egală cu înălțimea tetraedrului.

Rezolvare :

Fie P un punct în interiorul tetraedrului ; => V_{VABC} = $V_{PVAB}+V_{PABC}+V_{PVBC}+V_{PVAC}$ = =1/3.S ($d_1+d_2+d_3+d_4$), unde :

- S – aria unei fețe ;
- d_i – distanța de la P la una din fețe.

Cum : $V_{VABC}=(S*V_0)/3$ =>

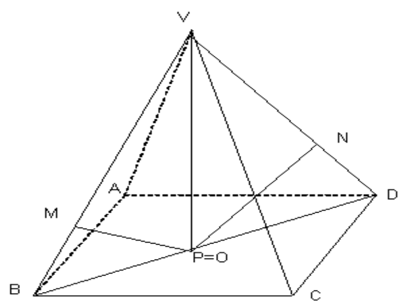
=> $V_0= d_1+d_2+d_3+d_4$

2. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată având muchia bazei de 4 şi muchia laterală de $2\sqrt{5}$. **a) Să se calculeze aria secțiunii axiale VBD.**

b) Să se afle sin($B\hat{V}D$ **).**

c) Să se determine poziția unui punct P, interior diagonalei BD , astfel încât ducând din acest punct perpendicularele PM respective PN pe două muchii laterale opuse , să se formeze un segment MN având lungimea cea mai mică şi să se calculeze aceasta.

Rezolvare:



a) $A_{BVD} = \dfrac{BD \cdot VO}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$

$A_{BVD} = \dfrac{VB \cdot VD \cdot \sin B\hat{V}D}{2} =$

b) $\dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sin B\hat{V}D}{2} \Rightarrow$

$\sin B\hat{V}D = \dfrac{8\sqrt{6}}{20} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

c) Singurul punct pentru care MN este este minim este atunci când punctul P coincide cu O, centrul bazei. Se ia P un puct arbitrar pe BD şi se duc perpendicularele PM pe VB şi PN pe VD. Atunci patrulaterul VMPN este inscriptibil deoarece suma unghiurilor M şi N este 180^0. Rezultă

$\sin B\hat{V}D = \sin M\hat{P}N$ (1) şi $P\hat{M}N \equiv P\hat{V}N$

$\Rightarrow \sin P\hat{M}N = \sin P\hat{V}N = \dfrac{PN}{VP}$ (2)

$$A_{PMN} = \frac{PM \cdot MN \cdot \sin P\hat{M}N}{2} = \frac{PM \cdot PN \cdot \sin M\hat{P}N}{2} \quad (3)$$

Din (1) şi (3) rezultă: $PM \cdot MN \cdot \dfrac{PN}{VP} = PM \cdot PN \cdot \sin B\hat{V}D$

$\Rightarrow MN = VP \cdot \sin B\hat{V}D$

MN este minimă când VP este minimă, aşadar VP coincide cu VO, înălţimea piramidei.

$\Rightarrow MN = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = \dfrac{12\sqrt{2}}{5}$.

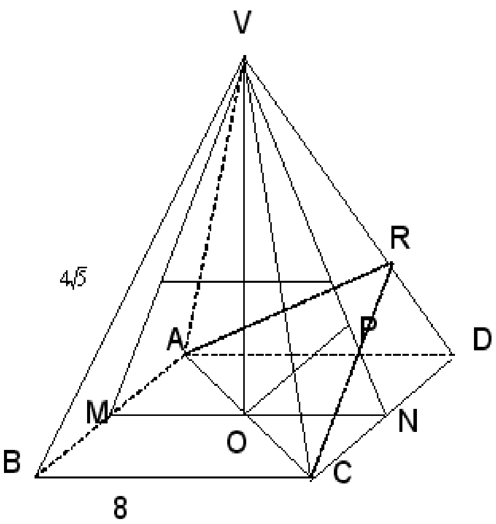
3. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată având muchia laterală VA=4$\sqrt{5}$ cm şi muchia bazei AB=8 cm. Se cere:
a) aria totală şi volumul piramidei;
b) măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;
c) măsura unghiului format de o faţă laterală cu planul bazei;
d) sinusul unghiului format de două feţe laterale opuse;
e) Distanţa de la centrul bazei la o faţă laterală;
f) lungimea segmentului determinat de centrele de greutate a două feţe laterale opuse;
g) sinusul unghiului determinat de două feţe alăturate;
Rezolvare:
a) Fie M mijlocul lui AB; Din Teorema lui Pitagora aplicată în ΔVAM obţinem VM=$\sqrt{VA^2 - AM^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8$ cm;

$\Rightarrow$ $A_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2} = \dfrac{4AB \cdot VM}{2} = 128cm^2$.

$A_t = A_l + A_b = 128 + 64 = 192$ cm^2

VO este înălţime în triunghiul echilateral VMN $\Rightarrow$ VO $= \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm;

V=$\dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{64 \cdot VO}{3} = \dfrac{64 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{256\sqrt{3}}{3} cm^3$;



b) VA formează cu (ABC) unghiul $V\hat{A}O$. Cum AO $= \dfrac{AC}{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$

$tg(V\hat{A}O) = \dfrac{VO}{AO} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

c) Cum ΔVMN este echilateral $\Rightarrow$ $m(V\hat{N}O) = 60^0$;

d) Unghiul format de planele VAB şi VDC este unghiul determinat de înălţimile celor două triunghiuri şi are măsura de 60^0, $\Rightarrow$ sin $60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

e) Vom calcula distanţa de la centrul bazei, O, la planul VDC.
Fie P $\in$ VN astfel încât OP $\perp$ VN (1)
Evident că CD $\perp$ (VON) $\Rightarrow$ OP $\perp$ CD (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \text{OP} \perp (\text{VDC})$

$\Rightarrow$ d(O,(VDC))=OP$= \dfrac{VO \cdot ON}{VN} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3}$ cm;

f) Unind centrele de greutate a două fețe opuse se formează două triunghiuri asemenea în care raportul de asemănare este egal cu $\dfrac{2}{3}$. Fie G_1G_2 segmentul determinat de centrele de greutate $\Rightarrow$

$\dfrac{G_1G_2}{MN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \dfrac{16}{3}$ cm.

g) Fie AR$\perp$VD şi CR$\perp$VD. Cum triunghiurile VAD şi VDC sunt isoscele $\Rightarrow$ AR şi CR sunt congruente $\Rightarrow$ triunghiul ARC este isoscel;

Cum VD$\perp$(ARC) şi OR$\subset$(ARC) $\Rightarrow$ OR$\perp$VD$\Rightarrow$OR este înălțime în triunghiul ARC;

În ΔVOD dreptunghic, OR$= \dfrac{VO \cdot OD}{VD} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{30}}{5}$

$\Rightarrow A_{ARC} = \dfrac{AC \cdot OR}{2} = \dfrac{8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{30}}{2 \cdot 5} = \dfrac{32\sqrt{15}}{5}$; Pe de altă parte,

$A_{ARC} = \dfrac{AR \cdot RC \cdot \sin \hat{R}}{2}$ (*)

Mai rămâne să aflăm lungimea segmentelor AR şi RC care se află din triunghiul isoscel VDC, scriind aria sa în două moduri:

$$A_{VDC} = \frac{CD \cdot VN}{2} = \frac{VD \cdot CR}{2} \Rightarrow \frac{8 \cdot 8}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot CR}{2} \Rightarrow CR = \frac{16\sqrt{5}}{5} = AR;$$

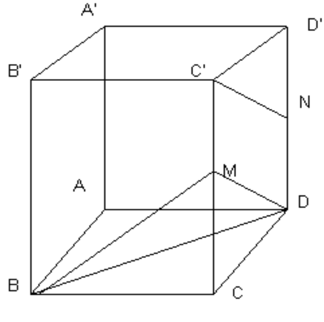
Din relația (*) $\dfrac{32\sqrt{15}}{5} = \dfrac{(16\sqrt{5})^2 \sin \hat{R}}{5^2 \cdot 2} \Rightarrow \sin \hat{R} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

Observații:

- O altă cerință a problemei putea fi determinarea măsurii unghiului dintre dreptele AC şi VD care se determină uşor din punctual g) unde s-a arătat că $VD \perp (ARC)$ $\Rightarrow VD \perp AC$, rezultând că dreptele fac un unghi de 90^0 între ele;
- Deesemenea se poate cere determinarea unui punct Q şi a raportului $\frac{VQ}{QD}$, astfel încât aria triunghiului AQC să fie minimă, aceasta având loc atunci când Q coincide cu R, deoarece atunci distanța OQ =OR este minimă; VQ=VR se află din triunghiul dreptunghic VOR.

4. În prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D', cu muchia bazei de 6 cm, se ia M respectiv N mijloacele muchiilor CC' respectiv DD'. Ştiind că dreptele BM şi C'N formează între ele un unghi de 60^0, să se afle muchia laterală.
Rezolvare:

C'N|| MD $\Rightarrow$ triunghiul MBD este isoscel cu măsura unghiului M de 60^0, rezultă că este chiar echilateral.



BD= $6\sqrt{2}$ =MB=MD, Din triunghiul dreptunghic BCM$\Rightarrow$MC=6.

Aşadar, lungimea muchiei laterale este CC'=12.

5. În cubul ABCDA'B'C'D', cu muchia de 4 cm se cere distanța de la punctul A la planul A'BC.

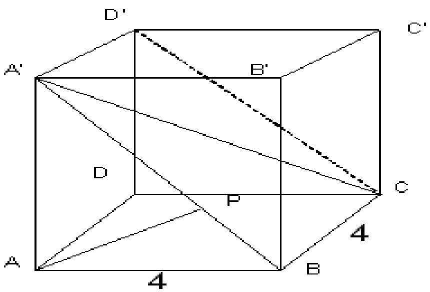
Rezolvare:

Se duce AP perpendicular pe A'B.

Evident din $BC \perp AB, BC \perp A'B \Rightarrow$

$(A'AB) \perp (A'BC) \Rightarrow AP \perp (A'BC)$

d(A, (A'BC))=AP=$\dfrac{AA' \cdot AB}{A'B} = 2\sqrt{2}$.



6. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile direct proporționale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$,3 şi volumul de $648\sqrt{2}$. Să se afle lungimea diagonalelor paralelipipedului.

Rezolvare:

Fie a,b,c dimensiunile paralelipipedului, atunci:

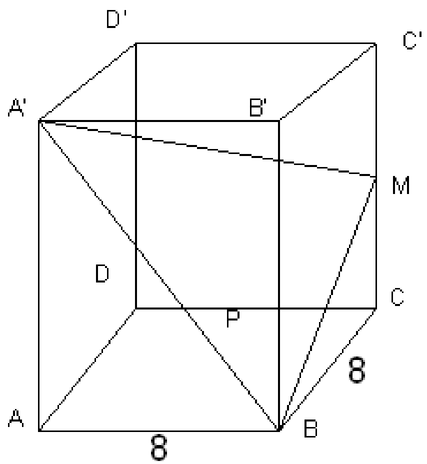
$\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{b}{\sqrt{8}} = \dfrac{c}{3} = k \Rightarrow$ a=$\sqrt{2}$ k , b=$\sqrt{8}$ k, c=3k.

V=abc; $648\sqrt{2}$ =12k^3 $\Rightarrow$ k=$3\sqrt{2}$ $\Rightarrow$a=6, b=12, c=$9\sqrt{2}$.

Atunci lungimea diagonalei este:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{38}$.

7. În cubul ABCDA'B'C'D' cu muchi de 8 cm se ia M mijlocul lui CC'. Să se determine cosinusul unghiului format de planele A'BM şi ABC.
Rezolvare:



Se va aplica formula ariei proiecției unui triunghi pe un plan:
S'=S.cosα (*),unde S' este aria proiecției, S este aria triunghiului care se proiectează.
$A_{ABC}=A_{A'BM}\cos\alpha$
$A'B=8\sqrt{2}$,
$A_{ABC}=32$,
Se duce o paralelă prim M la BC care este perpendiculară pe BB' în punctul N(N este mijlocul lui BB'), iar din N se duce o perpendiculară pe A'B în P. Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că MP este perpendiculară pe A'B. Aşadar triunghiul BPN este asemenea cu BB'A'.

Rezultă PN=$2\sqrt{2}$. Cum MN este 8, atunci cu T lui Pitagora obținem: $MP^2=MN^2+PN^2 \Rightarrow$

MP=$6\sqrt{2}$. $A_{A'BM}=\frac{A'B\cdot MP}{2}=\frac{8\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2}=48$ Din relația (*) rezultă

$\cos\alpha=\frac{32}{48}=\frac{2}{3}$.

8. În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' se cunosc muchiile bazei AB=$2\sqrt{5}$ si BC=$4\sqrt{5}$, iar aria sa totală este 70. Se cere tangenta unghiului făcut de AO' cu planul BDB' unde O' este centrul bazei de sus.

Rezolvare:

A_t=2(ab+ac+bc)

Din $A_t=70 \Rightarrow$ înălțimea paralelipipedului este $\sqrt{5}$.

Ducem AE$\perp$BD, E$\in$BD, AE înălțime în ΔABD, AE=4, O-centrul bazei ABCD$\Rightarrow$ ΔAEO' dreptunghic în E

$\Rightarrow$tg(O'A,(BDB'))=tg($A\hat{O'}E$) $\Rightarrow \frac{AE}{EO'}=\frac{4}{3}$

PROBLEME PROPUSE

Operații cu numere întregi

1) $(5-23)-(-11+13+2-14)$;

2) $36:(-2)+4\cdot(-9)-45:(-15)+3\cdot(-10):(-15)$;

3) $5\cdot(-6)-4\cdot(-2)+6\cdot(+7)-3\cdot(-15)$;

4) $5^3\cdot 5^8:(-25)^5-\left(2^5\cdot 3^5\right):(-6)^5+(16)^3:(-8)^3$;

5) $24:\{[30+(-6)\cdot(-5)]\div 60+2\}+15:[(-3)\cdot(-1)]$;

6) $\left[(-4)^2\cdot(-8)^4\cdot 16^4\right]:\left(8^5\right)^2$;

7) $\left(5^{30}\cdot 5^{20}\right)^4-(-5)^{60}\cdot(-5)^{40}\cdot(-5)^{30}\cdot(-5)^{70}$;

8) $\left(11^2-1\right)\left(16^2-1\right):(2\cdot 3\cdot 5)^2$;

9) $(-2)^{2007}:2^{2005}-10\cdot\left\{-2-2\cdot\left[(-4)^5:4^4-2\right]\right\}$;

10) $\left\{2^5\cdot\left[(3\cdot 2)^2:2^2+2^6\right]\right\}\div\left(2^2\cdot 5\right)^2$;

11) $1+2+3+4+\ldots+2006+2007$;

12) $2+4+6+\ldots+2004+2006$;

13) $1+3+5+7+\ldots+2005+2007$;

14) $2+2^2+2^3+\ldots+2^{2006}+2^{2007}$;

15) $\left(2^{2007}-2^{2006}-2^{2005}\right):(-8)^{668}$;

16) $\left(2^{333}+\left|2^{333}-3^{222}\right|\right):(-9)^{111}$;

17) $2^{2007}-\left(2^{2006}+2^{2005}+\ldots+2+1\right)$;

18) $\left(9^3-3^9\right)\cdot\left(8^4-4^8\right)\cdot\left(2^4-4^2\right)$;

19) $(-3)\cdot\{-5+3\cdot[(-6)\cdot(+2)+(-5)\cdot(-6)+(-2)]-(-3)\}$;

20) $-12+12\cdot\{13-13\cdot[-5-(-2)\cdot(-3)]-6\}$;

$21)\left[(-3)^{11}\right]^{12}:\left[\left(3^{12}\right)^{10}\cdot(-3)^{9}\right]-(-4)^{12}\div(-8)^{7}:(-2)^{2};$

$22)(-2)^{100}:\left[16^{25}:2^{4}:(-10+8)^{26}\cdot 2^{8}\cdot(-2)^{62}\right];$

$23)\{(-18):(-6)\cdot(-2)-(-3)\cdot[20+(-4)\cdot(-5)]\}-(-57);$

$24)\left[(-2)^{46}-(-2)^{45}+(-2)^{44}\right]:\left[7\cdot(-2)^{44}\right];$

$25)(-1)^{0}\cdot 1+(-1)^{1}\cdot 2+(-1)^{2}\cdot 3+(-1)^{3}\cdot 4+...+(-1)^{2005}\cdot 2006+$
$+(-1)^{2006}\cdot 2007;$

$26)\left[(-2)^{-2}-\left(-2^{-2}\right)-\left(-2^{-1}\right)\right]:\left[2^{-2}+(-2)^{-2}+2^{-1}\right];$

$27)10^{10}-11\cdot 10^{9}+11\cdot 10^{8}-11\cdot 10^{7}+...+11\cdot 10^{2}-11\cdot 10+11-1;$

$28)2007^{2}-2007^{2}\div\left(2^{2007}-2^{2006}-2^{2005}-...-2^{1}-2^{0}\right);$

$29)5^{2008}-5^{2007}-5^{2006}-19\cdot 25^{1003};$

30)Să se compare numerele:

a)3^6 cu 3^2; b)7^{100} cu 7^{200}; c)10^{23} cu 5^{23};
d)3^{30} cu 2^{45}; e)2^{48} cu 3^{32}; f)2^{51} cu 3^{34};
g)2^{107} cu 5^{46}-5^{45}; h)$(-3)^{75}$ cu $(-2)^{125}$; i)25^{100} cu 125^{49};
j)$(-2)^{40}$ cu $(-16)^{10}$; k)$(5^4)^5$ cu 5^{2^2}; l)$(-2)^{71}$ cu $(-3)^{71}$.

Mulțimea numerelor raționale

1) $0,(7):\frac{1}{49}+2,(3)+\left(\frac{2007}{2006}\right)^{0};$

2) $\left[\left(1,(3)-\frac{1}{3}\right)^{2}\div(0,5)^{2}\right]\Big):3+0,(6):\frac{1}{2};$

3) $(9:0,15+1:0,2):0,01;$

4) $0,0(6)+\frac{15}{64}\cdot 1,28-2[0,125-0,08(3)];$

5) $\frac{1}{100}\div(0,01)^{2}-\left(\frac{7}{10}\right)^{3}:(0,7)^{2}\cdot\frac{10}{7}+2;$

6) $[0,4\cdot 3,(3)-1]:0,(5)+0,1;$

7) $\dfrac{\left(3\frac{1}{9}:3\frac{4}{9}+\frac{3}{31}\right):\frac{1}{4}-3\cdot\frac{2}{7}}{\left(6\frac{3}{5}:1\frac{3}{8}-3\frac{4}{5}\right):\frac{1}{2}};$

8) $[1,(6)+0,25]:1,91(6)$

9) $\left[\left(2\frac{3}{4}\right)^{5}\cdot\left(\frac{22}{8}\right)^{3}\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^{7}\right]:\left[2,75^{4}\cdot\left(1+1\frac{3}{4}\right)^{10}\right];$

10) $\frac{2}{3}+\frac{7}{5}+\frac{4}{15};$

11) $\frac{3}{7}+\left(-\frac{13}{14}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right);$

12) $23,56+5-63,64-0,56+0,04;$

13) $\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}-1,(6)+\frac{14}{4}$;

14) $2{,}5-6{,}7+\left[-2,(3)+\frac{2}{15}+3{,}2\right]$;

15) $-\left|2-\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{7}{12}+\frac{3}{4}\right|+\frac{2}{6}$;

16) $\left(-3\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-8\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{15}{18}$;

17) $\left(-\frac{5}{36}\right)\cdot\left(-\frac{18}{19}\right)\cdot\left(-\frac{38}{45}\right)$;

18) $(-0{,}2)\cdot(-1{,}4)\cdot\left(-\frac{25}{49}\right)$;

19) $\dfrac{\left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{17}{36}}{1\frac{19}{81}\cdot\left(-\frac{51}{40}\right)}$;

20) $\left(-\frac{3}{16}\right):\left(-\frac{5}{8}\right):\left(-\frac{6}{4}\right)$;

$$21)\ (-4{,}5):(-0{,}7):\left(-\frac{9}{14}\right);$$

$$22)\ \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{5}\right]^{6}:\left(\frac{3}{4}\right)^{26};$$

$$23)\ \left(-\frac{1}{49}\right)^{14}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{15};$$

$$24)\ \left(-\frac{5}{7}\right)^{83}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)^{14}:\left(-\frac{5}{7}\right)^{95};$$

$$25)\ \left(\frac{16}{81}\right)^{3}:\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{2}\right];$$

$$26)\ \left[\left(\frac{9}{25}\right)^{19}:\left(-\frac{3}{5}\right)^{20}\cdot\left(\frac{27}{125}\right)^{12}\right]^{5}:\left(-\frac{27}{125}\right)^{89};$$

$$27)\ \left[\left(\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)\right]-\left(-\frac{7}{12}\right);$$

$$28)\ \frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}}{\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{25}{26}\right)};$$

$$29)\ \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left\{\left[2\frac{1}{2}-\left(-\frac{15}{11}+\frac{7}{22}\right)\right]\cdot\left(-\frac{11}{13}\right)-\left[-3{,}2-(4{,}8-5)\right]\right\}+0{,}2.$$

RAPOARTE ŞI PROPORȚII

1. Dacă $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$ atunci $\frac{3x-y}{x+y}=\ldots$

2. Numerele a,b,c sunt invers proporționale cu numerele 0,(3);1/5 respectiv 5^2. Atunci $\frac{a+b}{b-c}=\ldots$

3. Suma a trei numere este 680. Dacă se măreşte primul cu 50% din el, al doilea se micşorează cu 25% din el,iar al treilea se micşorează cu 5, numerele devin egale.Cât la sută reprezintă primul număr din al treilea?

4. Dacă $\frac{a-2}{3-b}=\frac{b+3}{2+a}$, atunci suma a^2+b^2 este egala cu…

5. Arătați că $2^{12}+2^{10}+2^0$ este pătrat perfect.

6. Fie $a,b,c,d \in N, b>c$. Ştiind că $(a;b)\cap(c;d)=(2;4)$ şi $(a;b)\cup(c;d)=(0,6)$
atunci media aritmetică a numerelor a,b,c,d este…

7. Dacă $\frac{x}{y}=20\%$ atunci $\frac{y-x}{3x+y}=$........

8. Dacă $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}$ şi $\frac{b}{10}=\frac{c}{7}$ şi $a^2+b^2+c^2=16500$ atunci media aritmetică a numerelor a,b,c este…

9. Dacă A={$x\in N^*$ | $2^{2x+3}<612$} atunci probabilitatea ca un număr din A să fie par este…

10. Dacă $\frac{x}{y}=60\%$ atunci $\frac{5x+7y}{9x-5y}=\ldots$

11. Numerele pozitive x,y,z sunt invers proporționale cu $\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}$.Cât la sută reprezintă numărul cel mai mic din numărul cel mai mare?

12 . Dacă $\frac{x+y}{y-x}=5$ atunci $\frac{x}{y}=\ldots$

13. $\frac{2^{100}-2^{99}}{x}=\frac{2^{99}-2^{98}}{3}$ => x= …

14. Dacă 30% din lungimea unui drum reprezintă 12 km,atunci drumul are o lungime de…km.

15. Dacă $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}$ =>y reprezintă …%din x

x reprezintă …% din y

Dacă x=85 =>y=…

16. Dacă $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}$ si $\frac{b}{10}=\frac{c}{7}$, a+b+c=210,atunci a=… b=… c=…

17. Dacă $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}$ si $\frac{b}{10}=\frac{c}{7}$ si $a^2+b^2+c^2=16500$,atunci media aritmetică a numerelor a,b,c este…

18. Numerele a,b,c sunt invers proporționale cu numerele 0,2; 0,(3); $\frac{1}{2}$. Ştiind că suma numerelor e 160 să se afle:

a) a,b,c;

b) cât la sută reprezintă a din c.

19. Suma a doua numere este 120. Ştiind ca unul din ele este cu 25% din celălalt, să se afle:

a)cele doua numere;

b)raportul dintre cel mai mic si cel mai mare .

20. $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$ => $\frac{3x+4y}{y}=\ldots$; $\frac{x^2}{y^2}=\ldots$

21. $\frac{x}{y}=\frac{0,3}{0,5}$=> $\frac{x+y}{y}=\ldots$; $\frac{x^2-y^2}{y^2}=...$

22. $\frac{x}{y}=5\%$, atunci $\frac{x}{5x+y}=\ldots$

23. Dacă x,y,z sunt direct proporționale cu 0,5; 0,(3); 0,(6) şi 2x-3y+4z=12, atunci x-y+z=…

23. 30% din $\frac{2-5x}{3+2x}=4$ => x=…

ISTORICUL NOȚIUNILOR MATEMATICE

- **Sec. 18 î.e.n**. mesopotamienii creează primele tabele de înmulțire;
- **sec. 6 î.e.n.** este cunoscută asemănarea triunghiurilor de către **Thales**;
- **Sec. 5 î.e.n.** pitagorienii introduc noțiunile de număr prim, număr compus, numere relativ prime, numere prime perfecte;
- **Sec. 4 î.e.n.**

  Aristotel (384-322 î.e.n) filozof grec a introdus noțiunile de perimetru, teoremă, silogism.
- **Sec. 3 î.e.n.**
  - Matematicianul grec **Euclid**(330-275 î.e.n) cel care a întemeiat celebra şcoală din Alexandria (în 323 î.e.n) a introdus noțiunile de semidreaptă, tangentă la o curbă, puterea unui punct față de un cerc sau sferă, sau denumirile de paralelogram, poliedru, prismă, tetraedru. A enunțat teorema catetei şi a înălțimii pentru un triunghi dreptunghic şi a demonstrat concurența mediatoarelor unui triunghi;
  - în prima carte din „Elementele” lui Euclid este cunoscută teorema împărțirii cu rest şi „algoritmul lui Euclid” pentru aflarea c.m.m.d.c. a două numere întregi
  - **Apolonius din Perga**(262-200 î.e.n), unul din cei mai mari geometri ai antichității introduce pentru prima dată denumirile pentru conice, de elipsă, hiperbolă, parabolă şi noțiunile de focare, normale şi defineşte omotetia şi

inversiunea şi dă o aproximare exactă a lui π cu patru zecimale.

- este dată aria triunghiului în funcţie de laturi sau în funcţie de raza cercului înscris şi semiperimetru;
- **Eratostene din Cyrene**(275-195 î.e.n) introduce metoda de determinare a tuturor numerelor prime mai mici decât un număr dat, metodă cunoscută sub numele de „Ciurul lui Eratostene”

- **85-168** matematicianul grec **Ptolemeu** prezintă în cartea sa „Almagest”, pe lângă vaste cunoştinţe de astronomie şi trigonometrie şi diviziunea cercului în 360 de părţi congruente şi exprimarea acestora în fracţii sexagesimale.
- **Sec. 3** s-a dat formularea teoremei celor trei perpendiculare de către **Pappos**; acesta a mai dat şi definiţia conicelor precum şi teorema despre volumul corpurilor de rotaţie
- **Sec. 7**
  - sunt cunoscute regulile de trei directă şi inversă de către **Bragmagupta**, matematician indian;
  - **Arhimede**(287-212 î.e.n) precursor al calculului integral, a determinat aria şi volumul elipsoidului de rotaţie şi ale hiperboloidului de rotaţie cu pânze.
- **1202- Leonardo Fibonacci** (1170-1240) matematician italian introduce notaţia pentru fracţia ordinară;
- **1228-** Fibonacci introduce denumirea pentru numărul zero, precum şi sistemul de numeraţie zecimal. Tot prin opera sa „Liber abaci” sunt introduse pentru dată în Europa numerele negative, fiind interpretate ca datorii;
- **1150-** este descrisă extragerea rădăcinii pătrate şi a celei cubice în cartea „ Lilavati” a matematicianului indian **Bhaskara**(1114-1185), tot el prezintă şi operaţiile de înmulţire şi împărţire cu numere negative;

- **1515-** rezolvarea ecuațiilor de gradul al treilea cu o necunoscută de către Scipio del Fero, iar mai târziu de **Niccolo Tartaglia** în 1530, şi pe acelea de gradul al patrulea de Ludovico Ferrari în 1545. Acestea au fost făcute cunoscute abia în 1545 de către Girolamo Cardano(1502-1576) în lucrările sale, deşi promisese autorilor lor să nu le divulge;
- **1591-**matematicianul francez **Francois Viete**(1540-1603) introduce formulele cunoscute sub numele de relațiile lui Viete;
- **1614-** inventarea logaritmilor naturali de către **John Neper**(1550-1617);
- **1637-** este introdusă noțiunea de variabilă de către **Rene Descartes**(1596-1650), cel care a introdus literele alfabetului latin pentru notații şi a folosit coordonatele carteziene (definite după numele său), reducând problemele de geometrie la probleme de algebră;
- **1640-** este introdusă denumirea pentru cicloidă de către **Galileo Galilei** (1564-1642);
- **1654-** începutul creării teoriei probabilităților datorat corespondenței dintre **Pierre Fermat**(1601-1665) şi **Blaise Pascal**(1623-1662) şi dezvoltarea combinatoricii odată cu apariția lucrării lui Pascal, „Combinaţiones";
- **1656-** matematicianul englez **John Wallis**(1616-1703) introduce simbolul ∞ cu notațiile $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$ şi a denumirilor de interpolare respectiv mantisă
- **1670-** este determinat semnul sinusului şi desenată sinusoida respectiv secantoida de către John Wallis);
- **1678-** este dată teorema lui Ceva de către **Ceva Giovani**(1648-1734);
- **1679-** în „Varia opera mathematica" apărută postum, a lui Pierre Fermat(1601-1665), a fost dată „Marea

teoremă a lui Fermat”, reguli de integrare, definiția derivatei.

- **1692**- este scris primul manual de calcul integral de către matematicianul elvețian **Jean Bernoulli**(1667-1748)” Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque”, tipărit abia în 1742 şi de asemenea a mai scris un manual de calcul diferențial, descoperit abia în 1920.

  „Regula lui l’Hospital” este dată de către Jean Bernoulli lui Guillaume de l’Hospital pe care acesta o publică în 1696;
- **1690-** este propusă denumirea de integrală de către **Jacques Bernoulli**(1654-1705)
- **1692-** sunt descoperite proprietățile spiralei logaritmice (Jacques Bernoulli)
- **1694-** este descoperită curba numită lemniscată, caracterizată de inegalitatea

  $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Jacques Bernoulli);
- **1696-1697-** introducerea calculului variațional, punerea problemei izoperimetrelor de către Jean Bernoulli.
- **1705-** este dată „Legea numerelor mari” de către Jacques Bernoulli;
- **1711-** realizarea dezvoltării în serie a funcțiilor e^x, sinx, cosx, arcsinx, de către matematicianul englez **Isaac Newton**(1642-1727) cel care a pus bazele calculului diferențial şi integral concomitent cu **Gottfried Leibniz**(1646-1716);
- **1729-** este demonstrată existența rădăcinilor complexe în număr par a unei ecuații algebrice cu coeficienți reali de către **Mac Laurin Colin**(1698-1746;
- **1731-** utilizarea sistemului de axe perpendiculare pentru a determina poziția unui obiect în funcție de cele trei coordonate;

- **1733-** crearea trigonometriei sferoidale de către **Alexis Clairaut**(1713-1765);
- **1735-** Matematicianul elvețian Leonhard Euler(1707-1783) introduce şi calculează constanta e= $\lim(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n)$ =0,577215..., n→∞;
- **1739-** introducerea conceptului de integrală curbilinie de către Alexis Clairaut;
- **1746-** relația lui Stewart este demonstrată de **Mathew Stewart** după ce în prealabil ea îi fusese comunicată de către Robert Simson în 1735;
- **1747**
  - este enunțată problema celor trei corpuri de către Clairaut;
  - introducerea metodei multiplicatorilor nedeterminați în studiul sistemelor de ecuații diferențiale de către **Jean Le Rond D'Alembert**(1717-1783);
- **1750- Gabriel Cramer** dă o regulă de rezolvare a sistemelor cunoscută sub denumirea de metoda lui Cramer;
- **1755-** sunt puse bazele calculului variațional de către Lagrange(1736-1813) concomitent cu Euler,
- **1765-** începutul creării geometriei descriptive de către **Gaspard Monge**(1746-1818);
- **1766-** crearea mecanicii analitice de către **Joseph Lagrange**(1736-1813) cu enunțarea principiului vitezelor virtuale şi a ecuațiilor Lagrange;
- **1767-** demonstrarea iraționalității lui π de către **Heinrich Lambert**(1728-1777);
- **1768-** demonstrarea existența factorului integrant la ecuațiile diferențiale de ordinul întâi de către **D'Alembert;**

- **1771-** a fost dată ecuația planului normal şi formula distanței dintre două puncte din spațiu de către matematicianul francez G. Monge;
- **1775-** introducerea noțiunilor de soluție generală şi soluție particulară în teoria ecuațiilor diferențiale de către **Leonhard Euler**; acesta a introdus şi funcția $\varphi(n)$ - indicatorul lui Euler, precum şi notațiile e, i, f(x)şi a creat teoria fracțiilor continue;
- **1780-** au fost introduse liniile de curbură ale suprafețelor(G. Monge);
  - sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez **Henri Poincare**(1854-1912);
- **1785-** a fost dată ecuația planului tangent(G. Monge);
- **1796-** este dată „Teorema lui Fourier" de determinare a numărului rădăcinilor reale cuprinse într-un interval, de către Joseph Fourier(1768-183);
- **1797-** este dată formula creşterilor finite, cunoscută sub denumirea de „teorema lui Lagrange";
- **1798-** au fost considerate cosinusurile directoare ale unei drepte(G. Monge);
  este introdus simbolul [.], pentru partea întreagă de către **Adrien Marie Legendre**(1752-1833)
  (1752-1833);
- **1807-**, 1822 sunt date seriile Fourier care au contribuit la crearea teoriei analitice a căldurii.
- **1812-** este introdusă seria hipergeometrică de către Carl Friedrich Gauss(1777-1855) matematician german, cel care a demonstrat teorema fundamentală a algebrei;
- **1816-1835- Augustin Cauchy**(1789-1857), fondatorul analizei matematice moderne, a enunțat criteriul de convergență al seriilor, criteriu care-i poartă numele, a dat primele teoreme de existență din teoria ecuațiilor diferențiale şi al ecuațiilor cu derivate parțiale, a

introdus noțiunile de afix, modul al unui număr complex, numere conjugate, transpoziție;

- **1820-** introducerea noțiunii de raport anarmonic de către **Chasles Michel**(1793-1880), fondatorul geometriei proiective alături de matematicianul francez Jean Poncelet;
- **1822**
  - introducerea funcțiilor Bessel de către **Friedrich Bessel**;
  - este introdusă notația pentru integrala definită $\int_a^b f(x)dx$, de către **Fourier.**;
  - este propusă denumirea de reprezentare conformă de către Gauss;
  - cercul lui Euler sau cercul celor nouă puncte este considerat pentru prima dată de către Charles Brianchon , Jean Poncelet şi Karl Feuerbach, atribuinduse din greşeală numele lui Euler acestei teoreme;
- **1823-1831-** începutul creării primei geometrii neeuclidiene de către **Janoş Bolyai**(1802-1860) concomitent şi independent de cea a lui Lobacevski.
- **1824-**
  - este dată denumirea de geometrie neeuclidiană de către Gauss;
  - **Niels Abel**(1802-1829) demonstrează imposibilitatea rezolvării cu ajutorul radicalilor, a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decât patru;
- **1825-** Abel introduce integralele ce-i poartă numele;
- **1827-** este creată teoria funcțiilor eliptice de către Abel;
- **1828**
  - sunt introduse formele fundamentale ale suprafețelor şi curburii totală a unei suprafețe(curbura Gauss) de către Gauss;

- demonstrarea teoremei lui Fermat pentru n=5 de către matematicianul german **Dirichlet** (1805-1859);
- **1830-** este propusă denumirea de grup cu înțelesul actual de către matematicianul francez Evariste Galois(1811-1832);
- **1831-** definitivarea calculului cu numere complexe de către Gauss ;
- **1834-** introducerea noțiunii de factor de discontinuitate, referitor la integralele
- **1837-** introducerea notațiilor pentru limite laterale de către Dirichlet şi a funcției care îi poartă numele, funcția Dirichlet;

  W. Hamilton introduce termenul de asociativitate a unei legi de compoziție;
- **1839-** introducerea noțiunii de integrale multiple(Dirichlet);
- **1840-** este dată o formă a eliminantului a două ecuații algebrice de către **James Sylvester**(1814-1897), matematician englez;
- **1841-** descoperirea invarianților de către matematicianul irlandez George Bole (1815-1864);

  introducerea noțiunilor de margine inferioară şi superioară ale unei funcții, de convergență uniformă de către **Weierstrass(**1815-1897);
- **1843-** descoperirea cuaternionilor de către **William Hamilton** (1805-1865);
- **1845-** „Teorema limită centrală" este dată de matematicianul rus **Pafnuti Cebâşev**;
- **1846-** Legea numerelor mari – **Cebâşev**;
  - introducerea variabilei complexe în teoria numerelor imaginare de către D'Alembert;
- **1847**
  - este introdus calculul logic de **George Boole**, creatorul algebrei booleene;

- este introdusă noțiunea de ideal de către **Ernest Kummel**(1810-1893);

- **1851-** sunt introduse noțiunile de rang şi signatură a unei forme pătratice şi sunt propuse noțiunile de matrice şi jacobian(J. Sylvester);
  introducerea sufrafețelor riemann de către matematicianul german Bernhard Riemann(1826-1866), lui datorându-se studiul integralei definite.
- **1852-** introducerea segmentelor orientate $\overrightarrow{AB}$ de către Chasles Michael(1793-188) care a formulat şi proprietățile axei radicale a două cercuri precum şi a conicelor şi cuadricelor.
- **1853-** Kronecker(1823-1891) introduce notația $\left|a_{ij}\right| = \det(a_{ij})$;
- **1854-** este introdusă noțiunea de oscilație într-un punct de către Riemann care creează o nouă geometrie neeuclidiană, numită geometria sferică;
- **1858-** crearea calculului matriceal de către **Arthur Cayley**(1821-1895) matematician englez ;
- **1871 Dedekind** introduce noțiunile de corp şi modul ceeace în limbajul actual exprimă noțiunile de subcorp şi Z-submodul ale lui C. Tot el introduce mulțimea întregilor unui corp de numere algebrice, definind şi idealele acestei mulțimi şi demonstrează teorema fundamentală de descompunere unică a oricărui ideal în produs de ideale prime;
- **1872-**

- introducerea structurilor de subinel şi modul de către **Dirichlet**;
- introducerea numerelor raționale prin tăieturi de către **Dedekind**;

- **1873- Charles Hermite**(1822-1901) demonstrează transcendența numărului e= $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2,718281....$
- **1874-** este dată denumirea de subgrup de către **Sophus Lie**(1842-1899);
- **1874-1897-** crearea teoriei mulțimilor de către **Georg Cantor**(1845-1918). El a introdus noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, mulțime densă, mulțime bine ordonată, mulțime numărabilă, punct de acumulare, punct izolat, produs cartezian, reuniune, intersecție.
- **1878-** rezolvarea problemei celor patru culori pentru colorarea hărților de către Cayley;
- **1880-**sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez Henri Poincare(1854-1912);
- **1882- Ferdinand Lindemann**(1852-1939) a demonstrat trascendența numărului π=3,141592......; (un număr se numeşte transcedent dacă nu este soluția niciunei ecuații algebrice cu coeficienți raționali); tot el demonstrează imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla şi compasul;

  1893- H. Weber, asociază conceptului de corp, sensul de astăzi, ca o structură cu o lege de grup aditiv şi o înmulțire asociativă, distributivă şi în care orice element e inversabil;
- **1897-** introducerea denumirii de inel de către **Hilbert(**1862-1943);
- **1899** -axiomatizarea geometriei de către **David Hilbert**;
- **1900-** introducerea axiomatică a numerelor întregi(D.Hilbert);
- **1905-** este introdusă noțiunea de distanță între două mulțimi închise de către matematicianul român Dimitrie Pompeiu(1873-1954);

- **1910-** este introdusă denumirea de funcțională de către **Jacques Hadamard** (1865-1963), unul din fondatorii analizei funcționale;
- **1912 -**este descoperită noțiunea de derivată areolară(Pompeiu)
- **1927-**s-a stabilit formula Onicescu referitoare la geodezice dată de **Octav Onicescu**(1892-1983);
- **1928 -**este introdusă funcția areolar-conjugată de către matematicianul român **Miron Nicolescu**(1903-1975);
- **1933** -introducerea funcțiilor convexe de ordin superior de către Tiberiu **Popoviciu**(1906-1975);
- **1936 -**Matematicianul român **Gheorghe Mihoc**(1906-1981) dă o metodă cunoscută sub numele de metoda Schulz-Mihoc, de determinare a legilor limită ale unui lanț Markov;
- **1941 -**teorema lui Moisil referitoare la geodezicele unui spațiu riemannian este introdusă de **Grigore Moisil**(1906-1973);
- **1944** -este introdusă în domeniul algebrei moderne noțiunea de signatură de către matematicianul român **Dan Barbilian**(1895-1961);
- **1950 -**este introdusă noțiunea de Δ- derivată de către Dan Barbilian;
- **1996 -**celebra conjectură a lui Fermat este demonstrată de către **Andrew Wiles** de la institutul Isaac Newton din Cambridge.
- **2000 -**este determinat cel mai mare număr prim $2^{6972593}-1$, având două milioane de cifre, obținut cu ajutorul a 20 de mii de calculatoare puse în rețea;

BIBLIOGRAFIE.

1: N. Mihăileanu- Istoria matematicii,vol.1,vol2., Editura ştiinţifică şi enciclopedică; Bucureşti,1974/ 1981;

2. Vasile Bobancu- Caleidoscop matematic, Editura Niculesu;

3. Neculai Stanciu, 100 de probleme rezolvate. Editura Rafet;

4. Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, Bucureşti

Cuprins: