Prof. Traşcă Iuliana
Scorniceşti, Olt

EVALUAREA NAŢIONALĂ-2010
Probă scrisă la MATEMATICĂ
clasa a VIII-a Varianta

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1**. Dacă $2^n=32$, atunci n este......
5p **2.** Elementele mulţimii $A=\{x\in\mathbb{N}^*/2x+3\le 7\}$ sunt…
5p **3.** Perimetrul unui dreptunghi este 36 cm, iar lăţimea 5 cm, lungimea este.....cm
5p **4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Punctul $M(m,n)\in G_f \Leftrightarrow f(m)=....$
5p **5**. Prin raţionalizarea fracţiei $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ obţinem...
5p **6.** Aria unui cerc este 25π cm^2. Lungimea diametrului cercului este.....cm.

SUBIECTUL al II –lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, piramida triunghiulară VABC şi apotema VM.
2. Se dau numerele:
$a=\dfrac{151515}{121212}-\dfrac{1}{2}$ şi $b=0,(5)+1,3(1)$.
Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n\le 100$, n pătrat perfect.
5p **a)** Calculaţi a şi b.
5p **b)** Arătăţi că mulţimea $A=\left\{x/x\in\mathbb{N}^*, n=\dfrac{20}{7}\cdot x\cdot\max(a,b)\cdot\min(a,b)\right\}$ are 5 elemente
5p **3**. Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$,a+b+c=2, ab+bc+ac=1 să se arate că:
$$\sqrt{10a^2+1}+\sqrt{10b^2+1}+\sqrt{10c^2+1}\le 13 .$$
5 p **4.** Aflaţi măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD ştiind că :
$$\frac{3\cdot m(\hat{A})}{8}=\frac{3\cdot m(\hat{B})}{10}=\frac{m(\hat{C})}{2}=\frac{m(\hat{D})}{4}$$
5p **5**. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=(m-1)x-3m-5
Determinaţi numărul m ştiind că punctul $A(2,-5)\in G_f$ şi arătaţi că
$f\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\dfrac{f(a)+f(b)+1}{3}$ oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$

SUBIECTUL al III –lea -Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie un trapez isoscel ABCD cu baza mică AB, baza mare CD şi înălţimea de 6 cm. Lungimea segmentului de pe linia mijlocie cuprins între diagonale de 2,5 cm iar raportul bazelor 1,5 cm. Prin punctul O de intersecţie al diagonalelelor se du ce o dreaptă paralelă cu bazele, care taie laturile neparalele în M şi N $\left(M \in [AD], N \in [BC]\right)$.

5p a) Să se afle perimetrul şi aria trapezului.

5p b) Să se arate că $\frac{CD}{AB} = \frac{NC}{BN}$.

5p c) Prelungind laturile neparalele, acestea se întâlnesc în punctul Q. Să se afle perimetrul triunghiului ABQ

2. O piramidă patrulateră regulată, cu înălţimea de $[\left(3^{2^3} : 3\right)^2 : 3^{12} + 2^3 - 1]$ cm şi latura bazei de $[5^2 - 13 + \left(2^{2^3} : 2^6\right) + 2^3]$ cm, este secţionată cu un plan paralel cu baza la o pătrime din înălţime fată de vârf. Să se calculeze:

5p a) Sinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei .

5p b) Aria laterală a trunchiului de piramidă obţinut prin sec ţionarea piramidei iniţiale.

5p c) Aria secţiunii făcută în trunchiul de piramidă printr -un plan ce trece prin două diagonale paralele ale bazelor.

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

SUBIECTUL I

● Se punctează doar rezultatul, astfel : pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.

● Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

● Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă ceste diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

● Ne se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvările parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

● Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.

● Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1	2	3	4	5	6
5	$\{1,2\}$	13	n	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	10

SUBIECTUL al II –lea

1. Desenarea şi notarea corectă a piramidei triunghiulare regulate VABC ....3 p

Desenarea apotemei VM………………………………… ……………...............2 p

2.a) Avem:

$$\frac{151515}{121212}=\frac{15\cdot 10000+15\cdot 100+15}{12\cdot 10000+12\cdot 100+12}=\frac{15\cdot(10000+100+1)}{12\cdot(10000+100+1)}=\frac{15\cdot 10101}{12\cdot 10101}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

Deci $a=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$ ....3 p

$b=0,(5)+1,3(1)\Leftrightarrow b=\frac{5}{9}+\frac{131-13}{90}\Leftrightarrow b=\frac{168}{90}\Leftrightarrow b=\frac{84}{45}$ ....2 p

b) $\max(a,b)=b=\frac{84}{45}$, $\min(a,b)=a=\frac{3}{4}$ .... 1 p

$n=\frac{20}{7}\cdot x\cdot\max(a,b)\cdot\min(a,b)\Leftrightarrow n=\frac{20}{7}\cdot x\cdot\frac{84}{45}\cdot\frac{3}{4}\Leftrightarrow n=4x$ ....1 p

Dar $n\in\mathbb{N}^*$, $n\le 100$, n pătrat perfect şi n=4x $\Leftrightarrow$ $n\in\{4,16,36,64,100\}$ ....2 p

Cum $x\in\mathbb{N}^*$ avem $x\in\{1,4,9,16,25\}$ $\Leftrightarrow$ $A=\{1,4,9,16,25\}$,deci mulţimea A are 5 elemente...1 p

3. Utilizăm inegalitatea mediilor: $\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$ ....1 p

$\sqrt{10a^2+1}=\sqrt{(10a^2+1)\cdot 1}\le\frac{10a^2+2}{2}$

$\sqrt{10b^2+1}=\sqrt{(10b^2+1)\cdot 1}\le\frac{10b^2+2}{2}$

$\sqrt{10c^2+1}=\sqrt{(10c^2+1)\cdot 1}\le\frac{10c^2+2}{2}$ ....1 p

Adunând membru cu membru inegalităţile de mai sus avem :

$\sqrt{10a^2+1}+\sqrt{10b^2+1}+\sqrt{10c^2+1}\le\frac{10a^2+2}{2}+\frac{10b^2+2}{2}+\frac{10c^2+2}{2}\Leftrightarrow$

$\sqrt{10a^2+1}+\sqrt{10b^2+1}+\sqrt{10c^2+1}\le 5\left(a^2+b^2+c^2\right)+3$ (1)

Dar $a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+ac+bc\right)$.

$a^2+b^2+c^2=2^2-2\cdot 1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2$ ....2 p

Relaţia (1) se transcrie astfel:

$\sqrt{10a^2+1}+\sqrt{10b^2+1}+\sqrt{10c^2+1}\le 13$ ceea ce trebuia demonstrat...............................1 p

4. Relaţia din enunţ este echivalentă cu :

$\frac{m\left(\hat{A}\right)}{\frac{8}{3}}=\frac{m\left(\hat{B}\right)}{\frac{10}{3}}=\frac{m\left(\hat{C}\right)}{2}=\frac{m\left(\hat{D}\right)}{4}=\frac{360^0}{\frac{8}{3}+\frac{10}{3}+2+4}=30^0$ ....3 p

$m\left(\hat{A}\right)=80^0, m\left(\hat{B}\right)=100^0, m\left(\hat{C}\right)=60^0, m\left(\hat{D}\right)=120^0$ ....2 p

5. $A(2,-5)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=-5\Leftrightarrow m=-2$ ....2 p

f(x)=-3x+1.......... ....1 p

$f\left(\frac{a+b}{3}\right)=-a-b+1$ şi $\frac{f(a)+f(b)+1}{3}=-a-b+1$ .... 2 p

SUBIECTUL al III –lea

1.a) $\frac{CD}{AB}=\frac{3}{2}$, $\frac{CD-AB}{2}=\frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow$ AB=10 cm, CD=15 cm......…………… .... .1 p

AD=BC=6,5 cm.................. ....1 p

$p_{ABCD}=38$ cm ....1 p

$A_{ABCD}=75$ cm^2 ....2 p

b) Aplicând teorema lui Thales în ΔABC, se obţine : $\frac{OC}{AO}=\frac{NC}{BN}$ (1).......................2 p

$\Delta AOB\sim\Delta COD\Rightarrow\frac{OC}{AO}=\frac{CD}{AB}$ (2)... ....2 p

Din (1) şi (2) avem $\frac{CD}{AB}=\frac{NC}{BN}$ ....1 p

c) $\Delta QAB \sim \Delta QDC \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{QA}{QA+6,5}$ cm……………………..................…………...2 p

$QA = QB = 13$ cm... .... 2 p

$p_{\Delta QAB} = 36$ cm.. ....1 p

2.a) h=16 cm, latura bazei AB=24 cm...................…...…...... ..1 p

Dacă $OM \perp BC$ cu teorema celor trei perpendiculare avem: $VM \perp BC$ ....1 p

$\measuredangle OMV$ unghiul diedru căutat, $\sin(\sphericalangle OMV) = \frac{VO}{VM}$ ....….................1 p

$OM = \frac{AB}{2} = 12$ cm, VM =20 cm .... .1 p

$\sin(\sphericalangle OMV) = \frac{4}{5}$ .... .1 p

b) Fie O' centrul bazei mici şi $O'N \parallel OM \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'N}{OM} = \frac{VN}{VM}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{O'N}{12} = \frac{VN}{20}$ ....…..…........................1 p

$O'N$ =3 , deci latura bazei mici este 6 cm şi VN =5... 1 p

$a_t = 15cm$ ....2 p

$A_l = 900cm^2$ ....1 p

c) Secţiunea este trapezul ACC'A' cu bazele $AC = 24\sqrt{2}$ cm şi A'C'= $6\sqrt{2}$ cm....1 p

Inălţimea trapezului ACC'A' este OO'=12 cm............. ....2 p

$A_{ACC'A'} = 180\sqrt{2}$ cm^2...2 p