Subiecte cu rezolvari BAC M2 matematica – sesiunea august 2009

Subiectul I - Varianta 17; Subiectul II - Varianta 37; Subiectul III - Varianta 38

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p	**1.** Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.
5p	**2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.
5p	**3.** Să se determine numărul natural n, $n \geq 1$ știind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.
5p	**4.** Fie funcția $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
5p	**5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$.
5p	**6.** Să se calculeze $\sin 135°$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

REZOLVARE

1. $2\log_3 4 - 4\log_3 2 = 4\log_3 2 - 4\log_3 2 = 0$.
2. Ecuația se scrie $\frac{2^x}{2} + 2^x = 12 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.
3. Ecuația se scrie $2n = 10 \Rightarrow n = 5$.
4. Funcția f este descrescătoare pe $[0,2]$, $f(0) = 3,\ f(2) = -5 \Rightarrow f(x) \in [-5,3]$.
5. Fie D mijlocul segmentului BC, atunci $\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OD} = \overline{AO} = -\overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} - \overline{OA} = \bar{0}$.
6. $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a,b şi c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=c=0$ şi $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*(1-x)=0$.

<u>Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării</u>
<u>Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar</u>

Soluţii

1. a) $A+F=\begin{pmatrix}2&a&b+1\\0&2&c\\0&0&2\end{pmatrix}$; $a=3,b=3,c=5$.

b) $\det F=1\neq 0$, deci F este inversabilă; $F^{-1}=F^{*}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c) $X=F^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

2. a) Se efectuează înmulţirile şi se reduc termenii asemenea.

b) $x*(y*z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$; $(x*y)*z=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$.

c) $x*(1-x)=0\Leftrightarrow 2x(1-x)=0\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Știind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n=\int\limits_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că are loc relația $I_n=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

b) Cum $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in[0;\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty;0]$.

c) Din ipoteză $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=0, \forall x\in\mathbb{R}^*$. Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{de\ 2009\ ori}+x^{2010}}{x^{2009}}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

2.a) $I_0=\int\limits_e^{e^2} x\,dx=\dfrac{e^4-e^2}{2}$.

b) $x\in\left[e,e^2\right]\Rightarrow 1\le\ln x\le 2\Rightarrow x\cdot\ln^n x\le x\cdot\ln^{n+1}x,\ \forall x\in\left[e,e^2\right]$ și $\forall n\in\mathbb{N}$. Integrând obținem $I_n\le I_{n+1}$.

c) $I_n=\int\limits_e^{e^2} x\cdot\ln^n x\,dx=\int\limits_e^{e^2}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln^n x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln^n x\Big|_e^{e^2}-\int\limits_e^{e^2}\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(\ln^n x\right)'dx=\dfrac{e^4\cdot 2^n}{2}-\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n}{2}\int\limits_e^{e^2}x\cdot\ln^{n-1}x\,dx=$

$=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.