UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

21 august 2006

EXAMEN DE DEFINITIVAT

1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \ \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Să se arate că, dacă $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_3$, atunci $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y} = \hat{0}$.

b) Să se arate că M, împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor, formează un corp comutativ.

c) Să se determine $A \in M$ astfel încât $A^2 + I_2 = O_2$.

d) Să se afle numărul elementelor corpului M.

e) Dacă $X \in M$, să se calculeze X^8.

2. Fie $a \in (0, \infty)$. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{a^x}{3^x + 4^x}.$$

a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $a = 2\sqrt{3}$;

ii) $f(x) \le \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se afle locul geometric al punctelor M din planul patrulaterului cu proprietatea că

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Discuție.

4. Linii importante într-un triunghi (mediatoare, bisectoare, înălțimi, mediane) și concurența lor.

<u>Notă</u>. Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

BAREM DE CORECTARE

Analiză

Oficiu 1p

$f(0) = \frac{1}{2}$ 1p

Calcul $f'(x)$ 2p

b) i) => ii) 3p

b) ii) => i) 3p

Geometrie

Oficiu 1p

Figura 1p

Rezultate intermediare 4p

Discuție completă 4p

Algebră

Oficiu 1p

a) 1p

b) 3p

c) $A_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 2p

d) 9 elemente 1p

e) Dacă $X \neq O_2$, atunci $X^8 = I_2$, iar $O_2^{\,8} = O_2$ 2p

Metodică

Oficiu 1p

Definirea liniilor importante în triunghi 1×4 .... 4p

Concurența liniilor importante 1×4 .... 4p

Redactare (din punct de vedere metodic) 1p