

EXAMEN DE DEFINITIVAT PROBA SCRISĂ DE MATEMATICĂ

- I.** (a) Demonstrați că numărul $\sqrt[3]{2}$ este irațional.
(b) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că dacă $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$, atunci $a = b = c = 0$.
(c) Fie $G = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$. Arătați că G este grup cu înmulțirea numerelor reale.
(d) Găsiți inversul lui $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ în acest grup.

II. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demonstrați că f este derivabilă de două ori pe \mathbb{R} .
(b) Este continuă a doua derivată a lui f pe toată axa reală? Argumentați răspunsul.

III. Fie tetraedrul $ABCD$ și punctul $M \in (AB)$. Demonstrați că

$$\text{vol}(DAMC) = \text{vol}(DBMC) \text{ dacă și numai dacă } (AM) \equiv (MB).$$

IV. Teorema celor trei perpendiculare (tratate metodică). Se vor aborda:

- (a) Enunț și demonstrație;
(b) Reciproce (enunțuri și demonstrații);
(c) Compuneți o problemă a cărei rezolvare să se bazeze pe teorema celor trei perpendiculare;
(d) Comentați o greșeală frecventă pe care o fac elevii în aplicarea teoremei.

Președinte de comisie:

Conf. dr. Viviana Ene

Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii