Triunghiul ortic . Teorema lui Feuerbach

Prof. Radu Laura
Liceul cu Program Sportiv, Galati

Definiţie:

Se numeşte triunghi ortic triunghiul determinat de picioarele înălţimilor unui triunghi dat.

Teoremă:

Fie ABC un triunghi şi punctele $A' = pr_{BC}A$, $B' = pr_{AC}B$, $C' = pr_{AB}C$.

Atunci :

1) Triunghiurile AB'C' , BA'C' , CB'A' sunt triunghiuri asemenea cu triunghiul ABC .
2) Semidreptele [A'A , [B'B si [C'C sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic.
3) Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic A'B'C', iar vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ortic A'B'C'.
4) Tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralel ă cu dreapta B'C'.
5) Dintre toate triunghiurile înscrise în triunghiul ABC, triunghiul ortic are perimetrul minim (Teorema lui Feuerbach) .

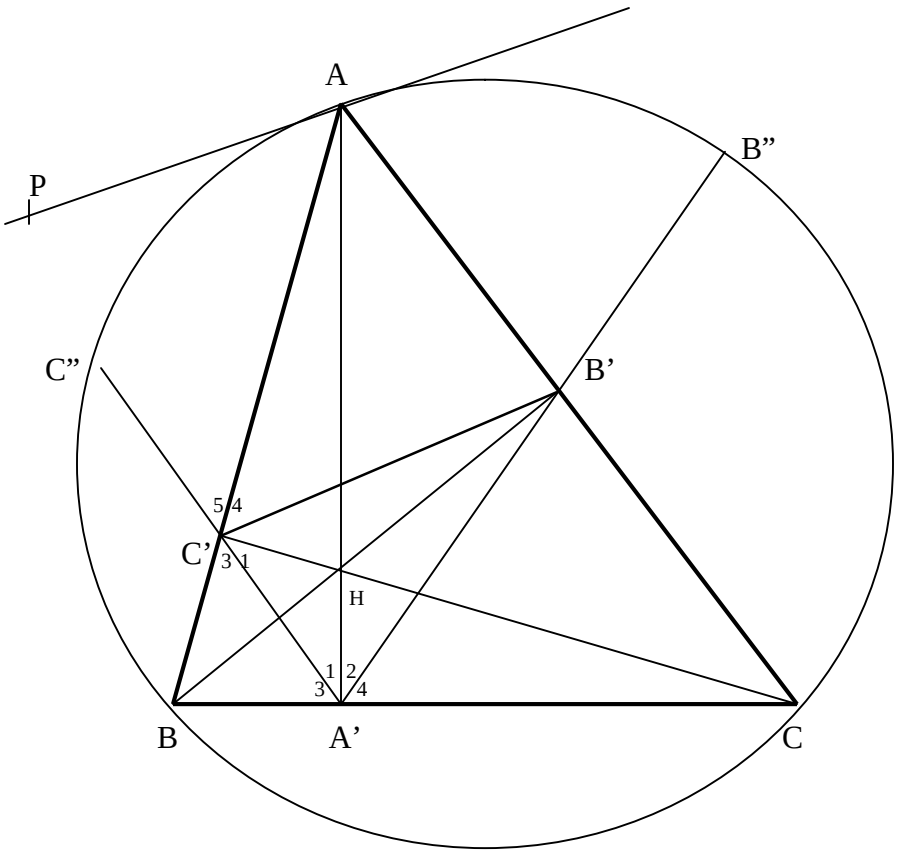


Fig.1

Demonstraţie:

1) Ştim că $\sphericalangle BC'C \equiv \sphericalangle CB'B$, având măsurile de 90º, de unde deducem că patrulaterul BCB'C' este inscriptibil . Rezultă că :

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle CB'C') = 180^o \\ m(\sphericalangle AB'C') + m(\sphericalangle CB'C') = 180^o \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AB'C' \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BC'B') = 180^o \\ m(\sphericalangle AC'B') + m(\sphericalangle BC'B') = 180^o \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B' \quad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$.
Analog se demonstrează şi celelalte două asemănări .

2) Conform punctului 1) rezultă că $\sphericalangle C'A'B \equiv \sphericalangle B'A'C (\equiv \sphericalangle BAC)$. Atunci $\sphericalangle A_1' \equiv \sphericalangle A_2'$ ca fiind complementele a două unghiuri congruente, de unde rezultă că [A'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'A'C'$.

3) Din punctul 2) se deduce că ortocentrul H al triunghiulu i ABC se află la intersecţia bisectoarelor triunghiul ortic şi deci este centrul cercului înscris în triunghiul ortic A'B'C'.
Fie C'' punctul în care semidreapta [A'C' intersecteaza cercul circumscris triunghiului.
Ştim că $\sphericalangle C_3' \equiv \sphericalangle C_4'$, din punctul 1) , $\sphericalangle C_3' \equiv \sphericalangle C_5'$ ca fiind opuse la vârf , rezultă că $\sphericalangle C_4' \equiv \sphericalangle C_5'$.
Deci semidreapta [C'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B'C'C''$. În mod analog se demonstrează că semidreapta [B'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle C'B'B''$. Rezultă că punctul A este centrul cercului exînscris triunghiului A'B'C' tangent laturii [B'C'].

4) Avem că $m(\sphericalangle BAP)$ este jumătate din măsura arcului mic AB. De asemenea $m(\sphericalangle ACB)$ este tot jumătate din măsura arcului mic AB. Rezultă că $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle ACB$, dar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B'$ din relaţia (2), de unde obţinem că $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle AC'B'$ (alterne interne) ceea ce demonstrează că tangenta în punctul A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu dreapta B'C'.

5) Se observă că dacă M parcurge dreapta BC, a tunci B'M+MC' este minimă dacă $\sphericalangle B'MC \equiv \sphericalangle C'MB$ (Fig. 2).
Într-adevăr, fie B_1 simetricul lui B' faţă de BC. Se uneşte C' cu B_1. Fie $\{M_1\}=BC \cap C'B_1$. Oricare ar fi punctul $M \in BC$, $M \neq M_1$ avem:

$$M_1C'+M_1B'=M_1C'+M_1B_1=C'B_1<C'M+MB_1=C'M+MB' .$$

Am obţinut astfel că punctul M_1 construit anterior este punctul de pe dreapta BC cu proprietatea că MC'+MB' este minimă. Dar unghiurile $\sphericalangle C'M_1B$ şi $\sphericalangle B'M_1C$ sunt congruente deoarece fiecare este congruent cu $\sphericalangle B_1M_1C$.

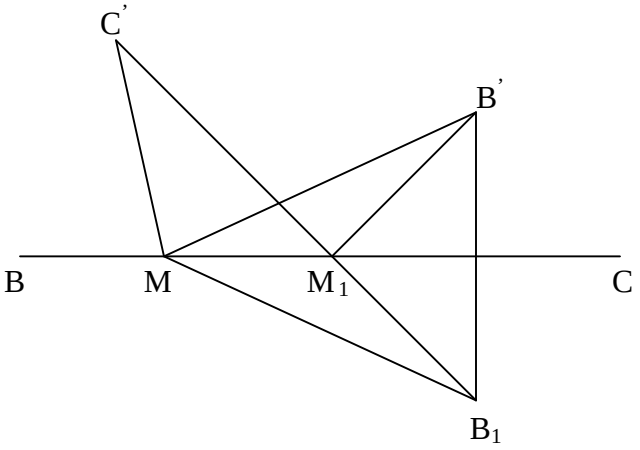


Fig. 2

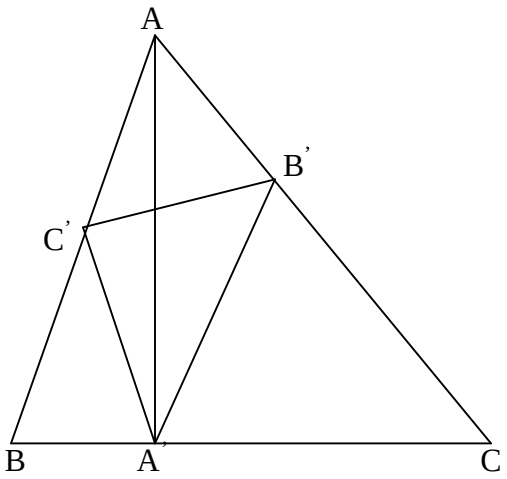


Fig. 3

Fie acum un triunghi A'B'C' înscris în triunghiul ABC , A' $\in$ (BC), B' $\in$ (AC), C' $\in$ (AB). Fixând două câte două vârfurile acestui triunghi, se obţine că minimul perimetrului se atinge când laturile triunghiului A'B'C' sunt egal înclinate pe laturile triunghiului ABC, deci când unghiurile marcate pe figură sunt congruente (Fig. 3).

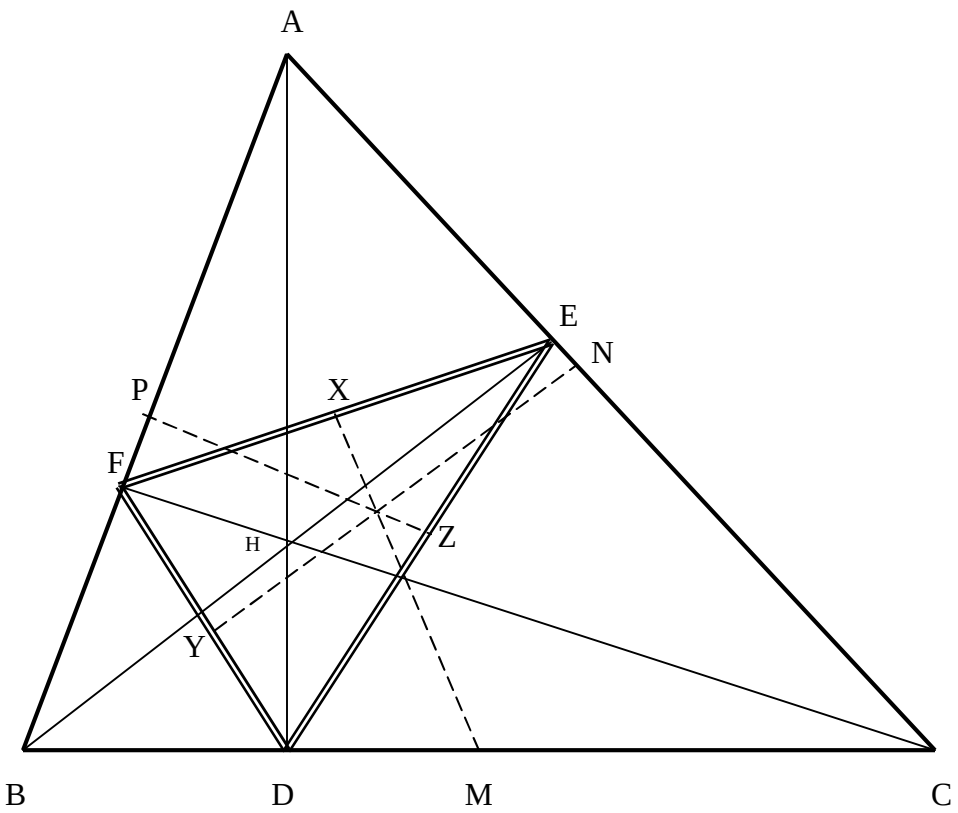
Folosind acelaşi raţionament ca în demonstraţia punctului 2), se obţine că A, B şi C sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului A'B'C'. Rezultă că [A'A este bisectoarea unghiului $\sphericalangle$B'A'C', deci $\sphericalangle$C'A'C $\equiv$ $\sphericalangle$B'A'A. Rezultă AA' $\perp$ BC. Analog se obţine BB' $\perp$ AC şi CC' $\perp$ AB. Prin urmare A'B'C' este triunghiul ortic.

Aplicaţii:

Problema 1

Se consideră triunghiul ABC şi fie DEF triunghiul său ortic. Dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor BC, AC, AB , iar X, Y, Z sunt mijloacele laturilor FE, FD, DE , să se demonstreze că dreptele MX, NY şi PZ sunt concurente .

Demonstraţie :



Patrulaterul BCEF este inscriptibil în cercul de diametru BC, deci centrul acestui cerc este chiar punctul M, iar latura FE a triunghiului ortic este o coardă în acest cerc. Punctul X fiind mijlocul acestei coarde, rezultă că MX este mediatoarea segmentului FE .

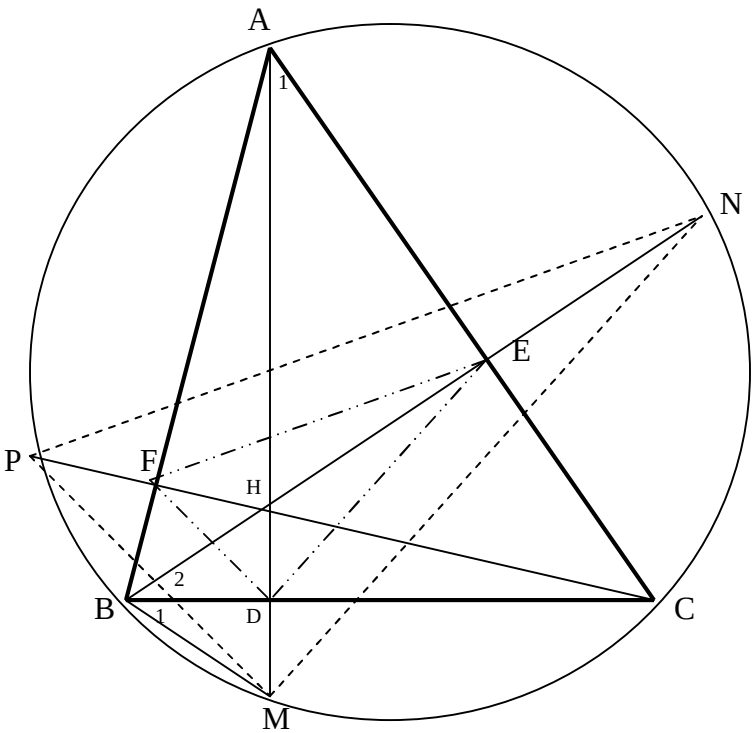
În mod analog se arată că NY este mediatoarea segmentului FD şi PZ este mediatoarea segmentului DE . Cele trei drepte MX, NY şi PZ sunt mediatoarele triunghiului ortic, de unde rezultă că aceste drepte sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ortic, care este de fapt centrul cercului lui Euler .

Problema 2

Se consideră triunghiul ABC în care se duc înălţimile AD, BE si CF . Acestea intersectează cercul circumscris triunghiului in M, N si P. Să se arate că este adevarată inegalitatea :

$$\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM}+\frac{BE}{BN}+\frac{CF}{CP}\right)\geq 9 \ .$$

Demonstraţie:



Avem că $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ deoarece subîntind acelaşi arc MC , dar $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_2$ având acelaşi complement C, rezultă că $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, de unde deducem că $\Delta BDM \equiv \Delta BDH$ şi de aici MD=DH . Analog NE=EH şi PF=FH . Deci segmentele DE, EF şi FD sunt linii mijlocii în triunghiurile HMN, HNP şi respectiv HPM , ele sunt paralele cu bazele şi egale cu jumatatea bazelor. Rezultă imediat că triunghiurile DEF şi MNP sunt asemenea şi au raportul de asemanare egal cu $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}=\left(\frac{2}{1}\right)^2=4$$

$$\frac{AD}{AM}+\frac{BE}{BN}+\frac{CF}{CP}=\frac{AD}{AD+DM}+\frac{BE}{BE+EN}+\frac{CF}{CF+FP}\geq 3\cdot\frac{3}{1+\frac{DM}{AD}+1+\frac{EN}{BE}+1+\frac{FP}{CF}}=$$

(s-a folosit inegalitatea mediilor , $m_a \geq m_h$)

$$=\frac{9}{3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}}=\frac{9}{3+\frac{HD\cdot BC}{AD\cdot BC}+\frac{HE\cdot AC}{BE\cdot AC}+\frac{HF\cdot AB}{CF\cdot AB}}=\frac{9}{3+\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[ABC]}}=\frac{9}{4}$$

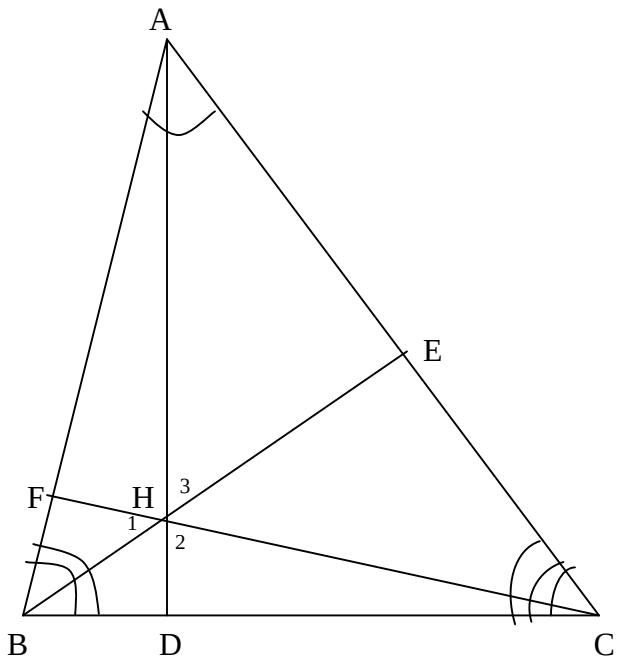
Deci $\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM}+\frac{BE}{BN}+\frac{CF}{CP}\right)\geq 4\cdot\frac{9}{4}=9 \Leftrightarrow \frac{\sigma[MNP]}{\sigma[DEF]}\left(\frac{AD}{AM}+\frac{BE}{BN}+\frac{CF}{CP}\right)\geq 9$, ceea ce trebuia demonstrat .

Problema 3

Fie ABC un triunghi oarecare, având toate unghiurile ascuţite. Dacă D, E, F sunt picioarele înălţimilor din vârfurile A, B şi C, H este ortocentrul, iar R raza cercului circumscris triunghiului ABC, să se arate că : a) $HD\cos A+HE\cos B+HF\cos C=6R\cos A\cos B\cos C$;

b) $\frac{HA}{HD}+\frac{HB}{HE}+\frac{HC}{HF}=tgAtgB+tgBtgC+tgCtgA-3$.

Demonstraţie:



a) În triunghiul ABC aplicăm teorema sinusurilor : $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=2R$. (1)

$\Delta BCF \Rightarrow \cos B=\frac{BF}{BC} \Rightarrow BC=\frac{BF}{\cos B}$ (2)

Unghiul H_1 din ΔBHF este congruent cu unghiul A al triunghiului ABC, având acelaşi complement $\sphericalangle ABE$.

$\Delta BHF \Rightarrow tgH_1=\frac{BF}{HF} \Rightarrow BF=HF\,tgA$ (3)

Din (2) şi (3) rezultă că $BC=\frac{HF\,tgA}{\cos B}=\frac{HF\sin A}{\cos A\cos B}$. Înlocuind pe BC în teorema sinusurilor obţinem :

$\frac{HF\sin A}{\cos A\cos B}=2R\sin A \Rightarrow HF=2R\cos A\cos B \Rightarrow HF\cos C=2R\cos A\cos B\cos C$.

În mod analog obţinem $HE\cos B=2R\cos A\cos B\cos C$ şi $HD\cos A=2R\cos A\cos B\cos C$.

Însumând ultimile trei relaţii avem : $HD\cos A+HE\cos B+HF\cos C=6R\cos A\cos B$.

b) Calculăm $\frac{HA}{HD}+\frac{HB}{HE}+\frac{HC}{HF}=\frac{AD-HD}{HD}+\frac{BE-HE}{HE}+\frac{CF-HF}{HF}=\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}-3$. (4)

Din punctul a) avem : $HD=2R\cos B\cos C$

$HE=2R\cos A\cos C$

$HF=2R\cos A\cos B$.

În $\Delta ABD \Rightarrow AD=AB\sin B\overset{T.\sin}{=}2R\sin B\sin C$

În $\Delta BCE \Rightarrow BE=BC\sin C\overset{T.\sin}{=}2R\sin A\sin C$

În $\Delta CAF \Rightarrow CF=AC\sin A\overset{T.\sin}{=}2R\sin A\sin B$

Înlocuind în relaţia (4) , obţinem :

$$\frac{HA}{HD}+\frac{HB}{HE}+\frac{HC}{HF}=\frac{2R\sin B\sin C}{2R\cos B\cos C}+\frac{2R\sin A\sin C}{2R\cos A\cos C}+\frac{2R\sin A\sin B}{2R\cos A\cos B}-3=$$
$$=tgBtgC+tgAtgC+tgAtgB-3$$

Deci $\frac{HA}{HD}+\frac{HB}{HE}+\frac{HC}{HF}=tgAtgB+tgBtgC+tgCtgA-3$.

Bibliografie :

1. Cuculescu I. , Stănăşilă O., ş.a. , *Matematică-Fizică-Chimie-Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior* , Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.
2. Drăghicescu I.C. , Masgras V. , *Probleme de geometrie* , Ed. Tehnică , Bucureşti, 1987 ;
3. Nicolescu L. , Boskoff V. , *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990 .