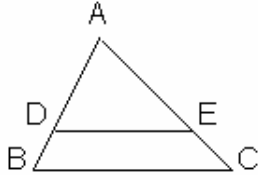


## SINTEZĂ A GEOMETRIEI de clasa a VII-a

### □ Asemănarea

#### 1) Teorema lui Thales :

O paralelă la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}, \text{ sau alte variante .}$$

#### 2) Reciproca teoremei lui Thales :

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

$$\boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}} \Rightarrow DE \parallel BC.$$

#### 3) Teorema fundamentală a asemănării :

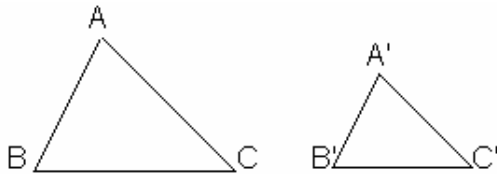
O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu primul.

$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$  din care  $\Rightarrow$  în principal proporționalitatea

laturilor :

$$\boxed{\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}}$$

#### 4) Cazurile de asemănare :



Cazul I (UU) : Dacă  $\angle A \equiv \angle A'$  și  $\angle B \equiv \angle B'$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Cazul II (LUL) : Dacă  $\angle A \equiv \angle A'$  și  $\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}}$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Cazul III (LLL) : Dacă  $\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}}$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

#### 5) Raportul de asemănare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul a două laturi corespunzătoare, sau a două înălțimi corespunzătoare, etc ...

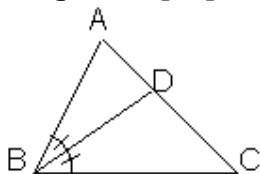
$$\boxed{\frac{l}{l'} = \frac{h}{h'} = \frac{m}{m'} = \frac{P}{P'} = \dots = k}$$

unde  $l, l'$  = laturi corespunzătoare;  $h, h'$  = înălțimi corespunzătoare;  $m, m'$  = mediane corespunzătoare;  $P, P'$  = perimetre corespunzătoare,  $k$  = valoarea raportului de asemănare.

6) Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul

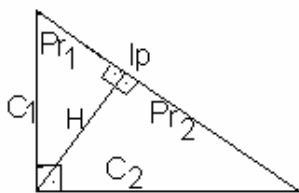
raportului de asemănare. 
$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta A'B'C'}} = k^2$$

7) Teorema bisectoarei : Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusa segmente proporționale cu laturile care formează unghiul (și reciproc).



$$\angle ABD = \angle DBC \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

### □ Relații metrice în triunghiul dreptunghic :



Ip = ipotenuza  
 $C_1$  = cateta 1  
 $C_2$  = cateta 2  
 H = înalțimea  
 $Pr_1$  = proiecția catetei 1  
 $Pr_2$  = proiecția catetei 2

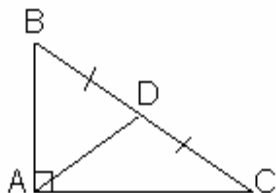
1) **Teorema lui Pitagora :**

a) pentru Ipotenuză :  $Ip^2 = C_1^2 + C_2^2$   
 b) pentru Catete :  $C_1^2 = Ip^2 - C_2^2$  sau  $C_2^2 = Ip^2 - C_1^2$ .

2) **Teorema catetei :**  $C_1^2 = Ip \cdot Pr_1$  sau  $C_2^2 = Ip \cdot Pr_2$ .

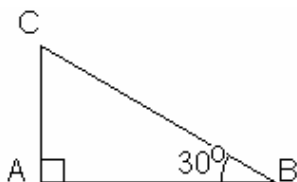
3) **Teorema înălțimii :**  $H^2 = Pr_1 \cdot Pr_2$  sau 
$$H = \frac{C_1 \cdot C_2}{Ip}$$

4) **Teorema medianei :** Mediana corespunzătoare ipotenuzei (dusă din vârful unghiului drept) este egală cu 1/2 din ipotenuză.



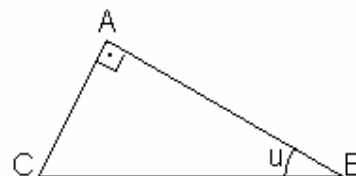
$$m(\angle BAC) = 90^\circ, BD = DC \Rightarrow AD = \frac{1}{2} \cdot BC$$

5) **Teorema unghiului de 30° :** Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura de 30°, atunci cateta opusă acestui unghi este egală cu 1/2 din ipotenuză.



$$m(\angle BAC) = 90^\circ, m(\angle ABC) = 30^\circ \\ \Rightarrow AC = \frac{1}{2} \cdot BC$$

□ **Funcții trigonometrice :**



1) **Definiții :**

**$\sin (<u^\circ) = \text{cateta opusă} / \text{ipotenuză} ;$**   
 **$\cos (<u^\circ) = \text{cateta alăturată} / \text{ipotenuză} ;$**   
 **$\text{tg} (<u^\circ) = \text{cateta opusă} / \text{cateta alăturată} ;$**   
 **$\text{ctg} (<u^\circ) = \text{cateta alăturată} / \text{cateta opusă} ;$**

$\sin (<B) = AC / BC.$   
 $\cos (<B) = AB / BC.$   
 $\text{tg} (<B) = AC / AB.$   
 $\text{ctg} (<B) = AB / AC.$

2) **Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor uzuale :**

	30°	45°	60°
sin	1 / 2	$\sqrt{2} / 2$	$\sqrt{3} / 2$
cos	$\sqrt{3} / 2$	$\sqrt{2} / 2$	1 / 2
tg	$\sqrt{3} / 3$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3} / 3$

□ **Arii și perimetre :**

Obs. : Două figuri geometrice care au ariile egale se numesc figuri echivalente.

Notații : A = aria ; P = perimetrul

1) **Pătratul :**

$$A = L^2 ; \quad P = 4 L \quad ; \quad \text{unde } L = \text{latura pătratului.}$$

2) **Dreptunghiul :**

$$A = L \cdot l ; \quad P = 2 L + 2 l$$

unde L = lungimea și l = lățimea.

3) **Paralelogramul :**

$$A = B \cdot H ; \text{ sau } A = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin u ; \quad P = 2(l_1 + l_2)$$

unde B = baza ; H = înălțimea ; u = unghiul ascuțit al paralelogramului.

4) **Rombul :**

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} ; \text{ sau } A = L \cdot H ; \text{ sau } A = L^2 \cdot \sin u ; \quad P = 4 L$$

unde  $d_1, d_2$  = diagonalele ; L = latura ; H = înălțimea ; u = unghi ascuțit.

5) **Trapezul :**

$$A = \frac{(B + b) \cdot H}{2} ; \quad P = B + b + l_1 + l_2 ; \quad \frac{B + b}{2} = \text{Liniamijlocie}$$

unde B = baza mare ; b = baza mică ; H = înălțimea ;  $l_1, l_2$  = laturile neoparalele.

5) **Patrulater ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) :**

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} ; \quad P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

7) **Patruleter convex oarecare :**

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin u}{2} \quad \text{unde } u = m(\angle d_1, d_2).$$

8) **Triunghiul :**

a) **dreptunghic :**  $A = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$ ; sau  $A = \frac{I_p \cdot h}{2}$ ;  $P = C_1 + C_2 + I_p$ .

b) **echilateral :**  $A = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ ;  $P = 3 L$ .

c) **isoscel :**  $A = \frac{B \cdot H}{2}$ ;  $P = B + 2 L$

unde B = baza = latura necongruentă ; L = laturile congruente;  
H = înălțimea corespunzătoare bazei (se calculează cu teorema lui Pitagora ținând cont că această înălțime este și mediană).

d) **oarecare :**  $A = \frac{B \cdot H}{2}$  ; unde B = oricare latură (cunoscută) ;  
H = înălțimea corespunzătoare ;

$$A = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin u}{2} \quad ; \quad \text{unde } u = \text{unghiul dintre } l_1 \text{ si } l_2 ;$$

Formula lui Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde a, b, c = laturile, iar  $p = \frac{a+b+c}{2}$  = semiperimetru.

9) **Cercul :**

$$A = \pi R^2 ; \quad L = 2 \pi R ;$$

$$S_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} ; \quad L_{\text{arc de cerc}} = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180}$$

Obs. : - Raza cercului circumscris unui triunghi se află cu formula :

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$$

; sau

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin A}$$

- Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu 1/2 din ipotenuză (centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei).
- Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral se află cu

formula :  $R = \frac{2}{3} \cdot H$ , iar raza cercului înscris cu formula :

$$r = \frac{1}{3} \cdot H ; \text{ (Centrul cercului circumscris coincide cu}$$

centrul cercului înscris, cu ortocentrul și cu centrul de greutate al triunghiului.)

- Raza cercului înscris într-un triunghi oarecare se află cu

formula : 
$$r = \frac{2 \cdot A}{P}$$
 unde A = aria triunghiului și P = perimetrul.

### □ Poligoane regulate :

	Triunghi echilateral	Patrat	Hexagon regulat
L ( <i>latura</i> )	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
a ( <i>apotema</i> ) (a = r)	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$ sau $\frac{L}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
S ( <i>aria</i> )	$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$L^2$	$\frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$
Alte formule	$H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ $R = \frac{2}{3} \cdot H_3 ; r = \frac{1}{3} \cdot H_3$	$d = L\sqrt{2}$	$D = 2L$ $d = L\sqrt{3}$

Obs. : Când o coardă a unui cerc corespunde unui arc de :

$120^\circ \Rightarrow$  atunci ea este egală cu  $L_3 = R\sqrt{3}$  ;

$90^\circ \Rightarrow$  este egală cu  $L_4 = R\sqrt{2}$  ;

$60^\circ \Rightarrow$  este egală cu  $L_6 = R$ .

### □ Calcularea unei înălțimi dintr-un triunghi :

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

unde

1. Înălțimea unui **triunghi echilateral** se calculează cu formula  $L =$  lungimea laturii triunghiului.

2. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei unui **triunghi dreptunghic** se calculează cu

formula 
$$h = \frac{C_1 \cdot C_2}{I_p}$$
 , unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt lungimile catetelor triunghiului, iar  $I_p$  este lungimea ipotenuzei,

sau cu

formula 
$$h^2 = Pr_1 \cdot Pr_2$$
 , unde  $Pr_1$  și  $Pr_2$  sunt lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

3. Înălțimea corespunzătoare bazei unui **triunghi isoscel** (înălțimea principală), se calculează cu teorema lui Pitagora, ținând cont că ea este și mediană (are piciorul în mijlocul bazei).

Formula este:

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

, unde L este lungimea laturilor congruente, iar B este lungimea bazei.

4. Înălțimea corespunzătoare uneia dintre laturile congruente ale unui **triunghi isoscel** (înălțimea secundară):

După ce se calculează înălțimea corespunzătoare bazei (înălțimea principală),

conform indicațiilor anterioare, se aplică formula:

$$L_1 \cdot h_1 = L_2 \cdot h_2$$

unde  $L_1$  este lungimea bazei, iar  $h_1$  este lungimea înălțimii corespunzătoare bazei,  $L_2$  este lungimea uneia dintre laturile congruente, iar  $h_2$  este lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia (care trebuie aflată).

5. O înălțime dintr-un **triunghi oarecare**:

a) Dacă se cunoaște o altă înălțime, se aplică formula:

$$L_1 \cdot h_1 = L_2 \cdot h_2$$

unde  $h_1$  este înălțimea cunoscută,  $L_1$  este lungimea

laturii corespunzătoare ei,  $h_2$  este lungimea înălțimii de aflat, iar  $L_2$  este lungimea laturii corespunzătoare acesteia.

b) Dacă lungimile laturilor sunt numere raționale (fără radicali), se va afla aria

triunghiului prin formula lui Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

, unde  $a, b, c$

reprezintă lungimile laturilor triunghiului, iar  $p$  este mărimea semiperimetrului

$$A = \frac{B \cdot h}{2}$$

triunghiului. După aceea se va înlocui valoarea găsită în formula din care se va obține lungimea înălțimii căutate.

( $B$  este lungimea laturii corespunzătoare înălțimii căutate.)

c) Dacă se cunoaște măsura unui unghi al triunghiului ( $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ ), iar înălțimea căutată este latură a unui triunghi dreptunghic din care face parte și unghiul cu măsura cunoscută ( $u < 90^\circ$ ), se va folosi definiția funcției trigonometrice sinus, sau tangentă. Din această definiție se va afla lungimea înălțimii căutate ca al patrulea termen al unei proporții.

(Dacă  $u > 90^\circ$ , atunci se va folosi în același fel suplementul său.)

d) Dacă se cunoaște măsura unui unghi al triunghiului ( $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ,$

$150^\circ$ ), se va afla aria triunghiului prin formula:

$$A = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot \sin u}{2}$$

, unde  $u$

este măsura unghiului cunoscut, iar  $L_1$  și  $L_2$

sunt lungimile laturilor care formează acest unghi. După aceea se va înlocui

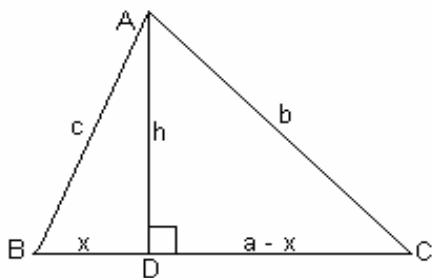
valoarea găsită în formula

$$A = \frac{B \cdot h}{2}$$

, din care se va obține lungimea înălțimii căutate.

( $B$  este lungimea laturii corespunzătoare înălțimii căutate.)

e) Dacă nici una din variantele anterioare nu ne convine, se va folosi



"procedeul cu  $x$  " :

Dacă  $BC = a$  ;  $AC = b$  ;  $AB = c$  și  $AD \perp BC$ ,

Atunci notăm  $AD = x$  și  $\Rightarrow DC = a - x$ .

Apoi cu teorema lui Pitagora în  $\triangle ABD \Rightarrow$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2, \text{ iar}$$

Cu teorema lui Pitagora în  $\triangle ACD \Rightarrow$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = b^2 - (a - x)^2.$$

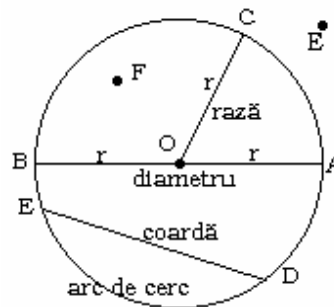
Egalând apoi cele două expresii ale lui  $AD^2$  obținem ecuația :  $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$ , care prin rezolvare dă lungimea segmentului  $BD$  și aplicând din nou teorema lui Pitagora în  $\triangle ABD$  vom obține ceea ce dorim (lungimea segmentului  $AD$ ).

**ATENȚIE:** Cunoștințele despre aflarea lungimii unei înălțimi dintr-un triunghi sunt foarte necesare la rezolvarea problemelor referitoare la **distanța de la un punct la o dreaptă**, atât în cadrul geometriei plane cât și în cel al geometriei în spațiu.

## CERCUL - definiții și teoreme

Se numește loc geometric, mulțimea tuturor punctelor din plan sau spațiu care satisfac o condiție dată.

**Cercul** este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța  $r$  ( $r > 0$ ) față de un punct fix.



- Punctul fix se numește **centrul** cercului.
- Distanța de la centrul cercului la un punct de pe cerc se numește **raza** cercului.
- Notăția  $C(O; r)$  reprezintă cercul cu centrul  $O$  și raza  $r$ .  $C(O; r) = \{A \mid AO = r\}$ .
- $\{F \mid FO < r\} = \text{Int } C(O; r)$  este **interiorul** cercului.
- $C(O; r) \cup \text{Int } C(O; r) = D(O; r)$  este **discul** cu centrul  $O$  și raza  $r$ .
- $\{E \mid EO > r\} = \text{Ext } C(O; r)$  este **exteriorul** cercului.
- **Coarda** este segmentul determinat de două puncte distincte de pe cerc. De exemplu segmentul  $[DE]$  este coardă.
- **Diametrul** este coarda care trece prin centrul cercului. Segmentul  $[AB]$  este diametru.  $AB = 2r$ . Diametrul este cea mai mare coardă dintr-un cerc.
- **Arcul de cerc** este porțiunea dintr-un cerc cuprinsă între două puncte distincte ale cercului.

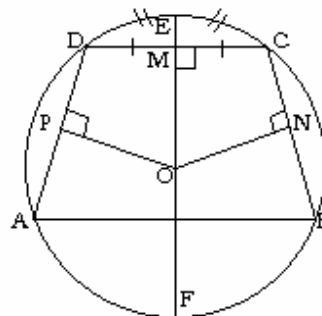
### TEOREME REFERITOARE LA ARCE ȘI COARDE

1. În același cerc sau în cercuri congruente la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc, la coarde congruente corespund arce congruente.

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \Leftrightarrow [AD] \equiv [BC].$$

2. Diametrul perpendicular pe o coardă împarte coarda și arcele corespunzătoare în părți congruente.  
Ipoteză:  $EF = 2r$ ;  $EF \perp DC$ ;  $EF \cap DC = \{M\}$ .

Concluzie:  $[DM] \equiv [MC]$  și  $\widehat{DE} \equiv \widehat{EC}$ .



3. Arcele de cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente.  
Ipoteză:  $AB \parallel CD$ ;  $A, B, C, D \in C(O, r)$ .

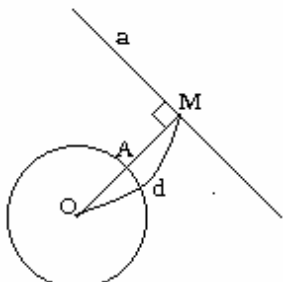
Concluzie:  $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$ .

4. Coardele egal depărtate de centru sunt congruente.  
Ipoteză:  $OP \perp AD$ ;  $ON \perp BC$ ;  $[OP] \equiv [ON]$ .  
Concluzie:  $[AD] \equiv [BC]$ .

## POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREAPTE FAȚĂ DE UN CERC

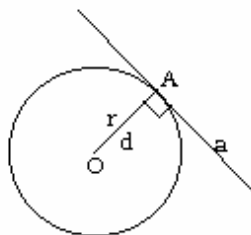
Dacă  $a$  este o dreaptă și  $C$  un cerc, numim **distanță** de la centrul cercului la dreaptă lungimea perpendicularei din centrul cercului pe dreaptă.  $OM \perp a \Rightarrow OM = d(O; a) = d$ .

1. Dacă  $d > r$ , dreapta  $a$  este **exterioară** cercului.



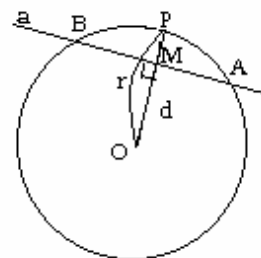
$$a \cap C(O; r) = \emptyset \Leftrightarrow d > r.$$

2. Dacă  $d = r$ , dreapta  $a$  este **tangentă** la cerc.



$$a \cap C(O; r) = \{A\} \Leftrightarrow d = r.$$

3. Dacă  $d < r$ , dreapta  $a$  este **secantă** la cerc.



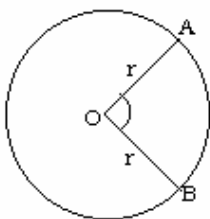
$$a \cap C(O; r) = \{A; B\} \Leftrightarrow d < r.$$

### Consecințe:

- O dreaptă care este tangentă la un cerc, este perpendiculară pe raza dusă la punctul de tangentă.
- Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce exact două tangente la acel cerc.
- Lungimile celor două tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale.
- Dacă un patrulater are toate laturile tangente la un cerc, atunci se numește **patrulater circumscris** cercului (cercul este înscris în patrulater).
- Dacă un patrulater este circumscris unui cerc, atunci suma lungimilor laturilor sale opuse este aceeași.
- Dacă un patrulater are suma lungimilor a două laturi opuse egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi, atunci este un **patrulater circumscriptibil**.

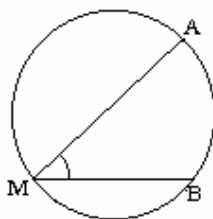
### UNGHIURI RAPORTATE LA UN CERC.

1. Unghi la centru.



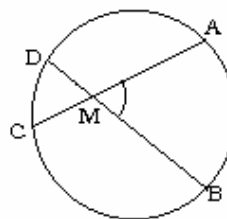
$$m(\angle AOB) = m(\widehat{AB})$$

2. Unghi înscris în cerc.



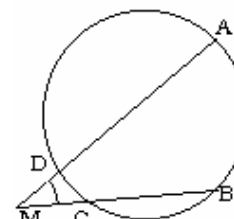
$$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$$

3. Unghi cu vârful în interiorul cercului.



$$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})]$$

4. Unghi cu vârful în exteriorul cercului.



$$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})]$$

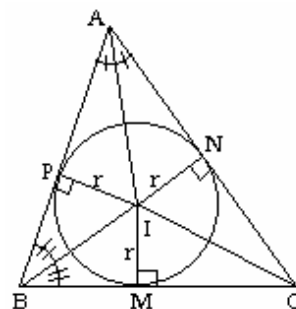
### Consecințe:

- Două unghiuri înscrise în același cerc și care cuprind același arc între laturile lor sunt unghiuri congruente.
- Un unghi înscris într-un semicerc are măsura de  $90^\circ$ .
- Măsura unui unghi care are vârful pe un cerc și este format de o coardă și o tangentă la un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins în interiorul unghiului.
- Un triunghi înscris într-un semicerc este dreptunghic (ipotenuza lui este diametrul cercului).
- Patru puncte aflate pe un cerc se numesc **puncte conciclice**.

5. Dacă un patrulater are toate vârfurile pe un cerc, atunci este un **patrulater înscris în cerc**.
6. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci vârfurile sale sunt egal depărtate de centrul cercului.
7. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci unghiurile sale opuse sunt suplementare.
8. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci orice unghi exterior al său este congruent cu unghiul opus interior.
9. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci un unghi format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.
10. Dacă un patrulater are una din proprietățile 6, 7, 8, 9, atunci este **patrulater inscriptibil** și are toate celelalte proprietăți ale patrulaterului înscris în cerc.

**Triunghiul circumscris unui cerc** are laturile tangente la acel cerc. Cercul care este tangent la laturile unui triunghi se numește **cerc înscris în triunghi**, iar centrul său  $I$  este intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

- triunghiul  $ABC$  este triunghiul circumscris cercului  $C(I; r)$ .
- $C(I; r)$  este cercul înscris în triunghiul  $ABC$ .
- $r$  este raza cercului înscris:  $IM = IN = IP = r$ .
- $r = \frac{2 \cdot A}{P}$ , unde  $A$  este aria triunghiului  $ABC$ , iar  $P = AB + AC + BC$ .



**Triunghiul înscris într-un cerc** are vârfurile situate pe cerc, iar laturile sunt coarde ale cercului. Cercul se numește **cerc circumscris triunghiului** și centrul său  $O$  este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.

- triunghiul  $ABC$  este triunghiul înscris în  $C(O; R)$ .
- $C(O; R)$  este cercul circumscris triunghiului  $ABC$ .
- $R$  este raza cercului circumscris:

$$OA = OB = OC = R. \quad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}, \text{ unde}$$

$a, b, c$  sunt lungimile laturilor, iar  $A$  este aria triunghiului  $ABC$ .

