BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 16

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Re z = 4, Im z = 3i, deci z = 4+ 3i.	3p
	Conjugatul numărului complex $\bar{z}$ = 4 - 3i.	2p
2.	$f(x)=g(x) \leftrightarrow x^2+3x-8=-x-3$.	1p
	Obţine ecuaţia $x^2+4x-5=0$, calculează $\Delta=4^2-4(-5)=36$ și obţine $x_1=1$, $x_2=-5$.	2p
	Calculează $f(1)=-4$, $f(-5)=2$ și obţine $G_f \cap G_g=\{A, B\}$, A(1, -4), B(-5, 2).	2p
3.	$(\sqrt[3]{2x+1})^3=(x+1)^3$.	1p
	$2x+1=x^3+3x^2+3x+1 \leftrightarrow x^3+3x^2+x=0$	
	$x(x^2+3x+1)=0$ de unde $x_1=0$, $x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta=b^2-4ac=5$, $x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, deci	2p
	$S=\{0, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\}$.	2p
4.	Numărul numerelor naturale de două cifre este 90.	2p
	Numerele divizibile cu 6 din mulţimea numerelor naturale de două cifre sunt: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96; numărul lor este 15.	1p
	$p=\frac{nr.cazuri favorabile}{nr.cazuri posibile}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$	2p
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{i}-2\vec{j}$.	2p
	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+2\vec{j}+2(\vec{i}-2\vec{j})=5\vec{i}-2\vec{j}$.	3p

www.mateinfo.ro

6.	Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ $AB=c=8,\ \sin C=\sin\frac{\pi}{3}$. După înlocuiri şi calcule $\frac{c}{\sin C}=2R$, $\frac{8}{\sin\frac{\pi}{3}}=8\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A_0=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}$, $A^t_2=\begin{pmatrix}1&6&7\\3&3&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}$ $A_0+A^t_2=\begin{pmatrix}2&7&5\\3&4&-1\\3&-1&-6\end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}\,(A_0+A^t_2)=2+4-6=0$	2p 3p
b)	$CA_0=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\3&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&6\\-3&0&1\\2&3&-6\end{pmatrix}$. Primele două puncte se acordă pentru calculul elementelor primei linii iar celelalte trei puncte se acordă pentru calculul elementelor celorlalte două linii.	2p 3p
c)	$A_p-B_p=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2p&1&0\\p+3&1&1\end{pmatrix}$ $\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot1&1&0\\1+3&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot2&1&0\\2+3&1&1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}0&1&-2\\2\cdot n&1&0\\n+3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\2\sum_{p=1}^{n}p&n&0\\\sum_{p=1}^{n}p+3n&n&n\end{pmatrix}$ cu $\sum_{p=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}$, deci $\sum_{p=1}^{n}(A_p-B_p)=\begin{pmatrix}0&n&-2n\\n(n+1)&n&0\\n(n+7)/2&n&n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}0&1&-2\\n+1&1&0\\(n+7)/2&1&1\end{pmatrix}$	1p 2p 2p

www.mateinfo.ro

2. a)	$f(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + a$	1p
	$f(-2) = -8 + 4a - 2 + a = 5a - 10$.	3p
	$f(-2) = 5(a - 2)$.	1p
b)	Pentru $a = 2$, plinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + 2$.	1p
	După gruparea termenilor şi scoterea factorului comun, f devine: $(X^2 + 1)(X + 2)$.	2p
	Rădăcinile polinomului sunt $x_{1,2} = \pm i$, $x_3 = -2 \Rightarrow S = \{-2, \pm i\}$.	2p
c)	Dacă x_k este o rădăcină a polinomului f, $x_k^3 = -a x_k^2 - x_k - a$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.	2p
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) - 3a$.	
	Din relaţiile lui Viète $(x_1 + x_2 + x_3 = -a,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1,\ x_1x_2x_3 = -a)$	2p
	$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2$.	
	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a(a^2 - 2) + a - 3a = -a^3$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Formula: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$.	2p
	$f'(x) = (\sqrt{x^2+4})' = \dfrac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.	2p
	$f'(-2) = \dfrac{-2}{\sqrt{(-2)^2+4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.	1p
b)	Ecuaţia asimptotei oblice este $y = mx + n$.	1p
	$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \pm 1 \Rightarrow$ $n_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 0$,	3p
	$n_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = 0$.	
	$y = \pm x$ la $\pm\infty$.	1p

www.mateinfo.ro

c)	$f'' > 0 \Rightarrow f$ convexă, $f'' < 0 \Rightarrow f$ concavă. Formula $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Din subpunctul a) $\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$. După calcule se obţine $f''(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} > 0 \Rightarrow f$ convexă.	1p 1p 3p
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\Big\|_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{6}$.	2p 2p 1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$. $I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$. $I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\, I_{n-1},\ n \in \mathbf{N}^*$ Pentru $n = 2$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2\, I_1$, din punctul a) $I_1 = \int f_1(x)dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.	1p 1p 1p 2p
c)	$L_n = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim_{x\to\infty}[-x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt] = n\, L_{n-1}$. $L_n = n\, L_{n-1} = n(n-1)\, L_{n-2} = n(n-1)(n-2)\, L_{n-3} = \ldots = n!\, L_1$ $L_1 = \lim_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\Big\|_0^x) = \lim_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x} + 1) = 1 \Rightarrow L_n = n!$	2p 1p 2p

www.mateinfo.ro