BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 17

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(x+1)^2 = 3\cdot 12 \leftrightarrow x + 1 = \pm 6 \Rightarrow x = 5$ deoarece termenii progresiei sunt pozitivi. Termenii sunt 3, 6, 12 şi suma lor este 21.	3p 2p
2.	Coordonatele vârfului $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. $\frac{-b}{2a} = 1 \leftrightarrow -b = 2a$, $\frac{-\Delta}{4a} = 2 \leftrightarrow -b^2 + 4ac = 8a$ de unde după înlocuiri $\Rightarrow -b^2 + 2b = 0 \leftrightarrow b(2-b) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$, $b_2 = 2$. Se reţine $b = 2$ deoarece b este nenul şi atunci $a = -1$.	1p 3p 1p
3.	$2^{\sqrt{x^2-4}} = 2^{x-2} \leftrightarrow \sqrt{x^2-4} = x-2$. Condiţii de existenţă: $x^2 - 4 \geq 0$, $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. $(\sqrt{x^2-4})^2 = (x-2)^2 \leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \leftrightarrow 4x = 8 \leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$.	1p 2p 2p
4.	$\overline{ab}$ par $\Rightarrow b \in \{4, 6\}$. Numerele care îndeplinesc condiţia: 44, 46, 54, 56, 64, 66, 74, 76.	2p 3p
5.	Distanţa de la punctul M la dreapta d se calculează după relaţia: $\frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $y = \frac{-4x+1}{7} \leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0$, ecuaţia dreptei. $d(M, d) = \frac{\lvert 4(-2) + 7(-1) - 1 \rvert}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{\lvert -16 \rvert}{\sqrt{65}} = \frac{16\sqrt{65}}{65}$.	2p 1p 2p
6.	Formula: $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$.	1p

	$E(a) = \sin a - \sin 5a = 2\sin\frac{a-5a}{2}\cos\frac{a+5a}{2} = 2\sin(-2a)\cos 3a = -2\sin 2a\cos 3a.$ $E(\frac{\pi}{6}) = -2\sin 2\frac{\pi}{6}\cos 3\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$	2p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$ $A^2 = 3p\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = 3pA.$	2p 2p 1p
b)	$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} p-1 & p & p \\ p & p-1 & p \\ p & p & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p-1)$ $\det(A + I_3) = \begin{vmatrix} p+1 & p & p \\ p & p+1 & p \\ p & p & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 + 2p^3 - 3p^2(p+1)$ $\det(A - I_3) = 3p - 1$, $\det(A + I_3) = 3p + 1 \Rightarrow \det(A - I_3)\det(A + I_3) = (3p)^2 - 1$	3p 2p
c)	$n = 1 \Rightarrow A = (3p)^{1-1} \cdot A$ Prin inducţie, se presupune $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1} = (3p)^{n-1} \cdot 3p \cdot A = (3p)^n \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall p \in \mathbf{R}$. Pentru $n = 2014$, $A^n = (3p)^{n-1} \cdot A$ se obţine $A^{2014} = (3p)^{2013} \cdot A$	1p 2p 2p
2. a)	$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 2(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + m = -2\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} + m = m - (4+\sqrt{2}).$ $f(-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m - (4+\sqrt{2}) = 0 \leftrightarrow m = 4+\sqrt{2}.$	2p 3p
b)	$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 5 - 1 = 0 \leftrightarrow (x^4 - 1) - 5x^2(x-1) + 5(x-1) = 0 \leftrightarrow$	2p

	$(x - 1)[(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5] = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ şi $(x^2 + 1)(x + 1) - 5x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)[x^2 + 1 - 5(x - 1)] = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ şi $x^2 - 5x - 6 = 0$ Deci $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow S = \{\pm 1, 2, 3\}$.	2p 1p
c)	$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (1^3 - 2\cdot 1^2 - 1 + m) + [(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + m] + (2^3 - 2\cdot 2^2 - 2 + m)(3^3 - 2\cdot 3^2 - 3 + m)$. $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = (m - 2) + (m - 2) + (m - 2) + ((m + 6) = 4m$.	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\dfrac{x+3}{x-3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-3, 3]$. $f(-x) = \ln\dfrac{-x+3}{-x-3} = \ln\dfrac{x-3}{x+3} = -\ln\dfrac{x+3}{x-3} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R} - [-3, 3]$ deci f impară. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \ln\dfrac{x+3}{x-3} = +\infty \Rightarrow x = 3$ ecuaţia asimptotei verticale la dreapta lui 3 şi analog $x = -3$ ecuaţia asimptotei verticale la stânga lui – 3.	2p 2p 1p
b)	Formulele $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ şi $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. $f'(x) = \left(\ln\dfrac{x+3}{x-3}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)'}{\dfrac{x+3}{x-3}} = \dfrac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2}\cdot\dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{-6}{x^2-9}$.	2p 3p
c)	$L = \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{x+3}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{x+3}{x-3} = 0 \Rightarrow$ nedeterminarea $+\infty\, 0$ $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{1}{x}} \Rightarrow$ nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$ Cu regula lui l’Hospital şi folosind rezultatul de la b) $\Rightarrow$	2p 1p 2p

	L = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln\frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{-6}{x^2-9}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2}{x^2-9} = 6.$	
2. a)	$\int f^2(x)dx = \int \cos^2 x dx = \int \dfrac{\cos 2x+1}{2}dx$. $\int \dfrac{\cos 2x+1}{2}dx = \dfrac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin 2x}{2}+x) + c$.	2p 3p
b)	$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\dfrac{g(x)}{f(x)})^2dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\dfrac{2^{tgx}}{\cos x})^2dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{4^{tgx}}{\cos^2 x}dx$. Cu schimbarea de variabilă $tg\, x = t$, $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\in[0, \dfrac{\pi}{4}] \Rightarrow t\in[0, 1]$, $V = \pi\int_0^1 4^t dt = \pi\dfrac{4^t}{\ln 4}\Big\|_0^1 = \pi\dfrac{4-1}{\ln 4} = \dfrac{3\pi}{\ln 4}$.	2p 1p 2p
c)	$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx$. Integrând prin părţi se obţine: $nI_n = \cos^{n-1} x \sin x\,\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + (n-1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2} x dx$, $I_{n-2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2} x dx \Rightarrow$ $nI_n - (n-1)I_{n-2} = \cos^{n-1} x \sin x\,\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^{n-1}\dfrac{1}{2} \leftrightarrow nI_n - (n-1)I_{n-2} =$ $\dfrac{(\sqrt{2})^n - (\sqrt{3})^{n-1}}{2^n}$.	1p 2p 2p