BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 18

Prof: Ciocănaru Viorica

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{5}{2})^{2-3x} \leftrightarrow (\frac{2}{5})^{4x-3} > (\frac{2}{5})^{-(2-3x)} \leftrightarrow 4x-3 < -(2-3x)$ deoarece $\frac{2}{5} < 1$. $4x-3 < -(2-3x) \leftrightarrow 4x-3 < 3x-2 \leftrightarrow x < 1 \Rightarrow$ S = $(-\infty, 1)$.	3p 2p
2.	Condiţii de existenţă: $x+1 > 0$, $\log_{0,5}(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1, x+1 < 1 \Rightarrow (-1, 0)$ **(1)** $\log_2(\log_{0,5}(x+1)) > 1 \leftrightarrow \log_{0,5}(x+1) > 2 \leftrightarrow x+1 < (0,5)^2 \leftrightarrow x < -\frac{3}{4}$ **(2)** Din (1) şi (2) $\Rightarrow x \in (-1, -\frac{3}{4})$.	2p 2p 1p
3.	$z^3 + 64 = (z+4)(z^2 - 4z + 16)$. $(z+4)(z^2-4z+16) = 0 \Rightarrow z_1 = -4$, $z^2 - 4z + 16 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 16 = -48$, $z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{3}}{2} = 2(1 \pm i\sqrt{3}) \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$. S = $\{-4, 2(1 \pm i\sqrt{3})\}$	1p 3p 1p
4.	$\div C_n^3, A_n^2, A_{n+1}^2 \leftrightarrow 2A_n^2 = C_n^3 + A_{n+1}^2$, $n \geq 3$ Formule $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $0 \leq k \leq n \Rightarrow 2\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ După simplificări, eliminarea numitorului şi reducerea termenilor asemenea ecuaţia devine $n^2 - 9n + 20 = 0$ cu soluţiile $n_1 = 4$, $n_2 = 5$.	2p 3p
5.	G$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$	1p

	$4 = \dfrac{3+(-2)+x_3}{3} \leftrightarrow x_3 = 11$, $3 = \dfrac{6+(-3)+y_3}{3} \leftrightarrow y_3 = 6 \Rightarrow$ $C(11, 6)$	3p 1p
6.	Din formula fundamentală $\Rightarrow$ $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a}$, $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = -\frac{4}{5}$, $\cos b = -\sqrt{1-\sin^2 b}$, $b \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \cos b = -\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$ $\Rightarrow \cos a - \cos b = -\frac{4}{5} - (-\frac{3}{5}) = -\frac{1}{5}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Dezvoltnd după prima linie se obţine: $d_1 = (a+b)\,[(a+b)^2 - a^2] - b^2\,(a+b-a) + ab\,(a-a-b)$ În urma calculelor algebrice se obţine: $d_1 = 2ab(a+b)$.	3p 2p
b)	Cu una din regulile de calcul ale determinantului de ordinul 3 se obţine: $d_2(0) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ $d_2(0) = 48 + 64 + 135 - (96 + 40 + 108) = 3$.	2p 3p
c)	$d_2(x) = \begin{vmatrix} 1+4x & 9 & x+4 \\ 2+5x & 8 & 2x+5 \\ 3+6x & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & x+4 \\ 2 & 8 & 2x+5 \\ 3 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 4 & 9 & x+4 \\ 5 & 8 & 2x+5 \\ 6 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = d_2^1(x) + x\, d_2^2(x)$ **(1)** $d_2^1(x) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & x+4 \\ 2 & 8 & 2x+5 \\ 3 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ **(2)** $d_2^2(x) = \begin{vmatrix} 4 & 9 & x+4 \\ 5 & 8 & 2x+5 \\ 6 & 8 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ **(3)**	1p 2p 2p

	Din **(1)**+ **(2)**+ **(3)** $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ $x \in \{\pm 1\}$.	
2. a)	$A_x, A_y \in M \Rightarrow A_x \cdot A_y \in M$ $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. $A_x \cdot A_x = A_{x+y} \in M$	1p 3p 1p
b)	$\forall\ A_x, A_y, A_z \in M$, $(A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_x \cdot (A_y \cdot A_z)$ $(A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_{x+y} \cdot A_z = A_{x+y+z}$, $A_x \cdot (A_y \cdot A_z) = A_x \cdot A_{y+z} = A_{x+y+z}$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$. $A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \ldots \cdot A_{n^2} = A_{1+4+\ldots.n^2}$, $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $A_{1+4+\ldots.n^2} = A_{55} \Rightarrow$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55 \leftrightarrow n(n+1)(2n+1) = 5 \cdot 6 \cdot 11 \Rightarrow n = 5$	3p 2p
c)	$\forall\ A_x \in M$, $\exists\ A_{x'} \in M$ $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e$ **(1)** unde e este elementul neutru $\exists\ A_e \in M$, $A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x$ $\forall\ A_x \in M$, din punctul a) $A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0$ **(2)** În relaţia **(1)** înlocuind e cu valoarea din relaţia **(2)** $\Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \leftrightarrow x' + x = 0 \leftrightarrow x' = -x$ $A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Ecuaţia tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $f'(x) = (\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2})' = \frac{(2x-2)(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2x + 3)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$. $y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.	2p 2p 1p

b)	Pentru D , $f(x) \in [-1, 1]$. $-1 \le \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1 \Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \le 1$ **(1)** şi $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \ge -1$ **(2)** . **(1)** $\leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$. **(2)** $\leftrightarrow \frac{2x^2-5x+5}{x^2-3x+2} \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$ $g(-1) = arcsin\ f(-1) = arcsin\ 1 = \frac{\pi}{2}$.	1p 2p 2p
c)	L= $\lim_{x\to\infty}(f(x))^{3x-g(-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{3x-\frac{\pi}{2}}$. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = 1,\ \lim_{x\to\infty}(3x-\frac{\pi}{2}) = +\infty$. Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1\right)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{3x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}\right]^{\frac{(3x-\frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2-3x+2}} =$ $e^3 \Rightarrow L = e^3$.	1p 2p 2p
2. a)	$\int \frac{f_n(x)}{x^n}dx = \int \frac{x^n \ln x}{x^n}dx = \int \ln x dx$. Integrând prin părţi, se obţine: $\int \ln x dx = x\ ln\ x - \int dx = x\ ln\ x - x + c$.	2p 3p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{1}{f_1(x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}dx$. Se foloseşte schimbarea de variabilă $ln\ x = t$, $(ln\ x)' = 1/x$, $x \in [e, e^2] \Rightarrow t \in [1, 2]$. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = ln\ t \Big\|_1^2 = ln\ 2 - ln\ 1 = ln\ 2$	1p 2p 2p

c)	$V = \pi \int_1^2 g^2(x)dx = \pi \int_1^2 (\frac{f_n(x)}{x^n})^2 dx = \pi \int_1^2 \ln^2 x dx$. Integrând prin părţi, se obţine: $V = \pi \int_1^2 \ln^2 x dx = \pi (x \ln^2 x\|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x dx) = \pi (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) \|_1^2$. S-a folosit rezultatul de la subpunctul a). $V = \pi(2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 4) - \pi(\ln^2 1 - 2 \ln 1 + 2) = 2\pi(\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 2)$.	2p 2p 1p