BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 21

Prof: Ciocănaru Viorica

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{12} = ((1+i)^2)^6 = (2i)^6 = -2^6$, $i^2=-1$, $i^{2012} = (i^4)^{503} = 1$. $\Rightarrow z = \frac{(1+i)^{12}}{i^{2012}} = -2^6 \in \mathbf{Z}$, $\bar{z} = z = -2^6$ $\Rightarrow z, \bar{z} \in \mathbf{Z}$.	3p 2p
2.	$S = x_1 + x_2 = -a$, $P = x_1 x_2 = b$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)$. $x_1^3 + x_2^3 = (-a)^3 - 3b(-a) = -a^3 + 3ab \in \mathbf{Z}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$.	1p 2p 2p
3.	$2^{2x+1} + 2^{x-1} = 132 \leftrightarrow 2\cdot 2^{2x} + \frac{2^x}{2} = 132$. $2^x = t, t>0$ $2\cdot t^2 + \frac{t}{2} = 132 \leftrightarrow 4\cdot t^2 + t - 264 = 0 \leftrightarrow t^2 + \frac{t}{4} - 66 = 0 \leftrightarrow (t-8)(t+\frac{33}{4}) = 0$. $\Rightarrow t_1 = 8$, $t_2 = -\frac{33}{4} < 0$ $\Rightarrow 2^x = 8 \leftrightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$.	1p 2p 2p
4.	$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $T_{k+1} = \frac{165}{2^{11}}$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k+1=9$, $n=11$, $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. $C_{11}^8 a^3 (\frac{1}{2\sqrt{2}})^8 = \frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow \frac{11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3} a^3 \frac{1}{2^8\cdot2^4} = \frac{165}{2^{11}} \leftrightarrow a^3 = 2$, $a \in \mathbf{R} \Rightarrow a \in \{\sqrt[3]{2}\}$.	2p 3p
5.	$d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$, d: $y - y_M = m_d(x - x_M)$ $d \cap AB = \{M\}$, $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{2}{5}$, $\Rightarrow m_d = \frac{5}{2}$, $M(\frac{1}{2}, 3)$	2p 3p

	$\Rightarrow d:\ y-3=\frac{5}{2}(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow d: 10x-4y+7=0.$	
6.	$tg^2 a=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1-\cos^2 a}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}-1 \Rightarrow \cos^2 a=\frac{1}{tg^2 a+1}.$ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$. $\Rightarrow \cos^2 a=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2a = 2\cdot\frac{1}{3}-1 \leftrightarrow \cos 2a=-\frac{1}{3}.$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix} 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \\ 3p^2 & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$ $A^2 = 3p\begin{pmatrix} p & p & p \\ p & p & p \\ p & p & p \end{pmatrix} = 3pA.$	2p 2p 1p
b)	$\det(A-I_3)=\begin{vmatrix} p-1 & p & p \\ p & p-1 & p \\ p & p & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3+2p^3-3p^2(p-1)$ $\det(A+I_3)=\begin{vmatrix} p+1 & p & p \\ p & p+1 & p \\ p & p & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3+2p^3-3p^2(p+1)$ $\det(A-I_3)=3p-1,\ \det(A+I_3)=3p+1 \Rightarrow \det(A-I_3)\det(A+I_3)=(3p)^2-1$	3p 2p
c)	$n=1 \Rightarrow A=(3p)^{1-1}\cdot A$ Prin inducţie, se presupune $A^n=(3p)^{n-1}\cdot A$ adevărată şi se calculează $A^{n+1}=(3p)^{n-1}\cdot A^2$ din punctul a) $\Rightarrow A^{n+1}=(3p)^{n-1}\cdot 3p\cdot A=(3p)^n\cdot A,\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\ \forall p\in\mathbf{R}.$ Pentru $n=2012$, $A^n=(3p)^{n-1}\cdot A$ se obţine $A^{2012}=(3p)^{2011}\cdot A$	1p 2p 2p

2. a)	$\exists e \in \mathbf{Z}, x \circ e = e \circ x = x, \ \forall x \in \mathbf{Z}$. Pentru $n = 2$, $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6, \ \forall x, y \in \mathbf{Z}$ şi $x \circ e = xe - 2(x + e) + 6$ de unde $xe - 2(x + e) + 6 = x \leftrightarrow e(x - 2) = 3x - 6 \leftrightarrow e = 3$. $S = \{3\} \ \ \forall x \in \mathbf{Z}$.	1p 3p 1p
b)	$\begin{cases} x * y = x + y - n \\ x \circ y = xy - n(x+y) + n(n+1) \end{cases}$ devine $\begin{cases} x + y - n = 1 \\ xy - n(x+y) + n(n+1) = n \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y = n+1 \\ xy = n \end{cases}$ **(1).** Sistemul **(1)** este simetric deci $S = \{(1, n), (n, 1)\}, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.	3p 2p
c)	$\forall x, y \in \mathbf{Z} \ \ f(x * y) = f(x) + f(y), \ \ f(x * y) = a(x + y - n) + b, \ \ f(x) + f(y) = a(x + y) + 2b \Rightarrow$ $-an = b$ **(1).** $\forall x, y \in \mathbf{Z} \ \ f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y), \ \ f(x \circ y) = a(xy - n(x + y) + n(n + 1)) + b, \ \ f(x) \cdot f(y) = (ax + b)(ay + b) \ \Rightarrow a = a^2$ **(2),** $an(n + 1) + b = b^2$ **(3)**. Din **(1)**, **(2)** şi **(3)** $\Rightarrow a = 1, b = -n$ deci $f(x) = x - n$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(1) = ln\,(3 - 2) = 0, \ \ h(1) = 2 + 1 - 3 = 0 \ \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(3x-2)}{2x^2 + x - 3}$ este în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ Cu regula lui l'Hopital , $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{h'(x)}$, $f'(x) = (ln\,(3x - 2))' = \dfrac{3}{3x-2}$, $h'(x) = (2x^2 + x - 3)' = 4x + 1$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{3}{3x-2}}{4x+1} = \dfrac{3}{5}$. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{3}{5}$.	2p 2p 1p
b)	Formula $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ şi $k(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$. $D = \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right) - \{1\}$.	1p 1p 1p

	$k'(x) = \left(\dfrac{\ln(3x-2)}{2x^2+x-3}\right)' = \dfrac{(\ln(3x-2))'(2x^2+x-3)-(2x^2+x-3)'\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2}$ $k'(x) = \dfrac{\frac{3}{3x-2}(2x^2+x-3)-(4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2} = \dfrac{3(2x^2+x-3)-(3x-2)(4x+1)\ln(3x-2)}{(2x^2+x-3)^2(3x-2)}$ domeniul de derivabilitate este $(\frac{2}{3}, +\infty)$ - {1}.	2p
c)	$g(x) = log_x(x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$, $x>1$. Cu formula de la punctul b) $g'(x) = \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)'$, $(ln\ x)' = \dfrac{1}{x}$ şi $(ln\ (x+1))' = \dfrac{1}{x+1}$. $g'(x) = \dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$, numitorul este pozitiv, $xlnx$ este strict crescătoare pentru $x > 1$ iar $\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0$ deci g este descrescătoare pentru $x > 1$. $g(x) = log_x(x+1) \Rightarrow g(5) = log_5 6$, $g(3) = log_3 4$, $g(5) < g(3)$ cu $3 < 5$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$\int f_1(x)dx = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]\Big\vert_{\ln 2}^{\ln 3} = -(\ln 3+1)e^{-\ln 3} + (\ln 2+1)e^{-\ln 2} = -(\ln 3+1)\frac{1}{3} + (\ln 2+1)\frac{1}{2}$. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^{-x}dx = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2} - (\ln\sqrt[3]{3} + \frac{1}{3}) = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{1}{6}$.	2p 2p 1p
b)	$I_n = \int f_n(x)dx = \int x^n e^{-x}dx$. $I_n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$. $I_{n-1} = \int x^{n-1}e^{-x}dx \Rightarrow I_n = -x^n e^{-x} + n\ I_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$ Pentru $n = 2$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2\ I_1$, cu din punctul a) $I_1 = \int f_1(x)dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$ $I_2 = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.	1p 1p 1p 2p

c)	L $_n = \lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty}[-x^n e^{-x} + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt] = n$ L $_{n-1}$. L $_n = n$ L $_{n-1} = n(n-1)$ L $_{n-2} = n(n-1)(n-2)$ L $_{n-3}$ = ... = $n!$ L$_1$ L$_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = \lim\limits_{x\to\infty}(-(t+1)e^{-t}\|_0^x) = \lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{x+1}{e^x}+1) = 1 \Rightarrow$ L $_n = n!$	2p 1p 2p