BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Prof: Alexandru Elena-Marcela

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=i,\quad \bar{z}=-i$	3p
	$a=0,\quad b=-1.$	2p
2.	$V(x_V,y_V),\quad x_V=-\dfrac{b}{2a},\quad y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}$	1p
	$x_V=\dfrac{6}{2}=3,\quad y_V=-\dfrac{16}{4}=-4$	2p
	$V(3,-4)$.	2p
3.	$3^x+\left(3^2\right)^{\frac{x+1}{2}}=36$	1p
	$3^x+3^{x+1}=36\Rightarrow 3^x(1+3)=36\Rightarrow 3^x\cdot 4=36$ sau $3^x=t>0\Rightarrow t+3t=36\Rightarrow t=9\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2$	2p
	$3^x=9\Rightarrow x=2$	2p
4.	$M\times M$ are 36 elemente $\Rightarrow$ 36 cazuri posibile	2p
	(x,y) pentru care $x+y=5$ sunt (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile	3p
	P= $\dfrac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.	
5.	$A(1,a), B(4,1), C(-1,-4)$ sunt coliniare dacă: $\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 4 & 1 & 1\\ -1 & -4 & 1\end{vmatrix}=0$	2p
	$\Leftrightarrow 1-16-a+1-4a+4=0\Leftrightarrow -5a=10\Rightarrow a=-2$	3p
6.	$\sin B=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\dfrac{AC}{\sin B}=2R$	1p

	$\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R\Rightarrow\dfrac{6\cdot\cancel{2}}{\sqrt{3}}=\cancel{2}R\Rightarrow R=2\sqrt{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$AX=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3x&5+3y\\x&y\end{pmatrix}$ $XA=\begin{pmatrix}3&5\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&14\\x&3x+y\end{pmatrix}$ $A+X=\begin{pmatrix}4&8\\x&y+1\end{pmatrix}$.	2p 2p 1p
b)	$AX=XA\Rightarrow\begin{pmatrix}3+3x&5+3y\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&14\\x&3x+y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3+3x=3\\5+3y=14\\y=3x+y\end{cases}$ $\Rightarrow x=0,\quad y=3$.	3p 2p
c)	$n=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ Presupunem adevărată relația pentru A^n și demonstrăm că $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1&3(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$ $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3+3n\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2. a)	$\Delta=0$ $\Delta=4m^2-4(m+1)^2=4m^2-4(m^2+2m+1)=-8m-4=0$ de unde rezultă $m=-\dfrac{1}{2}$.	1p 3p 1p
b)	$x_V=-\dfrac{b}{2a}\Rightarrow 2=-\dfrac{2m}{2(m+1)}\Rightarrow -2m=4m+4$ $\Rightarrow 6m=-4\Rightarrow m=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.	3p 2p
c)	$m=2\Rightarrow f(x)=(2+1)x^2+2\cdot 2x+2+1\Rightarrow f(x)=3x^2+4x+3$ $\begin{array}{l\|l} 3x^3+\ x^2-x-3 & 3x^2+4x+3 \\ \hline -3x^3-4x^2-3x & x\ -1 \\ \hline \end{array}$	2p 2p

	$/ \ -3x^2-4x-3$ $+3x^2+4x+3$ $/ \quad / \quad /$ $g(x)=(3x^2+4x+3)(x-1) \Rightarrow f(x)/g(x)$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-2}{x+!}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^x$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}$ $=e^{-2}$.	2p 2p 1p
b)	$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$ $=\frac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$ $=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$ $=\frac{2}{(x+1)^2}$.	1p 1p 1p 2p
c)	Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\Rightarrow f''(x)=\frac{-4}{(x+1)^3}$. Deoarece $f''(x)>0,\ x\in(-\infty,-1)$ $\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-\infty,-1)$.	1p 1p 1p 2p
2. a)	$0\le x^n e^{1-x}\le 1,\quad (\forall)\ x\in[0,1]$ $0\le \int_0^1 x^n e^{1-x}dx\le 1$ $0\le f_n(x)\le 1$.	2p 2p 1p
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 xe^{1-x}dx=-\int_0^1 x\cdot(-1)\cdot e^{1-x}dx$ $=-\int_0^1 x\cdot(e^{1-x})'dx=-[xe^{1-x}\mid_0^1-\int_0^1 e^{1-x}dx]$	1p 1p

	$=-(1+\int_0^1(-1)\cdot e^{1-x}dx)=$ $=-1-e^{1-x}\Big\|_0^1=-1-(1-e)=-1-1+e=e-2$.	1p 2p
c)	$I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx=\int_0^1 x^n\cdot(-e^{1-x})'dx$ $=x^n\cdot(-e^{1-x})\Big\|_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}dx$ $=-1+nI_{n-1}$ $=nI_{n-1}-1,\quad (\forall)\, n\geq 2$.	2p 1p 2p