CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010

Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A IX-A

1. a) Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât
$$2f(x)+3f(1-x)=2x-1, \forall x\in\mathbb{R}.$$

b) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+1$. Determinați: aria triunghiului mărginit de graficul funcției şi axele de coordonate, tangenta unghiului format de graficul funcției si axa O*x*, precum si distanța de la originea axelor la graficul funcției f.

2. a) Dacă $0\le\alpha\le\beta$ demonstrați că $\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}$.

b) Dacă $a,b,c\ge 0$ astfel încât $0\le a\le b+c$, demonstrați că
$$\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}.$$

3. a) Să se arate că mulțimea
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus x^2+2mx+9=0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}\setminus 2x^2+12x+m^2+9=0\right\}$$
are unul sau două elemente.

b) Calculați suma numerelor naturale mai mici sau egale decât 2010, care împărțite la 5 dau restul 4. Care este probabilitatea ca alegând un număr natural mai mic sau egal decât 2010 acesta să fie divizibil cu 5 dar să nu fie divizibil cu 10?

4. a) Dorind să-şi cumpere un laptop un elev constată că în cel de-al doilea magazin prețul este de 110% din prețul de la primul magazin, iar la al treilea magazin prețul este 90% din prețul de la al doilea magazin. De la care din cele trei magazine ar trebui cumpărat calculatorul?

b) Un cub are muchia de 8 cm. Pentru vopsirea lui se folosesc 160g vopsea. Dacă s-ar tăia cubul vopsit in cuburi cu latura de 2 cm câtă vopsea ar mai fi necesară pentru suprafețele noi apărute?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010
Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A X A

1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{a+b}{4}$.

b) $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \le \dfrac{a+b+c}{2}$. În ce condiții are loc egalitatea?

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\dfrac{6^x}{2^x+3^x} + \dfrac{15^x}{3^x+5^x} + \dfrac{10^x}{2^x+5^x} = \dfrac{2^x+3^x+5^x}{2}$.

2. a) Se consideră funcția

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 \frac{1}{\log_m 2} - \left(1 + 2\log_2 m\right)x + 1 + 2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{m^2}\right)}$$

Determinați $m > 0, m \ne 1$ astfel încât $D = \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemul $\begin{cases} x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 30 \\ x^2y + xy^2 = 2900 \end{cases}$

.

3. a) Folosind inducția matematică demonstrați egalitatea

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Calculați suma tuturor numerelor naturale pătrate perfecte mai mici decât 2010 şi care nu sunt divizibile cu 3.

4. a) Un bijutier are trei piese din aur de formă circulară şi de diametre diferite. Cele trei diametre sunt: 6 cm, 8 cm şi 10 cm. Grosimea pieselor este aceeaşi la toate cele trei piese. Cum poate împărți în patru părți egale în greutate cele trei piese, fără să le topească sau să le cântărească (doar prin măsurare şi tăiere)? Justificați.

b) Doru şi Remus construiesc un mozaic pătrat din plăci de gresie pătrate identice. Remus pune o placă neagră in centru. Doru pune 8 plăci albe în jurul ei, formând un al doilea pătrat. Remus pune 16 plăci negre în jurul acestora, formând al treilea pătrat. De câte plăci are nevoie Remus pentru a completa cel de-al unsprezecelea pătrat? Câte plăci a pus Doru dacă în total au fost 20 de pătrate?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010

Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XI-A

1. Din totalul elevilor unei şcoli 70% participă la cercul de matematică, iar 45% la cercul de informatică. Ştiind că fiecare elev participă la cel puțin un cerc şi 42 de elevi participă la ambele cercuri aflați câți elevi sunt în şcoala.

2. La teza de matematică de pe trimestrul I la clasa a X-a A s-au obținut următoarele note:

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	5	5	5	5	2

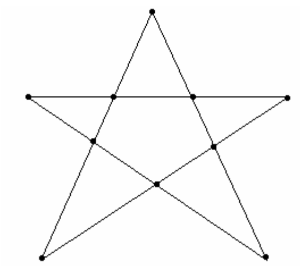
În clasa a X-a B s-au obținut următoarele note:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	2	4	2	7	8	6

a) Care clasă este cea mai bună?*(are media mai mare)*
b) Care clasă are dispersia mai mică?*(este mai omogenă)*

3. a) Pentru graful planar alăturat demonstrați relația:

Nr. Noduri+Nr. Circuite elementare=Nr. Muchii+1.



b) Demonstrați că un graf complet cu 5 noduri nu este graf planar.

4. Un profesor a corectat la examenul de bacalaureat 50 de lucrări. Făcând media notelor a obținut 5,02. Un coleg i-a atras atenția că nu a adunat punctul acordat din oficiu la fiecare lucrare. Ce medie va obține la lucrări după adăugarea acelui punct?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010

Filiera teoretică, profil umanist

CLASA A XII-A

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, care este matricea asociată unui graf.

a) Să se reprezinte graful asociat matricei date;

b) Câte drumuri de lungime trei conține graful ?

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\in M_{2,3}(R)$, transpusa sa $A^t\in M_{3,2}(R)$, $B=AA^t$ și punctele $P_k(a_k,b_k)$, $k\in\{1,2,3\}$.

a) Să se calculeze matricea B în cazul $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$;

b) Să se arate că $\det(B)\geq 0$, oricare ar fi punctele P_1,P_2,P_3.

3. Perechea de numere întregi (a, b) se numeşte *ideală* dacă $a^2-3b^2=1$.

a) Determinați $a\in Z$ pentru care perechea (a, 15) este *ideală*;

b) Definim compunerea a două perechi de numere întregi prin $(a,b)*(c,d)=(ac+3bd,ad+bc)$. Demonstrați că dacă (a, b) şi (c, d) sunt perechi *ideale* atunci şi compunerea lor este o pereche *ideală*.

4. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,2,3,...99,100. Un elev şterge două numere, fie ele *a* şi *b* şi scrie în locul lor numărul $a*b=ab-2a-2b+6$. Ce număr va rămâne pe tablă după 99 de paşi?

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7