

Colecie de probleme rezolvate cu mai multe solu ii

www.MateInfo.ro



Problema S pt mâni 16.08.2010 - 22.08.2010

Se consider trei cercuri $C_1(O_1, a)$, $C_2(O_2, b)$, $C_3(O_3, c)$ în interiorul unui cerc $C(O, R)$ tangente exterior între ele și tangente interior cercului $C(O, R)$.

Dac punctele O_1, O, O_2 sunt coliniare, atunci $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0$.

Prof. Iuliana Tra c

Solu ie autor:

Cu teorema lui Stewart în $\Delta O_1 O_2 O_3$ avem:

$$O_1 O_3^2 \cdot OO_2 + O_2 O_3^2 \cdot OO_1 - OO_3^2 \cdot O_1 O_2 = OO_1 \cdot OO_2 \cdot O_1 O_2 \quad (1)$$

Se g se te u or c $a+b=R=O_1 O_2$, $OO_2=a$, $OO_1=b$, $OO_3=R-c$

Rela ia (1) se transcrie: $(a+c)^2 \cdot a + (b+c)^2 \cdot b - (R-c)^2 \cdot R - a \cdot b \cdot R = 0$

sau $(a+c)^2 \cdot a + (b+c)^2 \cdot b - (a+b-c)^2 \cdot (a+b) - a \cdot b \cdot (a+b) = 0$

Dup efectuarea calculelor se ob ine:

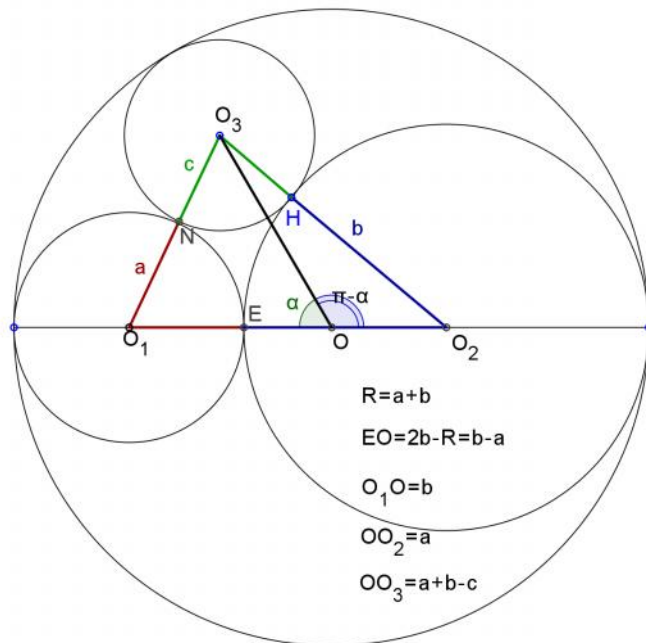
$$a^2 c + b^2 c + abc - a^2 b - ab^2 = 0$$

Împ r ind această egalitate cu $a^2 b^2 c$ ob inem:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0$$

Alte solu ii:

1) Prof. Constantin Telteu, COLEGIUL NATIONAL DE ARTE „REGINA MARIA”,
Constan a



Cu nota iile i observa iile de pe figur , în ΔO_1OO_3 avem:

$$\cos \widehat{O_3OO_1} = \frac{O_1O^2 + O_3O^2 - O_1O_3^2}{2 \cdot O_1O \cdot O_3O} = \frac{b^2 + (a+b-c)^2 - (a+c)^2}{2b(a+b-c)} = \frac{b^2 + ab - bc - 2ac}{b(a+b-c)};$$

Iar în ΔOO_2O_3 avem:

$$\cos \widehat{O_2OO_3} = \frac{OO_3^2 + OO_2^2 - O_2O_3^2}{2 \cdot OO_3 \cdot OO_2} = \frac{(a+b-c)^2 + a^2 - (b+c)^2}{2a(a+b-c)} = \frac{a^2 + ab - ac - 2bc}{a(a+b-c)}.$$

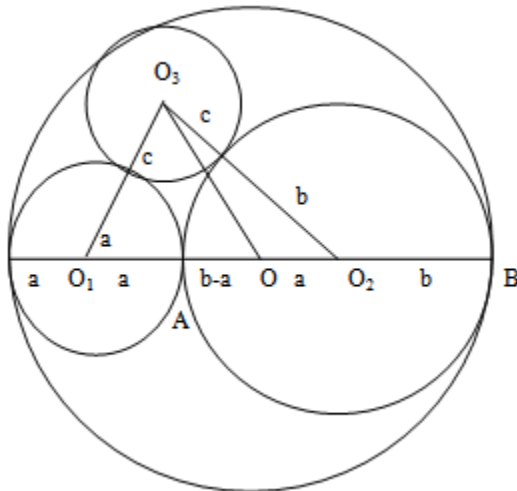
Dar deoarece în general $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, avem:

$$\cos \widehat{O_3OO_1} = -\cos \widehat{O_3OO_2} \Rightarrow$$

$$\frac{b^2 + ab - bc - 2ac}{b(a+b-c)} = -\frac{a^2 + ab - ac - 2bc}{a(a+b-c)} \Rightarrow ab^2 + a^2b - abc - 2a^2c = -a^2b - ab^2 + abc + 2b^2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab^2 + a^2b - abc - a^2c - b^2c = 0 \text{ care împ r it la } -a^2b^2c \text{ d rela ia din enun .}$$

2. Profesor Laura Radu , Liceul cu Program Sportiv , Gala i



$$2a + 2b = 2R \Rightarrow a + b = R \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OB = OO_2 + O_2B = OO_2 + b \\ OB = R \end{array} \right\} \Rightarrow OO_2 + b = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OO_2 + b = a + b \Rightarrow OO_2 = a$$

$$\left. \begin{array}{l} O_2A = b \\ O_2A = OO_2 + OA \end{array} \right\} \Rightarrow b = a + OA \Rightarrow OA = b - a$$

$$OO_3 = R - c = a + b - c, \quad O_1O = a + b - a = b$$

În ΔO_1OO_3 , aplicăm T. cosinusului :

$$\cos O_1 = \frac{O_1O^2 + O_1O_3^2 - OO_3^2}{2 \cdot O_1O \cdot O_1O_3} = \frac{b^2 + (a+c)^2 - (a+b-c)^2}{2b(a+c)} =$$

$$= \frac{b^2 + a^2 + 2ac + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab + 2bc + 2ac}{2b(a+c)} = \frac{4ac + 2bc - 2ab}{2b(a+c)} = \frac{2ac + bc - ab}{b(a+c)}$$

(1)

În $\Delta O_1O_2O_3$, aplicăm T. cosinusului :

$$\cos O_1 = \frac{O_1O_2^2 + O_1O_3^2 - O_2O_3^2}{2 \cdot O_1O_2 \cdot O_1O_3} = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (b+c)^2}{2(a+b)(a+c)} =$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 - b^2 - 2bc - c^2}{2(a+b)(a+c)} = \frac{2a^2 + 2ab + 2ac - 2bc}{2(a+b)(a+c)} =$$

$$\frac{a^2 + ab + ac - bc}{(a+b)(a+c)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Din (1) i (2)} &\Rightarrow \frac{2ac + bc - ab}{b} = \frac{a^2 + ab + ac - bc}{a + b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a^2c + abc - a^2b + 2abc + b^2c - ab^2 = a^2b + ab^2 + abc - b^2c \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a^2c + 2b^2c + 2abc - 2a^2b - 2ab^2 = 0 \quad / : 2a^2b^2c \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ac} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0 \end{aligned}$$

3. Prof. Corneliu M nescu-Avram, Grupul școlar de Transporturi Ploiești

Prima soluție : Egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab},$$

care este echivalentă cu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b}$$

(1)

Demonstrăm egalitatea (1) în ipoteza $R = a + b$ (2), care este echivalentă cu condiția ca punctele O_1, O, O_2 să fie coliniare (3).

Se definește curbura unui cerc prin $k = \pm \frac{1}{r}$, unde r este lungimea razei cercului. Semnul $+$ se ia pentru un cerc tangent exterior la alte cercuri. Dacă se dau pe rând cercuri tangente între ele ca în enunțul problemei, atunci între curburile lor $k_i, 1 \leq i \leq 4$, are loc relația lui

Descartes

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

(4)

Această egalitate poate fi rescrisă sub forma

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1},$$

(5)

unde semnul \pm reflectă faptul că în general există două soluții, care se reduc la una singură,

dacă $k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 = 0$ (6). Pentru $k_1 = \frac{1}{a}, k_2 = \frac{1}{b}, k_3 = -\frac{1}{R} = -\frac{1}{a+b}$ are loc

(6), iar din (5), pentru $k_4 = \frac{1}{c}$, se obține (1).

A doua soluție : Demonstrăm egalitatea $c = \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2}$ (7), care este echivalentă cu

egalitatea din enunț, în ipoteza (2). Notăm $m(\angle O_2OO_3) = \alpha$ și aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile O_1OO_3 și O_2OO_3 :

$$(a+c)^2 = (a+b-c)^2 + b^2 + 2b(a+b-c)\cos\alpha,$$

(8)

$$(b+c)^2 = (a+b-c)^2 + a^2 - 2a(a+b-c)\cos\alpha.$$

(9)

Eliminăm $\cos\alpha$ din (8) și (9) și obținem:

$$a(a+c)^2 + b(b+c)^2 = (a+b)(a+b-c)^2 + ab^2 + a^2b.$$

(10)

Coeficientul lui c^2 din cei doi membri ai egalității (10) este același, deci după ce reducem termenii asemenea obținem o ecuație liniară în c , cu soluția (7).

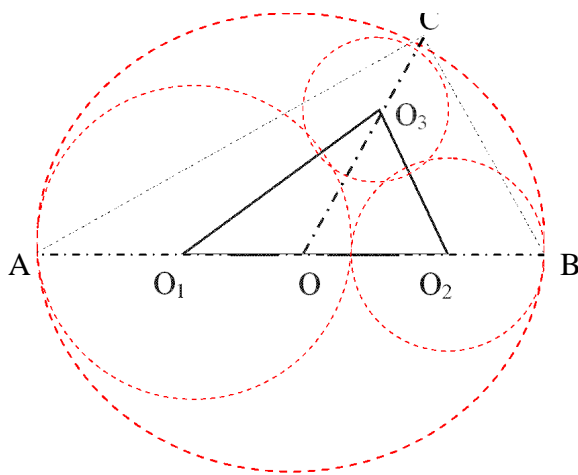
Note. Dacă are loc (1), atunci din (5) se deduce (6), de unde rezultă (2), deci și (3). Se obține astfel propoziția reciprocă: Dacă este adevărată egalitatea din enunț, atunci punctele O_1, O, O_2 sunt coliniare.

Problema are o istorie îndelungată. Ea a fost formulată mai general și rezolvată de *Apollonius din Perga* (sec. III î.Hr.) într-o carte, din păcate pierdută. *René Descartes* (1643) dă o nouă soluție, într-o scrisoare către prințesa *Elisabeta a Boemiei*. *Frederick Soddy* (1936) publică o soluție în versuri și extinde teorema la sfere. *Thorold Gosset* (1937) generalizează teorema la dimensiuni arbitrare.

Alte demonstrații, împreună cu analiza unor cazuri particulare sau generalizări, au fost date de *Gergonne* (1813), *Larmor* (1891), *Lachlan* (1893), *Coxeter* (1961), *Altshiller-Court* (1964), *Pedoe* (1970), *Boyd* (1982), *Gosper*, *Oldknow* (1996), *Eppstein* (2001), *Graham* ș.a. (2004), *Dergiades* (2007).

Figura geometrică obținută când centrul cercului exterior și centrele a două cercuri interioare sunt puncte coliniare se numește *arbelos* (gr. “cu titlul cizmarului”) și a fost studiat de numeroși matematicieni, din antichitate până în zilele noastre: *Arhimede*, *Pappus*, *Steiner*, ..., *Paul Yiu*.

4. Prof. Viorica Cioc naru, Grupul școlar Industrial Energetic, Craiova



$C(O_1, a), C(O_2, b), C(O_3, c), C(O, R)$

tangente, O_1, O, O_2 coliniare conduc la relațiile: $CO = AB/2 = R$;

$R = a + b; O_1O_2 = a + b; O_2O_3 = b + c;$
 $O_1O_3 = a + c; O_1O = b; OO_2 = a;$
 $OO_3 = a + b - c.$

Cu **teorema cosinusului** aplicat în ΔO_1O_3O respectiv în ΔO_2O_3O se obține:

$$(a+c)^2 = b^2 + (a+b-c)^2 - 2b(a+b-c)\cos(\angle O_1OO_3) \quad [1]$$

$$(b+c)^2 = a^2 + (a+b-c)^2 - 2a(a+b-c)\cos(\angle O_2OO_3) \leftrightarrow (b+c)^2 = a^2 + (a+b-c)^2 + 2a(a+b-c)\cos(\angle O_1OO_3) \quad [2]$$

Se înmulțește relația [1] cu a și relația [2] cu b și se obține:

$$(a+c)^2a = ab^2 + a(a+b-c)^2 - 2ab(a+b-c)\cos(\angle O_1OO_3) \quad [3]$$

$$(b+c)^2b = a^2b + b(a+b-c)^2 + 2ab(a+b-c)\cos(\angle O_1OO_3) \quad [4].$$

Prin adunarea membru cu membru a relațiilor [3] și [4] se obține:

$$(a+c)^2 a + (b+c)^2 b = ab^2 + a(a+b-c)^2 + a^2 b + b(a+b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$(a+c)^2 a + (b+c)^2 b = (a+b-c)^2(a+b) + ab(a+b) \quad \text{[5] relația lui Stewart} \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+c)^2 a + (b+c)^2 b - (a+b-c)^2(a+b) = ab(a+b) \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+c)^2 a - a(a+b-c)^2 + (b+c)^2 b - b(a+b-c)^2 = ab^2 + a^2 b.$$

Prin gruparea câte doi a termenilor din membrul stâng urmat de descompunerea diferentelor de pătrate se obține:

$$a[(a+c) - (a+b-c)][(a+c) + (a+b-c)] + b[(b+c) - (a+b-c)][(b+c) + (a+b-c)] = ab^2 + a^2 b \quad \Leftrightarrow \quad a(2c-b)(2a+b) + b(2c-a)(a+2b) = ab^2 + a^2 b \quad \Leftrightarrow$$

$$4a^2 c + 2abc - 2a^2 b - ab^2 + 2abc + 4b^2 c - a^2 b - 2ab^2 = ab^2 + a^2 b \quad \Leftrightarrow$$

$$4a^2 c + 4abc - 4a^2 b - 4ab^2 + 4b^2 c = 0 \quad | :4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 c + abc - a^2 b - ab^2 + b^2 c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c(a^2 + bc + b^2) - ab(a+b) = 0 \quad | : a^2 b^2 c \quad \Leftrightarrow \quad 1/b^2 + 1/ab + 1/a^2 - (1/bc + 1/ac) = 0 \quad \text{[6]}$$

unde $a, b, c > 0$.

[6] este relația cerută în problemă.

5. Prof. Silvia Mușoiu, Colegiul Național Gheorghe Ișcăi, București

Cum O_1, O_2 și O sunt coliniare, avem $2a+2b=2R$, adică $a+b=R$.

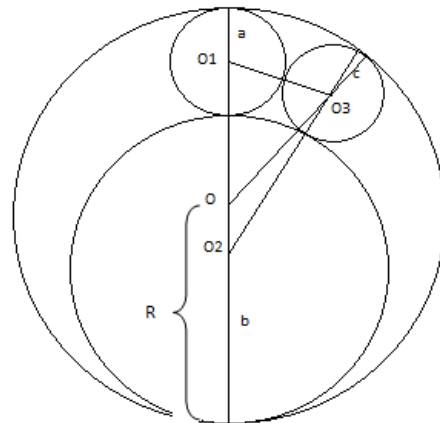
Vom exprima $\cos O_1$, folosind teorema cosinusului în triunghiurile $O_1 O O_3$ și $O_1 O_2 O_3$.

$OO_1 = R-a = b$, $OO_3 = R-c = a+b-c$, $O_1 O_3 = a+c$, $O_1 O_2 = a+b$, $O_2 O_3 = b+c$.

$$\text{În triunghiul } O_1 O O_3, \cos O_1 = \frac{b^2 + (a+c)^2 - (a+b-c)^2}{2b(a+c)}.$$

$$\text{În triunghiul } O_1 O_2 O_3, \cos O_1 = \frac{(a+c)^2 + (a+b)^2 - (b+c)^2}{2(a+c)(a+b)}.$$

Egalând cele două rapoarte și efectuând calculele obținem: $a^2 c + b^2 c + abc - a^2 b - ab^2 = 0$, de unde, prin împărțire cu $a^2 b^2 c$ rezultă relația din concluzie.



6. Prof. Ștefan Gașchiu, Liceul Teoretic „Nicolae Bălcescu” Medgidia

Avem $OO_1 = R-a$, $OO_2 = R-b$, $OO_3 = R-c$

$O_1 O_2 = a+b$, $O_1 O_3 = a+c$, $O_2 O_3 = b+c$

și $2R = 2a + 2b \Rightarrow R = a + b$.

Aplicăm teorema lui Stewart în triunghiul $O_1 O_2 O_3$:

$$OO_3^2 \cdot O_1O_2 = O_1O_3^2 \cdot OO_2 + O_2O_3^2 \cdot OO_1 - O_1O_2 \cdot OO_1 \cdot OO_2$$

sau

$$(R-c)^2(a+b) = (a+c)^2(R-b) + (b+c)^2(R-a) - (a+b)(R-a)(R-b)$$

Înlocuind R ob inem:

$$(a+b-c)^2(a+b) = a(a+c)^2 + b(b+c)^2 - ab(a+b)$$

Efectuând calculele, rezult :

$$a^2c + b^2c + abc - ab^2 - a^2b = 0$$

$$\hat{\text{Împ r im egalitatea prin } a^2b^2c : \quad \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0$$

7. Prof. Cantemir Iliescu, Pite ti

Este evident c $O_1O_2 = a+b$, $O_2O_3 = b+c$, $O_3O_1 = c+a$. Pe de alt parte, $OO_1 = R-a$, $OO_2 = R-b$ i cum O_1 , O , O_2 sunt coliniare rezult $R = a+b$. Aplic m rela ia lui Stewart în triunghiul $O_1O_2O_3$ ($OO_3 = R-c = a+b-c$) i ob inem:

$$(c+a)^2 \cdot a + (b+c)^2 \cdot b = (a+b-c)^2 \cdot (a+b) + ab \cdot (a+b).$$

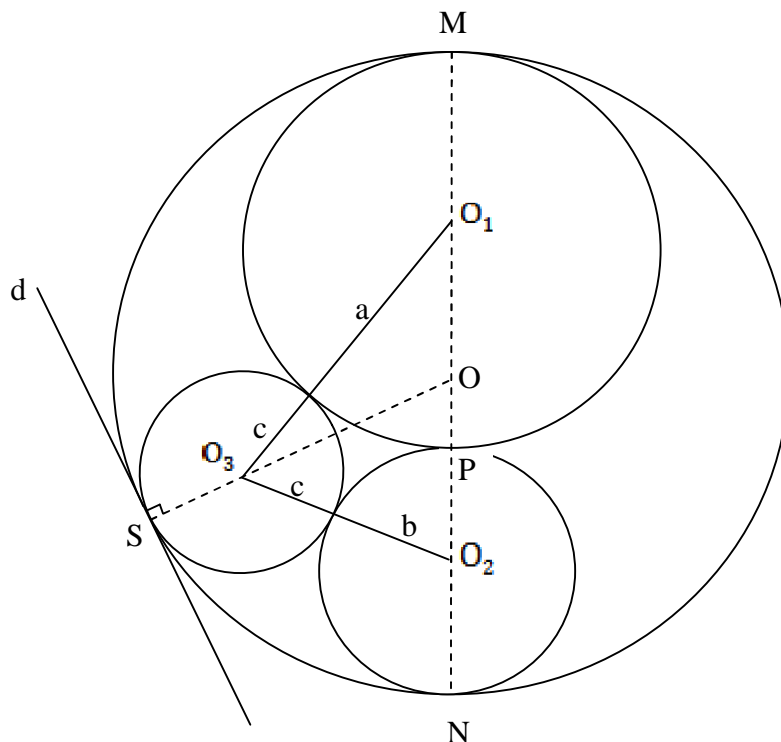
Desfacem parantezele i rezult :

$$c \cdot (a^2 + b^2 + ab) = ab \cdot (a+b),$$

de unde concluzia.

8. PROF. LUNG IOAN, COLEGIUL NA IONAL „ARANY JANOS” SALONTA

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0 \Leftrightarrow b^2c + a^2c + abc - ab^2 - a^2b = 0 \quad (1)$$



Fie $C_1 \cap C = \{M\}$, $C_2 \cap C = \{N\}$, $C_3 \cap C = \{S\}$, $C_1 \cap C_2 = \{P\}$

Din ip. $\Rightarrow MN$ - diametru în C și $a + b = R$

d - tang. la C și C_3 în $S \Rightarrow \begin{cases} O_3S \perp d \\ OS \perp d \end{cases} \Rightarrow O, O_3, S$ - coliniare

și $O_3O = R - c = a + b - c$

Presupunem $c < a > b$ (în mod analog se tratează cazurile $a < b$ și $a = b$)

$OP = 2a - R = a - b \Rightarrow O_1O = a - OP = b$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile O_1O_3O și $O_1O_3O_2$ pentru unghiul \widehat{O}_1 :

$O_2O_3 = b + c$, $O_3O_1 = a + c$, $O_1O_2 = a + b$

$$\cos \widehat{O}_1 = \frac{O_1O_3^2 + O_1O^2 - O_3O^2}{2O_1O_3 \cdot O_1O} = \frac{(a+c)^2 + b^2 - (a+b-c)^2}{2b(a+c)} \quad (2)$$

$$\cos \widehat{O}_1 = \frac{O_1O_3^2 + O_1O_2^2 - O_3O_2^2}{2O_1O_3 \cdot O_1O_2} = \frac{(a+c)^2 + (a+b)^2 - (b+c)^2}{2(a+c)(a+b)} \quad (3)$$

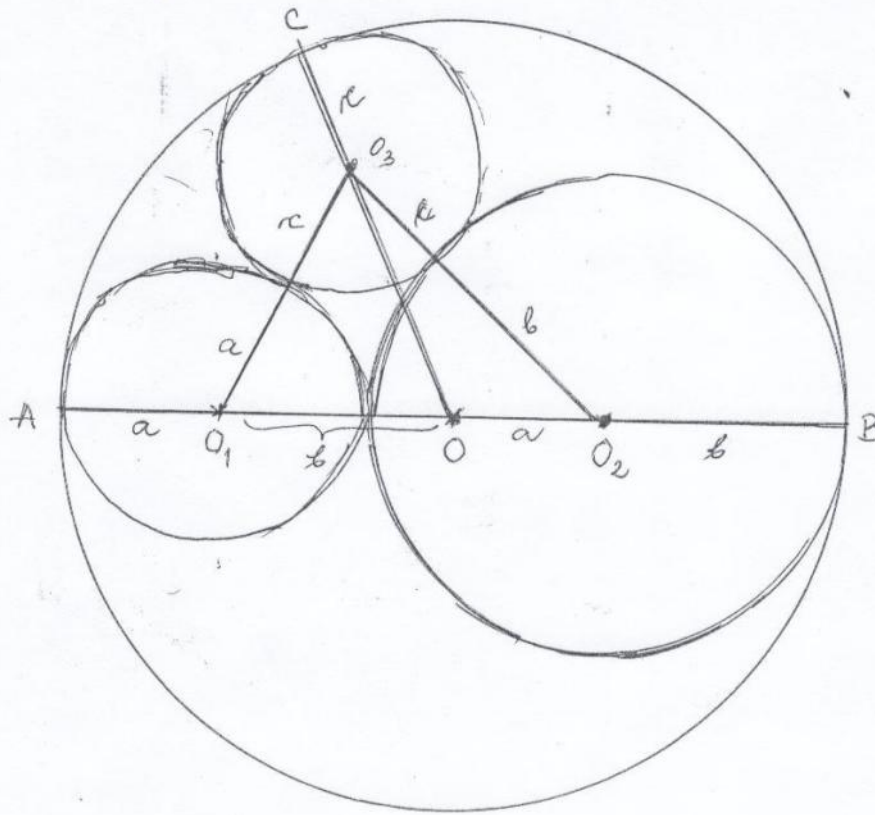
Din (2) și (3) \Rightarrow

$$\frac{(a+c)^2 + b^2 - (a+b-c)^2}{2b(a+c)} = \frac{(a+c)^2 + (a+b)^2 - (b+c)^2}{2(a+c)(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{4ac - 2ab + 2bc}{2b(a+c)} = \frac{a^2 + 2ac + a^2 + 2ab - 2bc}{2(a+b)(a+c)}$$

Aducând la același numitor și făcând calculele obținem pe (1).

9. Prof. Chipaila Adrian, Scoala Smardan, jud. Galati.



$$AB = 2(a+b)$$

$$AO = BO = \frac{AB}{2} = a+b.$$

$$O_1O = AO - AO_1 = b$$

$$O_2O = BO - BO_2 = a$$

$$O_3O = OC - CO_3 = a+b-c$$

Aplicăm teorema lui Stewart ptr. $\Delta O_1O_2O_3$ și viziam O_3O .

$$O_2O_3^2 \cdot O_1O + O_1O_3^2 \cdot O_2O = O_1O_2 \cdot (OO_3^2 + O_1O \cdot O_2O)$$

$$(b+c)^2 \cdot b + (a+c)^2 \cdot a = (a+c) \cdot [(a+b-c)^2 + ab]$$

Efectuând calculele obținem:

$$b^2c + a^2c + abc - ab^2 - a^2b = 0 \quad /: a^2b^2c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} = 0 \quad \text{relația cerută.}$$

Prof CHIPAILA ADRIAN, Scoala SMARDAN, jud GALATI