

## PROIECT DIDACTIC

**Clasa:** a XII-a C

**Profesor:** Dobre Andrei - Octavian

**Unitatea de învățământ:** GRUP COLAR TRANSPORTURI Ploiesti

**Obiectul:** Matematic

**Unitatea de învățare:** Grupul – aplicatii

**Tipul lecției:** Consolidare a cunostintelor prin aplicatii

### Competențe generale:

- + Reprezentarea adecvată a datelor cuprinse în enunuri matematice
- + Formarea deprinderii de utilizare a algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală a unei situații concrete
- + Dezvoltarea capacităților de explorare/ investigare și rezolvare de probleme
- + Analiza unei situații în scopul descoperirii de strategii pentru optimizarea soluțiilor

### Competențe specifice:

- Recunoașterea unei legii de compoziție și proprietăți a acesteia
- Definirea grupului
- Utilizarea unor strategii diferite de rezolvare în vederea optimizării soluțiilor
- Prezentarea și justificarea într-un mod explicit (coerent), folosind limbajul matematic adecvat, a metodei de rezolvare aplicate.

### Condiții prealabile:

- cunoștințe anterioare ale legilor de compoziție;

### Strategia didactică

**Metode și procedee folosite:** conversația, demonstrația, expunerea, învățarea prin descoperire, explicația, exercițiul, exercițiul comentat, muncă independentă, activitate frontală.

**Mijloace de învățământ utilizate:** manualul, culegere de probleme și variante Bac 2009

**Forme de organizare:** frontală și individuală

**Bibliografie:** manualul de matematică pentru clasa a XII-a (Ed MATHPRESS –Mircea Ganga), Variante Oficiale Bac 2009 - 2011, [www.mateinfo.ro](http://www.mateinfo.ro)

Evenimentele instruirii	Activitatea profesorului	Activitatea elevilor	Resurse i strategii didactice	Evaluare
<b>1. Organizarea clasei</b>	Profesorul noteaz absen ele Face observa ii i recomand ri, dac este cazul	Elevii r spund la întreb rile puse de profesor, îi însu esc observa iile i recomand rile primite		
<b>2. Verificarea temei</b>	Verific tema pentru acas	Elevii r spund la întreb rile profesorului		Observarea sistematic a elevilor i anrecierea verbal
<b>3. Reactualizarea no iunilor însu ite anterior</b>	Profesorul scrie pe tabla titlul lectiei „ <u>Grupuri – Aplicatii</u> ” dupa care intreaba axiomele grupului.	Elevii noteaza titlul lectiei	Manual, culegeri, conversa ia, exerci iul, problematizarea, descoperirea	
<b>4. Comunicarea tipului de exercitii propuse pentru rezolvare</b>	Profesorul da elevilor fisele de lucru si sunt anuntati ca vor demonstra ca o aplicatie este grup si ca vom rezolva problemele propuse la BAC in anii scolari 2009 dar si modelul oficial propus pentru BAC 2011	Elevii ies la tabl i rezolv exerci iile.	Expunerea	

**5. Desfășurarea lecțiilor**

1) Pe mulțimea  $G = (9, +\infty)$  se definește aplicația  $x * y = xy - 9(x + y) + 90$ .  
 Sa se arate ca perechea  $(G, *)$  este grup abelian.

(model prof. Andrei Dobre)

Prelucram aplicația

$$x * y = x(y - 9) - 9(y - 9) + 9$$

$$x * y = (x - 9)(y - 9) + 9 \quad \forall x, y \in G$$

Demonstrăm ca \* este lege de compoziție pe G

$$\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$$

$$x > 9 \quad x - 9 > 0$$

$$y > 9 \quad y - 9 > 0 \dots (x - 9)(y - 9) + 9 > 9, \quad x * y \in G$$

G1) Asociativitatea legii “\* ”

G2) Comutativitatea legii “\* ”

G3) Elementul neutru

$$e = 10 \in G$$

G4) Elemente simetrizabile

$$x' = 9 + \frac{1}{x - 9} \in G, \quad \forall x \in G$$

2)

Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ .

a) Demonstrați că  $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x = 19$ .

c) Știind că legea “\*” este asociativă, calculați  $\sqrt[3]{1 * \sqrt[3]{2 * \dots * \sqrt[3]{2011}}}$ .

(Model BAC 2011 – sursa subiecte2011.edu.ro)

2.a)	$(x - 3)(y - 3) + 3 = xy - 3x - 3y + 9 + 3$ $= x * y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
b)	$x * x = 19 \Rightarrow (x - 3)^2 + 3 = 19$ $(x - 3)^2 = 16 \Rightarrow x \in \{-1, 7\}$
c)	$x * 3 = 3 * x = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt[3]{1 * \sqrt[3]{2 * \dots * \sqrt[3]{2011}}} = (\sqrt[3]{1 * \sqrt[3]{2 * \dots * \sqrt[3]{26}}}) * 3 = (\sqrt[3]{28 * \sqrt[3]{29 * \dots * \sqrt[3]{2011}}}) * 3 = 3$

Urmeaza variante propuse pentru BAC 2009

Manual, culegeri, conversația, exercițiul, problematizarea, descoperirea, modelarea

Observarea sistematică a elevilor și aprecierea verbală

<p>3)</p> <p>Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă <math>x * y = xy - 6x - 6y + 42</math>.</p> <p>a) Să se arate că <math>x * y = (x-6)(y-6) + 6</math>, oricare ar fi <math>x, y \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația <math>x * x * x * x = x</math>.</p> <p>c) Să se calculeze <math>1 * 2 * 3 * \dots * 2009</math>.</p> <p><b>(Varinta 85 BAC 2009) – <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a></b></p>		<p>2.a. Legea se mai scrie: <math>x * y = xy - 6x - 6y + 36 + 6 = (x-6)(y-6) + 6</math></p> <p><math>= x(y-6) + 6(y-6) + 6 = (x-6)(y-6) + 6</math></p> <p>b. <math>x * x * x * x = x \Leftrightarrow (x-6)(x-6)(x-6)(x-6) + 6 = x \Leftrightarrow (x-6)[(x-6)^3 - 1] = x - 6 \Rightarrow x = 6, x = ?</math></p> <p>c. Deoarece <math>x * 6 = (x-6)(6-6) + 6 = 6</math>; <math>6 * y = 6 \Rightarrow 1 * 2 * 3 * \dots * 2009 = [1 * 2 * \dots * 5] * 6 * (7 * 8 * \dots * 2009) = 6 * 6 * y = 6 * y = 6</math></p>		
<p>4)</p> <p>Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție <math>x \circ y = 2^{x+y}</math>.</p> <p>a) Să se calculeze <math>2009 \circ (-2009)</math>.</p> <p>b) Să se rezolve în <math>\mathbb{R}</math> ecuația <math>x \circ x^2 = 64</math>.</p> <p>c) Să se demonstreze că, dacă <math>(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}</math>, atunci <math>x = -y</math>.</p> <p><b>(Varinta 48 BAC 2009) – <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a></b></p>		<p>2. a) <math>2009 \circ (-2009) = 2^0 = 1</math></p> <p>b) <math>x \circ x^2 = 64 \Leftrightarrow x + x^2 = \log_2 64 \Rightarrow x \in \{-3, 2\}</math></p> <p>c) <math>(x \circ y) \circ z = 2^{z+1} \Leftrightarrow 2^{x+y+z} = 2^{z+1} \Rightarrow 2^{x+y} = 2^1 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow x = -y</math></p>		
<p>5)</p> <p>Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție <math>x \circ y = x + y + 3</math> și <math>x * y = xy - 3(x + y) + 12</math>.</p> <p>a) Să se verifice că <math>x * y = (x-3)(y-3) + 3</math>, oricare ar fi <math>x, y \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația <math>(x \circ (x+1)) + (x * (x+1)) = 11</math>.</p> <p>c) Să se rezolve sistemul de ecuații <math>\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases}</math>, cu <math>x, y \in \mathbb{R}</math>.</p> <p><b>(Varinta 99 BAC 2009) – <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a></b></p>		<p>2. a. <math>x * y = xy - 3(x+y) + 12 = (x-3)(y-3) + 3</math></p> <p>b. Fie: <math>x \circ (x+1) + x * (x+1) = 11 \Leftrightarrow 2x + 4 + x^2 - 5x + 6 + 3 = 11 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0</math> cu soluțiile <math>x_1 = 1</math> și <math>x_2 = 2</math>.</p> <p>c. <math>\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x-3)(y-3) + 3 = (x-3)(y-3) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1</math></p>		
<p>6)</p> <p>Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție <math>x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} - 1</math>.</p> <p>a) Să se demonstreze că <math>x \circ (-x) = -1</math>, oricare ar fi <math>x</math> real.</p> <p>b) Să se arate că legea de compoziție "<math>\circ</math>" este asociativă.</p> <p>c) Să se calculeze <math>(-4) \circ (-3) \circ \dots \circ 3 \circ 4</math>.</p> <p><b>(Varinta 11 - BAC 2009) – <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a></b></p>		<p>a) <math>x \circ (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} - 1 = -1</math>.</p> <p>b) <math>(x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^3 + y^3} - 1)^3 + z^3} - 1 = x \circ (y \circ z) \Rightarrow</math> legea este asociativă</p> <p>c) Din a) și b) rezultă <math>(-4) \circ (-3) \circ \dots \circ 3 \circ 4 = (-4) \circ 4 \circ (-3) \circ 3 \circ (-2) \circ 2 \circ (-1) \circ 1 \circ 0 = (-1) \circ (-1) \circ (-1) \circ (-1) \circ 0 = -2</math>.</p>		
<p>7)</p> <p>Pe mulțimea <math>G = (0, \infty) \setminus \{1\}</math> se consideră operația <math>x \circ y = x^{2 \ln y}</math>.</p> <p>a) Să se calculeze <math>3 \circ e</math>, unde <math>e</math> este baza logaritmului natural.</p> <p>b) Să se demonstreze că <math>x \circ y \in G</math>, pentru orice <math>x, y \in G</math>.</p> <p>c) Să se arate că operația "<math>\circ</math>" este asociativă pe mulțimea <math>G</math>.</p> <p><b>(Varianta 81 - BAC 2009) – <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a></b></p>		<p>a) <math>3 \circ e = 3^{2 \ln e} = 9</math>.</p> <p>b) Fie <math>x, y \in G \Leftrightarrow x &gt; 0, x \neq 1, y &gt; 0, y \neq 1 \Rightarrow x^2 &gt; 0</math> și <math>x^2 \neq 1 \Rightarrow x \circ y \in G</math>.</p> <p>c) <math>(x \circ y) \circ z = (x^{2 \ln y}) \circ z = (x^{2 \ln y})^{2 \ln z} = x^{4 \ln y \ln z} = x \circ (y \circ z)</math>.</p>		



FI DE LUCRU  
**Grupuri**  
 CLASA a XII a C

1. Subiect propus de prof. Andrei Dobre	2. Model Oficial propus pentru BAC 2011 – sursa <a href="http://www.subiecte2011.edu.ro">www.subiecte2011.edu.ro</a>
Pe mulțimea $G = (\mathbb{Z}, +)$ se definește aplicația $x * y = xy - 9(x + y) + 90$  Sa se arate ca perechea $(G, *)$ este grup abelian.	Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ . <b>a)</b> Demonstrați că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ , oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ . <b>b)</b> Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = 19$ . <b>c)</b> Știind că legea "*" este asociativă, calculați $\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \dots * \sqrt[3]{2011}$ .
3. Model Oficial propus pentru BAC 2009 – sursa <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a>	4. Model Oficial propus pentru BAC 2009 – sursa <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a>
Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 6x - 6y + 42$ . <b>a)</b> Să se arate că $x * y = (x - 6)(y - 6) + 6$ , oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ . <b>b)</b> Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x * x = x$ . <b>c)</b> Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2009$ .	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$ . <b>a)</b> Să se calculeze $2009 \circ (-2009)$ . <b>b)</b> Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x^2 = 64$ . <b>c)</b> Să se demonstreze că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$ , atunci $x = -y$ .
5. Model Oficial propus pentru BAC 2009 – sursa <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a>	6. Model Oficial propus pentru BAC 2009 – sursa <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a>
Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x \circ y = x + y + 3$ și $x * y = xy - 3(x + y) + 12$ . <b>a)</b> Să se verifice că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ , oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ . <b>b)</b> Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x \circ (x + 1)) + (x * (x + 1)) = 11$ . <b>c)</b> Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x \circ (y - 1) = 0 \\ (x + 1) * y = x * (y + 1) \end{cases}$ , cu $x, y \in \mathbb{R}$ .	Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} - 1$ . <b>a)</b> Să se demonstreze că $x \circ (-x) = -1$ , oricare ar fi $x$ real. <b>b)</b> Să se arate că legea de compoziție "o" este asociativă. <b>c)</b> Să se calculeze $(-4) \circ (-3) \circ \dots \circ 3 \circ 4$ .
7. Model Oficial propus pentru BAC 2009 – sursa <a href="http://www.mateinfo.ro">www.mateinfo.ro</a>	8. Subiect propus de prof. Andrei Dobre
Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{2 \ln y}$ . <b>a)</b> Să se calculeze $3 \circ e$ , unde $e$ este baza logaritmului natural. <b>b)</b> Să se demonstreze că $x \circ y \in G$ , pentru orice $x, y \in G$ . <b>c)</b> Să se arate că operația "o" este asociativă pe mulțimea $G$ .	Pe mulțimea $G = (m, +\infty)$ se definește aplicația $x * y = xy - m(x + y) + m^2 + m$ , unde $m \in \mathbb{Z}$ <b>a)</b> Sa se arate ca perechea $(G, *)$ este grup abelian. <b>b)</b> Calculati $(m-2011) * (m-2011) * \dots * (m+2010) * (m+2011)$

**Nota:** 1. Pentru mai multe variante intrati pe <http://www.mateinfo.ro/examene-matematica-liceu-bac> (subiecte de algebra cls. a XII a gasiti la SUBIECTUL II – 2)  
 2. Pentru ajutor puteti consulta indicatiile de pe pagina de internet de mai sus sau puteti apela la FORUM-ul site-ului unde un profesor sau elev va ajuta.

