Funcții generatoare

În matematică o *funcție generatoare* este o serie de puteri

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \mathrm{G}\,(a_n, x)$$

ai cărei coeficienți codifică informația despre un şir a_n care este indexat după numerele naturale.

Sunt numeroase tipuri de funcții generatoare cum ar fi: funcția generatoare uzuală, funcția generatoare exponențială, seriile Lambert, seriile Bell şi seriile Dirichlet.

Funcțiile generatoare uzuale pot fi generalizate la secvențe cu indecşi multipli. Un exemplu de funcție generatoare uzuală a unei secvențe $a_{m,n}$ este:

$$\mathrm{G}\,(a_{m,n}; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n .$$

Funcția generatoare exponențială:

$$\mathrm{EG}\,(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} .$$

Funcția generatoare a lui Poisson:

$$\mathrm{PG}\,(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x} \frac{x^n}{n!} .$$

Seriile Lambert:

$$\mathrm{LG}\,(a_n, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} .$$

De observat că în seriile Lambert indexarea începe de la 1, nu de la 0.

Seriile Bell pentru o funcție aritmetică *f(n)* şi un număr prim p este:

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p^n) x^n .$$

Seriile Dirichlet:

$$\mathrm{DG}\,(a_n, \mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} .$$

Pentru un şir $a_n = n^2$ funcția generatoare este:

$$\mathrm{G}\,(n^2, x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} ;$$

$$\mathrm{EG}\,(n^2, x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{x^n}{n!} = x(x+1)e^x ;$$

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} x^n = \frac{1}{1-p^2 x} \text{ etc.}$$

Alte exemple:

Funcțiile generatoare pot fi create prin extinderea unor funcții generatoare simple. De exemplu se începe cu

$$G(1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

şi înlocuind x cu $2x$ obținem:

$$G(1, 2x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + (2x) + (2x)^2 + \ldots + (2x)^n + \ldots = G(2^n, x).$$

Operații cu funcții generatoare:

Funcțiile generatoare sunt una dintre cele mai surprinzătoare şi mai folositoare invenții în Matematica Discretă.

1. $$(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Înmulțind funcția generatoare cu 2 obținem:

$$\frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \ldots$$

care generează şirul (2, 0, 2, 0, 2, 0, ...)

Dacă $(f_0, f_1, f_2, \ldots) \leftrightarrow F(x)$,

atunci $(cf_0, cf_1, cf_2, \ldots) \leftrightarrow c \cdot F(x)$.

Ideea:

$$\begin{aligned}(cf_0, cf_1, cf_2, \ldots) \leftrightarrow cf_0 + cf_1 x + cf_2 x^2 + \ldots \\ = c \cdot (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots) \\ = c \cdot F(x).\end{aligned}$$

2. Adunarea:

A aduna două funcții generatoare înseamnă a aduna două şiruri termen cu termen. De exemplu:

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, ...) \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$+ \ (1,-1,1,-1,1,-1, ...) \leftrightarrow \frac{1}{1+x}$$

$$(2, 0, 2, 0, 2, 0, ...) \leftrightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}.$$

Am găsit două expresii diferite, ambele generând şirul (2, 0, 2, 0, 2, 0, ...). Ele sunt, bineînțeles, egale:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Dacă $(f_0, f_1, f_2, \ldots) \leftrightarrow F(x)$ *şi*

$(g_0, g_1, g_2, \ldots) \leftrightarrow G(x)$

atunci $(f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \ldots) \leftrightarrow F(x)+G(x)$.

Ideea:

$$\begin{aligned}(f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \ldots) &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(f_n+g_n)\,x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n\right) \\ &= F(x)+G(x).\end{aligned}$$

3. Derivarea:

Exemplu: $\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(1, 2, 3, 4, ...) \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dacă $(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) \leftrightarrow F(x)$

atunci $(f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots) \leftrightarrow F'(x)$.

Ideea:

$$\begin{aligned}(f_1, 2f_2, 3f_3, \ldots) &\leftrightarrow f_1+2f_2x+3f_3x^2+\ldots \\ &= \frac{d}{dx}(f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+\ldots) \\ &= \frac{d}{dx}F(x).\end{aligned}$$

4. Produsul:

Dacă $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \leftrightarrow A(x)$ şi

$(b_0, b_1, b_2, \ldots) \leftrightarrow B(x)$

atunci $(c_0, c_1, c_2, \ldots) \leftrightarrow A(x)\cdot B(x)$, unde

$c_n := a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0$.

Pentru a înțelege această regulă vom face:

$$C(x) := A(x)\cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$$

Putem efectua produsul $A(x)\cdot B(x)$ utilizând un tabel:

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	. . .
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	. . .	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	. . .		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	. . .			
.	. . .				
.					
.					

Se observă că toți termenii care conțin aceeaşi putere a lui x se găsesc pe diagonală. Luând aceşti termeni împreună găsim coeficientul lui x^n în produs, şi anume, este suma tuturor termenilor de pe a (n + 1) –a diagonală:

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0$$

Pentru **şirul lui Fibonacci** funcția generatoare este:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots$$

Funcția generatoare pentru f_{n-1} este xf şi pentru f_{n-2} este $x^2 f$. Din relația de recurență se observă că seria de puteri $xf + x^2 f$ se potriveşte cu f cu excepția primilor doi coeficienți. Ținând seama de aceasta se găseşte că:

$$f = xf + x^2 f + x.$$

Rezolvând această ecuație pentru f rezultă că $f = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

O altă formă pentru funcția generatoare pentru numerele lui Fibonacci:

$$1 - x - x^2 = (1 - a_1x)(1 - a_2x)\text{, unde}$$

$a_1 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ şi $a_2 = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Apoi găsim A_1 şi A_2 care îndeplinesc condiția:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-a_1x} + \frac{A_2}{1-a_2x}$$ şi se află $A_1 = \dfrac{1}{a_1 - a_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ şi

$A_2 = \dfrac{-1}{a_1 - a_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Înlocuind obținem:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-a_1x} - \frac{1}{1-a_2x}\right)\text{, unde}$$

$$\frac{1}{1-a_1x} = 1 + a_1x + a_1^2x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-a_2 x}=1+a_2 x+a_2^2 x^2+\ldots$$

$$\Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-a_1 x}-\frac{1}{1-a_2 x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((1+a_1 x+a_1^2 x^2+\ldots)-(1+a_2 x+a_2^2 x^2+\ldots)\right),$$

prin urmare

$$f_n=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Această formulă pare complicată în schimb este foarte utilă.

Bibliografie:

1. V. Tămaş, I. Tofan, V. Leoreanu – *Curs de aritmetică*, Ed. Univ. Iaşi, 2001.

2. http://theory.csail.mit.edu/classes/6.042/spring06/ln10.pdf

Prof. Alexandru Elena-Marcela
Şcoala cu clasele I-VIII Bogata
Comuna Baia, judeţul Suceava