

Aspecte metodice privind rezolvarea unor probleme de examen

(Punctează fără să rezolvi !)

de Marian Teler,
Profesor Liceul Teoretic Costești,
Județul Argeș



Examinarea candidaților la admiterea în învățământul superior, prin sistemul de teste grilă, îl pune pe acesta în fața unui registru tematic larg, divers, cu variate grade de dificultate.

Poate candidatul să puncteze fără să rezolve sarcinile date !? Iată o posibilitate la care se gândesc și cei care alcătuiesc testele, cât și cei care le rezolvă.

Șansa este de partea candidatului cu o atitudine activă, capabil să facă rapid conexiuni. Rezultatul depinde, în mare măsură, de acumulările sale teoretice, de antrenamentul în rezolvarea problemelor, de starea de spirit, de imaginația, de inspirația și mobilitatea tematică, de inventivitatea, de șansa, de capacitatea de a gestiona eficient timpul de examen.

Rezolvarea sarcinilor de lucru este laborioasă, necesită rigoare deosebită și timp bine proporționat.

Însă, în unele situații, răspunsul corect se poate selecta prin valorificarea în mod abil a unei părți din premisele problemei, prin particularizări convenabile sau testări punctuale.

Expunem, în continuare, două variante de rezolvare a unor probleme.

- Varianta 1 se referă la rezolvarea matematică, în totalitate, completă, și apoi selectarea răspunsului corect.
- Varianta 2 are în vedere evaluarea alternativelor de răspuns, din listă, prin comparare cu cerințele problemei, fără rezolvare propriu-zisă.

Exemplele sunt alese din portofoliul de probleme utilizat la selectarea și redactarea celor pentru problemele de concurs.

1. Exemplul 1

Dacă $B = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \log_{x^2 + \frac{1}{x^2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > \log_{x^2 + \frac{1}{x^2}} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1} \right\}$, atunci:

- a) $B = (-\infty, -5) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$; b) $B = (-1, 0) \cup (0, 2)$; c) $B = (-\frac{1}{2}, 0)$;
d) $B = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$; e) $B = (-3, -1) \cup (1, 3) \cup (5, 7)$;

Admitere, A.S.E. Bucuresti

Soluție:

V1: Evident, $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2, (\forall)x \in \mathbb{R}^*$.

Se obțin inegalitățile: $\begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1} > 0 \\ x \neq \pm 1; (3) \end{cases}$

Inegalitatea (1) devine $\frac{-x(x-2)(x+5)}{(x-1)(x+1)} > 0$, cu soluția $S_1 = (-\infty, -5) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$

Din (2), rezultă $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-1} > 0$, cu soluția $S_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty)$

Obținem $B = S_1 \cap S_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, răspunsul corect este c)

V2: Stabilim varianta corectă prin eliminare

a) Pentru $x = -6 \in B$, nu se verifică condiția (2),

b) Pentru $x = 1 \in B$, nu se verifică condiția (3),

d) Pentru $x = 2 \in B$, nu se verifică condiția (2),

e) Pentru $x = 2 \in B$, nu se verifică condiția (2)

Deci, răspunsul corect este c)

Obs. Răspunsul corect se stabilește doar din condițiile (2) și (3), de existență, fără a rezolva inecuația logaritmică.

2. Exemplul 2

Se consideră funcția $f : R \rightarrow R, f(x) = 2\arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Să se calculeze $\text{Im } f$

a) $(-\pi, \pi)$; b) $[-\pi, \pi]$; c) $\{-\pi, \pi\}$; d) R ; e) $[-1, 1]$; f) $(-1, 1)$

Admitere Universitatea Politehnică București

Soluție:

$$\text{V1: } f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{4}{1+x^2}, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Funcția este continuă, constantă pe intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$ și strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$. Rezultă $\text{Im } f = [-\pi, \pi]$. Răspunsul corect este b)

V2: Din $\arctg x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că funcția f este mărginită; răspunsul d) este fals.

Din $\begin{cases} f(1) = \pi \\ f(0) = 0 \end{cases}$, rezultă că răspunsurile a), c), e), f) sunt false.

Prin eliminare, obținem că răspunsul corect este b)

3. Exemplul 3

Inversa funcției $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq 4 \\ 3x-11, & x > 4 \end{cases}$ este:

$$\text{a) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x-3, x \leq 1 \\ 3x+2, x > 1 \end{cases} ; \text{ b) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, x \leq 1 \\ \frac{x+11}{3}, x > 1 \end{cases} ; \text{ c) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, x \leq 2 \\ 3x-11, x > 2 \end{cases} ; \text{ d) }$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, x \leq 0 \\ \frac{x+11}{3}, x > 0 \end{cases} ; \text{ e) } f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, x \leq 1 \\ \frac{x+2}{11}, x > 1 \end{cases}$$

Admitere, Universitatea Pitești

Soluție:

V1

$$\text{Pentru } x \in (-\infty, 4] \Rightarrow y = f(x) = x - 3, y \in (-\infty, 1]$$

$$\text{Pentru } x \in (4, \infty) \Rightarrow y = f(x) = 3x - 11, y \in (1, \infty)$$

$$\text{Obținem } f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad (1)$$

$$\text{Pentru } y \in (-\infty, 1] \Rightarrow x \in (-\infty, 4]. \text{ Din (1) rezultă } x - 3 = y, x = y + 3, \quad f^{-1}(y) = y + 3$$

$$\text{Pentru } y \in (1, \infty) \Rightarrow x \in (4, \infty). \text{ Din (1) rezultă } 3x - 11 = y, x = \frac{y + 11}{3}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y + 11}{3}$$

$$\text{Deci, } f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 3, x \leq 1 \\ \frac{x + 11}{3}, x > 1 \end{cases}, \text{ răspunsul corect este b).}$$

V2

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}, \text{ rămân posibile variantele b) și c), (2)}$$

$$f(5) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(4) = 5, \text{ rămân posibile variantele b) și d), (3)}$$

Din (2) și (3) rezultă că răspunsul corect este b).

4. Exemplul 4

Fie (G, \circ) un grup și

$$A = \{f : G \rightarrow G \mid f(x \circ y) = x \circ f(f(y)), \forall x, y \in G\}.$$

Dacă p este numărul elementelor mulțimii A , atunci:

$$\text{a) } p = 1 ; \text{ b) } p = 2 ; \text{ c) } p = 3 ; \text{ d) } p = 0 ; \text{ e) } p \geq 2004$$

Admitere 2004, Comerț și Marketing

Soluție:

V1: Fie $e \in G$ elementul neutru al grupului.

Considerăm $f \in A$. Pentru $y = e$ obținem $f(x) = x \circ f(f(e)) = x \circ a$, unde

$$a = f(f(e)), \forall x \in G$$

Dacă $f(x) = f(y)$, atunci $x \circ a = y \circ a$, deci $x = y$, de unde deducem că f este funcție injectivă.

Atunci, pentru $x \in G$, avem: $f(x) = f(e \circ x) = e \circ f(f(x)) = f(f(x))$. f fiind funcție injectivă, rezultă $f(x) = x, \forall x \in G$. Deci, $p = 1$, răspunsul este a)

V2: Stabilim răspunsul corect prin particularizare

$$\text{Pentru } G = \{e\}, \text{ obținem } B = \{1_G\}, \text{ răspunsul corect este a)}$$

5. Exemplul 5

Se consideră ecuația:

$$\begin{vmatrix} x-p & q & r \\ r & x-p & q \\ q & r & x-p \end{vmatrix} = 0, p, q, r \in \mathbb{R}, \text{ cu rădăcinile } x_1, x_2, x_3.$$

Dacă rădăcinile sunt reale, fie $S = \sum_{k=1}^3 x_k^2$.

Atunci:

a) $S = 3(p^2 + 2q^2)$; b) $S = 2p^2 - 2pq + 5q^2$; c) $S = 2p^2 + r^2$; d) $S = p^2 + q^2 + r^2$; e) $S = p^2 + q^2 - r^2$

Admitere 1999, Management

Soluție:

V1. Ecuația se transformă succesiv,

$$\begin{vmatrix} x-p+r+q & x-p+r+q & x-p+r+q \\ r & x-p & q \\ q & r & x-p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-p+q+r) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & x-p & q \\ q & r & x-p \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-p+r+q) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & x-p-r & q-r \\ q & r-q & x-p-q \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-p+r+q)[(x-p-r)(x-p-q) + (r-q)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$(x-p+r+q)[x^2 - (2p+r+q)x + p^2 + r^2 + q^2 + pr - rq + qp] = 0.$$

Rădăcinile fiind reale trebuie ca:

$$\Delta = (2p+r+q)^2 - 4(p^2 + r^2 + q^2 + pr - rq + qp) \geq 0 \Rightarrow -3(r-q)^2 \geq 0, \quad r = q$$

Soluțiile ecuației sunt: $x_1 = p - r - q = p - 2q$, $x_2 = x_3 = p + q$, de unde $S = 3(p^2 + 2q^2)$, răspunsul este a)

V2. Răspunsul se poate stabili prin particularizare. Luând $p = 0, r = q = 1$, care respectă

condițiile enunțului, ecuația devine succesiv: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, $(x+2)(x-1)^2 = 0$, cu soluțiile:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = x_3 = 1.$$

Obținem $S = 6$. Particularizând și lista de răspunsuri se stabilește că răspunsul corect este a).

6. Exemplul 6

Să se calculeze $l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$

a) $l = n!$; b) $l = (n!)^2$; c) $l = 2^n$; d) $l = \frac{n!}{2^n}$; e) $l = \frac{1}{2}$; f) $l = \infty$

Admitere Universitatea Politehnică Bucuresti

Soluție:

$$V1 \quad l = \prod_{k=1}^n \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^k x}{\cos^2 x} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k y}{\sin^2 y} \right) \quad (\text{S-a notat } y = \frac{\pi}{2} - x)$$

$$\begin{aligned} \text{Dar, } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k y}{\sin^2 y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y + \cos^2 y + \dots + \cos^{k-1} y)}{\sin^2 y} = \\ &= k \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y)}{\sin^2 y (1 + \cos y)} = \frac{k}{2} \Rightarrow l = \frac{n!}{2^n}, \text{ r\u0103spunsul corect este d)} \end{aligned}$$

V2 Pentru $n = 3$ r\u0103spunsurile din list\u0103 sunt distincte. Ob\u021binem

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^3 x)}{\cos^6 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$\text{Dar, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos^2 x (1 + \sin x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{3}{4}, \text{ r\u0103spunsul corect este d).}$$

7. Exemplul 7

Fie $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$ \u015i $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel \u00eenc\u0102t are loc:

$$a^x = bc, \quad b^y = ca, \quad c^z = ab$$

Se noteaz\u0103 prin $E = xyz - x - y - z$. Atunci:

$$\text{a) } E = 4 \quad ; \quad \text{b) } E = 2 \quad ; \quad \text{c) } E = -2 \quad ; \quad \text{d) } E = -4 \quad ; \quad \text{e) } E = 0 \quad ;$$

Teste gril\u0103 pentru admiterea la ASE

Soluție:

$$V1: \quad x = \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad y = \log_b(ca) = \log_b c + \log_b a,$$

$$z = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$E = (\log_a b + \log_a c)(\log_b c + \log_b a)(\log_c a + \log_c b) - \log_a b - \log_a c - \log_b c - \log_b a - \log_c a - \log_c b = 2$$

(S-a \u021binut cont c\u0103 $\log_a b \cdot \log_b a = 1$). R\u0103spunsul corect este b)

V2: Pentru $a = b = c$ se ob\u021bine $x = y = z = 2 \Rightarrow E = 2$, r\u0103spunsul corect este b)

Obs. S-a constatat c\u0103 elevii care au avut astfel de alternative \u00een abordarea problemelor de examen au avut randament mai ridicat.