Revista MateInfo.Ro ISSN 2065 - 6432 decembrie 2009

1. Natura unui triunghi cu lungimile laturilor în progresie aritmetică

a) cu lungimile laturilor numere naturale consecutive:

Condiții de existență: n + n + 1 > n + 2 $\Rightarrow$ n >1 **(1)**

În ΔBAC aplicând teorema cosinusului obținem:

$$\cos \angle BAC = \frac{n^2+(n+1)^2-(n+2)^2}{2n(n+1)} = \frac{2n^2+2n+1-n^2-4n-4}{2n(n+1)} = \frac{n^2-2n-3}{2n(n+1)} \Rightarrow$$

$$\cos \angle BAC = \frac{(n+1)(n-3)}{2n(n+1)} = \frac{n-3}{2n}.$$

Discuție:

1) Dacă n<3 avem $\cos \angle BAC$ <0 și cum n>1 $\Rightarrow$ doar în cazul n = 2 ΔBAC este obtuzunghic (de laturi 2 – 3 – 4).
2) Dacă n = 3 avem $\cos \angle BAC = 0$ $\Rightarrow$ ΔBAC este dreptunghic (de laturi 3 – 4 – 5).
3) Dacă n>3 avem $\cos \angle BAC$ >0 $\Rightarrow$ ΔBAC este ascuțitunghic (într-o infinitate de cazuri).

b) cu lungimile laturilor numere naturale pare(impare) consecutive:

Condiții de existență: n + n + 2 > n + 4 $\Rightarrow$ n >2 **(2)**

În ΔEDF aplicând teorema cosinusului obținem:

$$\cos \angle EDF = \frac{n^2+(n+2)^2-(n+4)^2}{2n(n+2)} = \frac{2n^2+4n+4-n^2-8n-16}{2n(n+2)} = \frac{n^2-4n-12}{2n(n+2)} \Rightarrow$$

$$\cos \angle EDF = \frac{(n+2)(n-6)}{2n(n+2)} = \frac{n-6}{2n}.$$

Discuție:

1) Dacă n<6 avem $\cos \angle EDF$ <0 și cum n>2 **(2)** $\Rightarrow$ pentru $n \in \{3, 4, 5\}$ ΔEDF este obtuzunghic. Obținem două cazuri în care lungimile laturilor sunt numere impare consecutive (3 – 5 – 7 și 5 – 7 – 9) și unul în care lungimile laturilor sunt numere pare consecutive (4 – 6 – 8).
2) Dacă n = 6 avem $\cos \angle EDF = 0 \Rightarrow \Delta EDF$ este dreptunghic (de laturi 6 – 8 – 10).
3) Dacă n>6 avem $\cos \angle EDF > 0$ $\Rightarrow$ ΔEDF este ascuțitunghic (într-o infinitate de cazuri).

c) cu lungimea unei laturi fiind media aritmetică a celorlalte două:

Presupunem fără a restrânge generalitatea că avem a<b.

Condiții de existență: $a + \frac{a+b}{2} > b \Rightarrow 3a > b \Rightarrow a > \frac{b}{3}$ **(3)**

În ΔHGI aplicând teorema cosinusului obținem:

$$\cos \angle HGI = \frac{a^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - b^2}{2a\frac{(a+b)}{2}} = \frac{5a^2+2ab-3b^2}{4a(a+b)} = \frac{(a+b)(5a-3b)}{4a(a+b)} = \frac{5a-3b}{4a}.$$

Discuție:

1) Dacă 5a – 3b<0 ($\Rightarrow a < \frac{3}{5}b$) avem $\cos\angle HGI$ <0 şi cum $a > \frac{b}{3}$ **(3)** $\Rightarrow$ pentru $a \in \left(\frac{b}{3}, \frac{3b}{5}\right)$ ΔHGI este obtuzunghic.
2) Dacă 5a – 3b = 0 ($\Rightarrow a = \frac{3}{5}b$) avem $\cos\angle HGI = 0$ ΔHGI este dreptunghic (de laturi $\frac{3b}{5} - \frac{4b}{5} - b$) şi laturile vor fi numere naturale $\Leftrightarrow$ ipotenuza $\vdots$ 5, $b \in N^*$.
3) Dacă 5a – 3b>0 ($\Rightarrow a > \frac{3}{5}b$) avem $\cos\angle HGI$ >0 $\Rightarrow$ pentru $a \in \left(\frac{3b}{5}, +\infty\right)$, ΔHGI este ascuțitunghic (într-o infinitate de cazuri).

d) cu lungimile laturilor în progresie aritmetică:

Presupunem fără a restrânge generalitatea că avem k>0.

Condiții de existență: n + n + k>n + 2k $\Rightarrow$ n>k. **(4)**

În ΔKJL aplicând teorema cosinusului obținem:

$$\cos\angle KJL = \frac{n^2 + (n+k)^2 - (n+2k)^2}{2n(n+k)} = \frac{2n^2 + 2nk + k^2 - n^2 - 4nk - 4k^2}{2n(n+k)} = \frac{n^2 - 2nk - 3k^2}{2n(n+k)} \Rightarrow$$

$$\cos\angle KJL = \frac{(n+k)(n-3k)}{2n(n+k)} = \frac{n-3k}{2n}.$$

Discuție:

1) Dacă n<3k avem $\cos\angle KJL$ <0 şi cum n>k **(4)** $\Rightarrow$ pentru $n \in (k, 3k)$ ΔKJL este obtuzunghic.
2) Dacă n = 3k avem $\cos\angle KJL = 0$ $\Rightarrow$ ΔKJL este dreptunghic.
3) Dacă n>3k avem $\cos\angle KJL$ >0$\Rightarrow$ pentru $n \in (3k, +\infty)$ ΔKJL este ascuțitunghic (într-o infinitate de cazuri).

Observații:

1) Dacă rația progresiei k = 0 obținem un triunghi echilateral (deci ascuțitunghic).
2) Pentru $k \in N^*$, k – fixat obținem în primul caz $n \in (k, 3k) \cap N^*$, adică „2k – 1” triunghiuri obtuzunghice cu laturile în progresie aritmetică (de rație k) exprimate prin numere naturale.

   Perimetrele acestor triunghiuri, considerate în ordinea lor numerică, crescătoare, formează, de asemenea, o progresie aritmetică (de rație 3).
3) Pentru $k \in N^*$, k – fixat obținem în al doilea caz o infinitate de triunghiuri dreptunghice (de laturi 3k – 4k – 5k), cu laturile în progresie aritmetică (de rație k), exprimate prin numere naturale.

   Perimetrele acestor triunghiuri, considerate în ordinea lor numerică, crescătoare, formează, de asemenea, o progresie aritmetică (de rație 12).

   Totodată triunghiurile din această mulțime sunt asemenea între ele şi ariile lor, considerate în ordinea lor numerică, crescătoare, formează un şir dat de relația de recurență: $a_n + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2} + 24$ (şi reprezintă chiar şirul pătratelor perfecte nenule, mărit de 6 ori).

4) Pentru $k \in N^*$, k – fixat obținem în al treilea caz $n \in (3k, +\infty) \bigcap N^*$, adică, o infinitate triunghiuri ascuțitunghice cu laturile în progresie aritmetică (de rație k), exprimate prin numere naturale.

Prof. Alexandru Elena-Marcela
Şcoala cu clasele I-VIII Bogata
Comuna Baia, Județul Suceava