

### Aplicații ale teoremei de medie pentru funcții integrabile

Ilinca Sebastian, profesor Școala cu clasele I-VIII nr. 4 Corabia

În acest articol vom prezenta câteva aplicații ale teoremei de medie pentru funcții integrabile precum și câteva modalități de calcul a unor limite folosind această teoremă.

**Teorema (de medie) :** Fie  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă .Atunci există  $c \in [a,b]$  astfel

$$\text{încât } \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) .$$

**Demonstrație :**  $f$  fiind continuă pe  $[a,b]$  rezultă conform teoremei lui Weierstrass că  $f$  este mărginită și își atinge marginile . Notăm  $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$  ,  $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$  . Există  $u,$

$v \in [a,b]$  astfel încât  $m = f(u), M = f(v)$  .

Avem  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$  , integrăm pe  $[a,b]$  și obținem

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) , \text{ de unde } f(u) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M = f(v) . \text{ Dar}$$

$f$  este continuă pe  $[a,b]$  , deci are proprietatea lui Darboux pe  $[a,b]$  :  $\exists c \in [a,b]$  astfel

$$\text{încât } \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) .$$

### Aplicații:

1) Fie  $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  funcție continuă cu proprietatea că  $\int_0^1 xf(x)dx > \frac{\pi}{4}$  . Să se arate că

există  $c \in [0,1]$  astfel încât  $c^3 f(c) + cf(c) = 1$ .

**Soluție :** Considerăm funcția auxiliară  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $g(x) = xf(x) - \frac{1}{x^2 + 1}$  .

Alegerea funcției  $g$  este sugerată de faptul că  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}$  .

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \left( xf(x) - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 xf(x)dx - \frac{\pi}{4} > 0 ,$$

rezultă că  $\int_0^1 g(x)dx > 0$  . Conform teoremei de medie , există un punct  $a \in [0,1]$  astfel încât  $g(a) > 0$  . Funcția  $g$  este continuă , iar  $g(0) = -1 < 0$  . Deoarece  $g(c) > 0$  și

$g(0) < 0$  rezultă că există  $c \in (0, a)$  astfel încât  $g(c) = 0$ , echivalent cu

$$cf(c) = \frac{1}{1+c^2} \Leftrightarrow c^3 f(c) + cf(c) = 1.$$

2) Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funcție continuă. Să se arate că există  $c \in [a, b]$  astfel încât

$$\int_a^c f(x) dx = (b-c)f(c).$$

**Soluție :** Considerăm funcția auxiliară :  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = (b-x) \int_a^c f(t) dt$ .

$\varphi$  este derivabilă pe  $[a, b]$ ,  $\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(b) = 0$ , rezultă conform teoremei lui Rolle că există  $c \in [a, b]$  astfel încât

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow -\int_a^c f(t) dt + (b-c)f(c) = 0 \Leftrightarrow \int_a^c f(t) dt = (b-c)f(c)$$

3) Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $0 < a < b$  și  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ .

Calculați: a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \int_{ax}^{bx} f(t) dt$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{ax}^{bx} f(t) dt$

(Bacalaureat 2007)

**Soluție:** Aplicăm teorema de medie funcției  $f$  pe intervalul  $[ax, bx]$ , rezultă că există  $c_x \in [ax, bx]$  astfel încât  $\int_{ax}^{bx} f(t) dt = (bx - ax)f(c_x)$ . Când  $x \rightarrow 0, c_x \rightarrow 0$ .

a) Limita devine

$$\lim_{\substack{c_x \rightarrow 0 \\ c_x > 0}} (b-a)f(c_x) = \lim_{\substack{c_x \rightarrow 0 \\ c_x > 0}} \frac{\ln(1+c_x)}{c_x} (b-a) = b-a$$

b) Când  $x \rightarrow \infty, c_x \rightarrow \infty$ , limita devine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{ax}^{bx} f(t) dt = \lim_{c_x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+c_x)}{c_x} (b-a) \stackrel{l'Hospital}{=} (b-a) \lim_{c_x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+c_x} = 0$$

4) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^3} dx, n \in \mathbb{N}$ .

**Soluție :** Fie  $f : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ , evident  $f$  verifică ipotezele

teoremei de medie , așadar  $\exists c_n \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$  astfel încât  $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^3} dx = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})f(c_n)$ ,

relație echivalentă cu  $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \frac{1}{n(n+1)} \frac{\sin c_n}{c_n^3}$ . Când  $n \rightarrow \infty, c_n \rightarrow 0$ , folosind

criteriul cleștelui limita este egală cu 1.

5) Fie  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continua pentru care există  $t \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$(t+1) \int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Să se arate că există } c \in [0,1] \text{ astfel încât } f(c) = c^t.$$

**Soluție :**  $\int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}$ . Avem :  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^t dt$ , relație echivalentă cu

$$\int_0^1 (f(x) - x^t) dx = 0.$$

Aplicăm teorema de medie funcției  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x^t$ , rezultă că

există  $c \in [0,1]$  astfel încât  $\int_0^1 g(x) dx = g(c)$ , echivalent cu  $g(c) = 0$ , adică

$$f(c) = c^t.$$

6) Se consideră funcțiile  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\sin^2 x}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  și șirul

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  cu  $x_n = F(1) + F(\frac{1}{2}) + \dots + F(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Soluție:** Aplicăm teorema de medie funcției  $F : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  și

deducem că există  $c_x \in (0, x)$  astfel încât  $\int_0^x f(t)dt = xf(c_x)$ .

$$\text{Dar } F\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} e^{\sin^2 c_k}.$$

$$0 < c_k < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \sin^2 c_k < \sin^2 \frac{1}{k} \Rightarrow 1 < e^{\sin^2 c_k} < e^{\sin^2 \frac{1}{k}} \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{k} e^{\sin^2 c_k} < \frac{1}{k} e^{\sin^2 \frac{1}{k}}$$

Prin sumare obținem :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < x_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} e^{\sin^2 \frac{1}{k}}$ . Dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \infty$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

#### Bibliografie:

1. C.P. Niculescu-Analiza matematică pe dreapta reală , Ed.Universitaria 2002
2. Eugen Radu, Ovidiu Șontea-Matematică manual pentru clasa a XII M1,Ed. ALL 2007