

**BREVIAR TEORETIC CU EXEMPLE CONCRETE,
PENTRU PREGĂTIREA EXAMENULUI DE
EVALUARE NAȚIONALĂ, clasa a VIII-a - 2010**

Propunător: Prof. IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU

Școala cu clasele I-VIII Mătești, com. Săpoca, jud. Buzău

V. 1. Măsurare și măsuri (lungime, arie, volum, masă, capacitate, timp)

Unitatea de măsură pentru **lungime** este **metrul** (m). El are multiplii următori : decametru (dam), hectometru (hm), kilometru (km) și submultiplii următori: decimetru (dm), centimetru (cm), milimetrul (mm).

Multiplii			Unitatea principala m	Submultiplii		
km	hm	dam		dm	cm	mm
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
1	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶

Ex. de transformări:

$$321,15 \text{ dm} = 32,115 \text{ m} = 3211,5 \text{ cm} = 32115 \text{ mm};$$

$$9485 \text{ m} = 948,5 \text{ dam} = 94,85 \text{ hm} = 9,485 \text{ km}.$$

Perimetrul pătratului $P = 4l$; perimetrul dreptunghiului $P = 2l + 2L$.

Unitatea principală pentru măsurarea **suprafețelor** este **metrul pătrat** (m²), care reprezintă aria unui pătrat cu latura de 1m. Multiplii sunt :dam², hm², km². Submultiplii sunt : dm², cm², mm².

Multiplii			Unitatea principală m²	Submultiplii		
km ²	hm ²	dam ²		dm ²	m ²	mm ²
10 ⁻⁶	10 ⁻⁴	10 ⁻²	1	10 ²	10 ⁴	10 ⁶

Ex. de transformări :

$$2,75 \text{ hm}^2 = 275 \text{ dam}^2 = 0,0275 \text{ km}^2$$

$$15,25 \text{ dm}^2 = 152500 \text{ mm}^2 = 1525 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ hectar} = 1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2$$

$$1 \text{ ar} = 1 \text{ dam}^2$$

Aria pătratului $A = l^2$; Aria dreptunghiului $A = l \cdot L$.

Unitatea principală pentru măsurarea **volumului** este **metrul cub** (m³), care reprezintă volumul unui cub cu latura de 1 m.

Multiplii			Unitatea principală m³	Submultiplii		
km ³	hm ³	dam ³		dm ³	cm ³	mm ³
10 ⁻⁹	10 ⁻⁶	10 ⁻³	1	10 ³	10 ⁶	10 ⁹

$$\text{Ex. } 0,021 \text{ dm}^3 = 21 \text{ cm}^3 = 21000 \text{ mm}^3$$

$$49 \text{ dam}^3 = 0,049 \text{ hm}^3 = 49000 \text{ m}^3$$

Volumul cubului $V = l^3$

Volumul paralelipipedului dreptunghic : $V = l \cdot L \cdot h$.

Unitatea de măsură a **capacității** (volumul ocupat de un lichid) este litrul (l) .

$1l = 1 \text{ dm}^3$.

Multiplii			Unitatea principala l	Submultiplii		
kl	hl	dal		dl	cl	ml
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Ex. $145 l = 1,45 \text{ hl} = 14500 \text{ cl}$

$4,18 \text{ hl} = 0,418 \text{ kl} = 418 l = 41800 \text{ cl}$.

Unitatea principală de măsură pentru **masă** este gramul (g) care are submultiplii : dg, cg, mg și multiplii :dag, hg, kg.

Multiplii			Unitatea principala g	Submultiplii		
kg	hg	dag		dg	cg	mg
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Ex. $25,3 \text{ hg} = 253 \text{ dag} = 2,53 \text{ kg} = 2530 \text{ g}$

Unitatea principală de măsură pentru **timp** este secunda (s).

$1 \text{ ora (h)} = 60 \text{ minute (min)} = 3600 \text{ secunde (s)}$

Ex. $372 \text{ s} = 60 \text{ min } 12 \text{ s}$

$0,4 \text{ h} = 0,4 \times 60 \text{ min} = 24 \text{ min} = 24 \times 60 \text{ s} = 1440 \text{ s}$

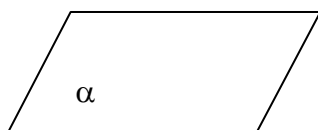
$48 \text{ min } 27 \text{ s} + 5 \text{ h } 56 \text{ s} = 5 \text{ h } 48 \text{ min } 83 \text{ s} = 5 \text{ h } 49 \text{ min } 23 \text{ s}$

V. 2. Dreapta

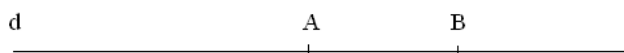
Punctul, dreapta și planul sunt noțiuni geometrice fundamentale care nu se definesc.

x A ← punct

_____ d ← dreapta


 ← plan

Axioma dreptei: prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.



x C

Vom scrie $A, B \in d, C \notin d$.

Două drepte pot fi : **concurente** (când au un singur punct comun), **paralele** (dacă nu au nici un punct comun, dar fac parte din același plan), **necoplanare** (dacă nu sunt situate în același plan).

Semidreapta este o parte dintr-o dreaptă, limitată de un punct numit origine.

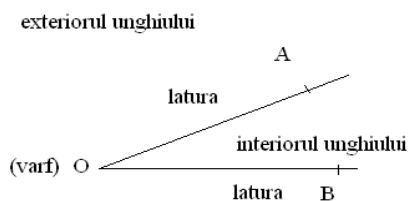
Segmentul este mulțimea punctelor de pe o dreaptă aflate între două puncte ale drepteii, numite capete. Lungimea segmentului este distanța dintre capetele segmentului. Două **segmente** se numesc **congruente** dacă au aceeași lungime. **Mijlocul** unui segment este punctul care împarte segmentul în două segmente congruente.

Trei sau mai multe **puncte** se numesc **coliniare** dacă aparțin aceleiași drepte. Se numesc **puncte coplanare** punctele care se află în același plan.

O **dreaptă** poate fi : **conținută** într-un plan (dacă cel puțin 2 puncte ale ei aparțin planului), **paralelă** cu planul (dacă ea nu are puncte comune cu planul), **incidentă** (dacă are un singur punct comun cu planul).

V. 3. Unghiul

Figura geometrică formată din două semidrepte care au originea comună se numește **unghi**.



Unghiul poate fi : **nul** (când laturile sale coincid), **alungit** (când laturile sunt semidrepte opuse), **propriu** (când nu e nici nul, nici alungit).

Măsura unui unghi este dată de deschiderea dintre laturile sale. Unitatea de măsură a unghiului se numește **grad** (sexagesimal) cu multiplii : minutul ($1^0 = 60'$) și secunda ($1' = 60''$). Instrumentul de măsură este **raportorul**.

Unghiul poate fi : **ascuțit** (când măsura sa este mai mică de 90^0), **obtus** (când măsura sa este mai mare de 90^0) sau **drept** (când are 90^0).

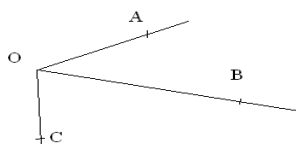
Ex. a) $62^045'57'' + 18^029'36'' = 80^074'93'' = 81^014'93'' = 81^015'33''$

b) $135^018'12'' - 42^036'25'' = 134^077'72'' - 42^036'25'' = 92^041'47''$

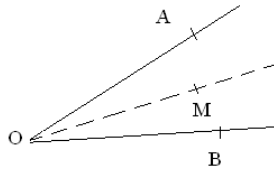
c) $3 \cdot 14^053'' = 42^0159'' = 42^02'39''$

d) $125^0 : 4 = 124^060' : 4 = 31^015'$

Două unghiuri care au măsurile egale se numesc **unghiuri congruente**. Două unghiuri proprii care au vârful comun și o latură comună situată în interiorul unghiului format de cele două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente**.



Bisectoarea unui unghi propriu este semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care formează cu laturile unghiului inițial două unghiuri congruente.



Două **unghiuri** se numesc **suplementare** dacă suma măsurilor lor este de 180° . Două unghiuri se numesc **complementare** dacă suma măsurilor lor este de 90° .

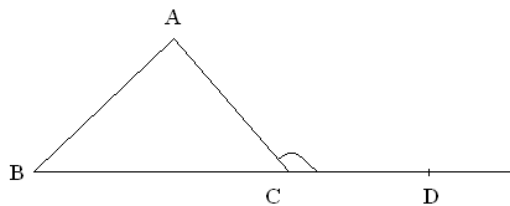
Ex. Supplementul unghiului de $75^{\circ}29'17''$ este $180^{\circ}-75^{\circ}29'17''=179^{\circ}59'60''-75^{\circ}29'17''=104^{\circ}30'43''$

Complementul său este $90^{\circ}-75^{\circ}29'17''=89^{\circ}59'60''-75^{\circ}29'17''=14^{\circ}30'43''$

Două unghiuri cu același vârf care au laturile unuia în prelungirea laturilor celuilalt se numesc unghiuri **opuse la vârf**. Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente. Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360° .

V. 4. Congruența triunghiurilor ; perpendicularitate în plan ; paralelism

Figura geometrică formată din cele trei segmente determinate de trei puncte necoliniare se numește **triunghi**. Suma lungimilor laturilor unui triunghi se numește **perimetrul** triunghiului (P), iar jumătatea acestuia este **semiperimetrul** (p). După laturi triunghiul poate fi: **scaln** (laturile au măsuri diferite), **isoscel** (două laturi sunt congruente), echilateral (toate laturile sunt congruente). După unghiuri triunghiul poate fi: **ascuțitunghic** (toate unghiurile sunt ascuțite), **dreptunghic** (un unghi este drept), **obtuzunghic** (un unghi este obtuz). Suma măsurilor unghiurilor în orice triunghi este de 180° . Unghiul care este adiacent și suplementar cu un unghi al unui triunghi se numește **unghi exterior** al triunghiului.



Două **triunghiuri** sunt **congruente** dacă laturile triunghiurilor sunt respectiv congruente și unghiurile sunt respectiv congruente. Cazurile de congruență pentru triunghiuri oarecare:

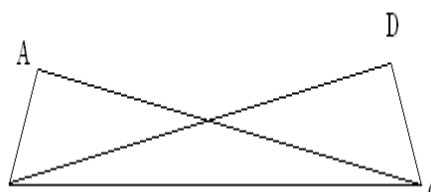
- L.U.L. (latură-unghi-latură)
- U.L.U. (unghi-latură-unghi)
- L.L.L. (latură-latură-latură)

Datorită criteriului 2 și faptului că suma măsurilor unghiurilor în triunghi este 180° , se poate enunța

- L.U.U. (latură-unghi-unghi)

Metoda triunghiurilor congruente ajută la demonstrarea congruenței a două laturi sau două unghiuri pe care trebuie să le încadram în triunghiuri despre care se va arăta că sunt congruente (conform unuia din cazurile de congruență).

Ex. În figura următoare $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ și $\angle ACB \equiv \angle BDC$. Demonstrăm că $\angle BAC \equiv \angle BDC$ și $[AC] \equiv [BD]$.



Privim ΔABC și ΔDCB . Avem $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBC$ (ipoteză), $[BC] \equiv [BC]$ (lat. comună) și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$ (ipoteză) \Rightarrow (conform U.L.U.) $\Delta ABC \equiv \Delta DCB \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$ și $[AC] \equiv [BD]$.

Două **drepte concurente** sunt **perpendiculare** dacă unul din unghiurile ce se formează în jurul punctului lor comun este unghi drept ($d \perp g$).

Fiind dat un punct A exterior dreptei d , atunci punctul $B \in d$ a. î. $AB \perp d$ se numește **picioarul perpendicularei** din A pe d .



Distanța de la un punct exterior unei drepte la dreaptă este distanța dintre punct și picioarul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă $d(A, d) = AB$.

Criteriile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice :

- C. C. (catetă-catetă)
- C. U. (catetă-unghi)
- I. U. (ipotenuză-unghi)
- I. C. (ipotenuză-catetă)

Proprietatea **bisectoarei** : un punct din interiorul unui unghi propriu aparține bisectoarei unghiului dacă și numai dacă

Distanțele de la punct la laturile unghiului sunt egale.

Concurența bisectoarelor într-un triunghi : în orice triunghi cele trei bisectoare sunt concurente (punctul lor de intersecție este **centrul cercului înscris** în triunghi).

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.

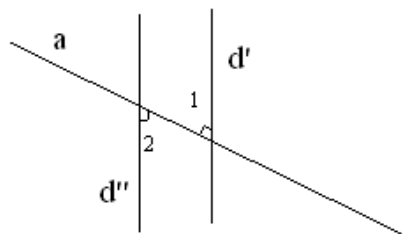
Proprietatea **mediatoarei** : un punct aparține mediatoarei unui segment dacă și numai dacă are distanțele egale față de extremitățile segmentului.

Concurența mediatoarelor : în orice triunghi mediatoarele celor trei laturi sunt concurente (punctul lor de intersecție este **centrul cercului circumscris** triunghiului).

Două **drepte** sunt **paralele** dacă sunt coplanare și nu au nici un punct comun.

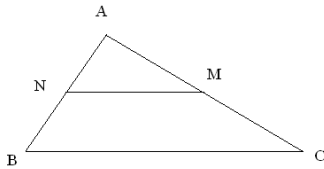
Axioma paralelelor (Euclid) : printr-un punct exterior unei drepte date, trece o singură paralelă la dreapta dată.

Două drepte intersectate cu o secantă formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, dacă și numai dacă dreptele sunt paralele.



$d' \parallel d'' \Leftrightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$

Într-un triunghi, segmentul care unește mijloacele a două laturi se numește **linie mijlocie** a triunghiului și ea are proprietatea că e paralelă cu cea de-a treia latură și jumătate din lungimea acesteia.



MN linie mijlocie \Leftrightarrow
 $MN \parallel BC$ și $2MN = BC$

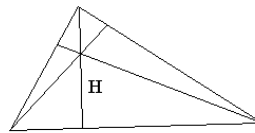
V. 5. Proprietăți ale triunghiurilor

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° .

Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente cu el.

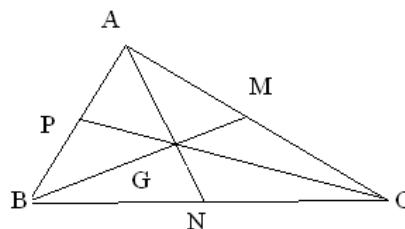
O înălțime a unui triunghi este segmental determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei dusă din acel vârf pe latura opusă.

Înălțimile în orice triunghi sunt concurente, iar punctul lor comun se numește **ortocentrul** triunghiului (H).



Segmentul determinat de un vârf al unui triunghi și mijlocul laturii opuse se numește **mediană**.

Medianele în orice triunghi sunt concurente; punctul lor comun se numește **centrul de greutate** al triunghiului și se află la 2 treimi de vârf și o treime de bază.



$GB = 2/3 \text{ BM}$;
 $GM = 1/3 \text{ BM}$.

Proprietățile triunghiului isoscel :

- într-un triunghi isoscel unghiurile alăturate bazei sunt congruente
- într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului din vârf, înălțimea și mediana corespunzătoare bazei coincid și sunt incluse în mediatoarea bazei
- medianele laturilor congruente sunt congruente (analog pentru înălțimi, bisectoare)

Proprietățile triunghiului echilateral :

-într-un triunghi echilateral toate unghiurile sunt congruente (au 60^0)

-într-un triunghi echilateral mediana, bisectoarea și înălțimea fiecărei laturi coincid și sunt incluse în mediatoarea laturii respective.

Proprietățile triunghiului dreptunghic :

-într-un triunghi dreptunghic isoscel unghiurile alăturate bazei au fiecare 45^0

-într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei

-într-un triunghi dreptunghic cateta care se opune unghiului de 30^0 este jumătatea ipotenuzei

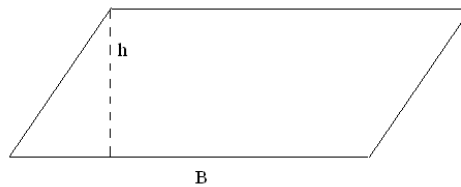
-centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic (intersecția mediatoarelor) se află la mijlocul ipotenuzei

-ortocentrul unui triunghi dreptunghic este vârful triunghiului drept.

V. 6. Patrulatere. Arii

Suma măsurilor unui patrulater convex este egală cu 360^0 .

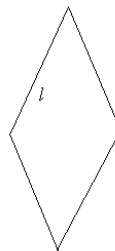
Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.



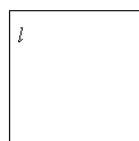
Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.



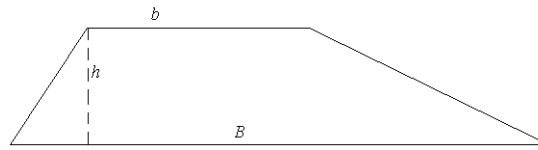
Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.



Pătratul este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente (sau este rombul cu un unghi drept).



Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele numite baze și două neperalele.



Segmentul care unește mijloacele laturilor neperalele se numește **linie mijlocie în trapez**; este paralelă cu bazele și egală cu semisuma lor.

Proprietățile paralelogramului :

- laturile opuse sunt congruente
- unghiurile opuse sunt congruente
- unghiurile alăturate sunt suplementare
- diagonalele au același mijloc

Proprietățile dreptunghiului :

- are toate proprietățile paralelogramului
- toate unghiurile au 90^0
- diagonalele sunt congruente

Proprietățile rombului :

- are toate proprietățile paralelogramului
- are toate laturile congruente
- diagonalele sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor

Proprietățile pătratului :

- are toate proprietățile dreptunghiului și ale rombului

Arii :

-aria triunghiului $A = \frac{B \cdot h}{2}$

-aria triunghiului dreptunghic $A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

-aria paralelogramului $A = B \cdot h$

-aria dreptunghiului $A = l \cdot L$

-aria rombului $A = B \cdot h = \frac{d \cdot D}{2}$

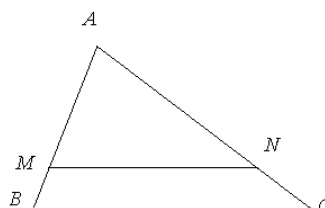
-aria pătratului $A = l^2$

-aria trapezului $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

V. 7. Asemănarea triunghiurilor

Teorema paralelelor echidistante : Dacă dreptele paralele d_1, d_2, \dots, d_n determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

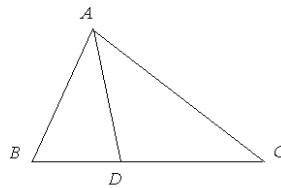
Teorema lui Thales : O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

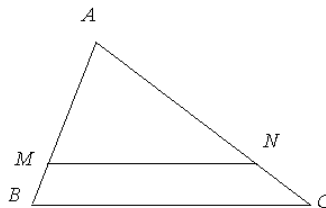
Teorema paralelelor neechidistante : Dreptele paralele d_1, d_2, \dots, d_n determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

Teorema bisectoarei : Într-un triunghi bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu laturile unghiului.



$$[AD \text{ bisectoarea } \sphericalangle BAC \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Teorema fundamentală a asemănării : O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.



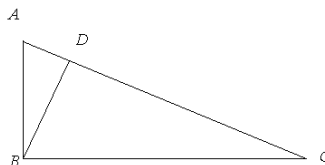
$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta AMN$$

Criteriile de asemănare :

- cazul I : două triunghiuri sunt asemenea dacă au două unghiuri respectiv congruente ;
- cazul II : două triunghiuri sunt asemenea dacă au 2 laturi respectiv proporționale și unghiurile dintre aceste laturi congruente ;
- cazul III : două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale.

V. 8. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Teorema înălțimii: Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



$$BD^2 = AD \cdot DC$$

Teorema catetei: Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este media geometrică a lungimii proiecțiilor sale pe ipotenuză și a lungimii ipotenuzei.

$$AB^2 = AD \cdot DC; \quad BC^2 = DC \cdot AC$$

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Definirea funcțiilor trigonometrice:

sinus(sin) = cateta opusă / ipotenuză

cosinus(cos) = cateta alăturată / ipotenuză

tangenta(tg) = cateta opusă / cateta alăturată

cotangenta(ctg) = cateta alăturată / cateta opusă

Formula fundamentală a trigonometriei:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Valori ale funcțiilor trigonometrice pentru câteva unghiuri:

	sin	cos	tg	ctg
30 ⁰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45 ⁰	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60 ⁰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câteva formule de trigonometrie:

$$\cos x = \sin (90-x); \quad \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x;$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} (90-x)$$

Aria unui triunghi:

$$A = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}; \quad A = AB \cdot BC \cdot \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2};$$

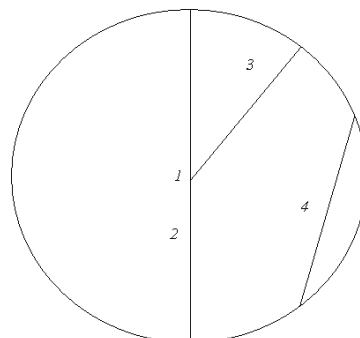
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt laturile triunghiului, iar } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (pentru triunghiul echilateral)}$$

$$\text{Raza cercului înscris într-un triunghi: } r = \frac{S}{p}$$

$$\text{Raza cercului circumscris unui triunghi: } R = \frac{abc}{4S}$$

V. 9. Cercul. Poligoane regulate



l=centrul cercului

- 2=diimetrul
- 3=raza
- 4=coarda

Unghiuri în cerc:

- unghi la centru (vârful este centrul cercului, iar laturile sunt raze) : măsura este egală cu măsura arcului cuprins între laturi.
- unghi înscris în cerc (vârful este pe cerc, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu jumătatea măsurii arcului cuprins între laturi.
- unghi cu vârful în interior (vârful este în interiorul cercului, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturi și prelungirile lor.
- unghi cu vârful în exterior (vârful este în exteriorul cercului, iar laturile sunt coarde) : măsura este egală cu semidiferența măsurilor arcelor cuprinse între laturi.

Pozițiile unei drepte față de cerc :

- secantă : are două puncte comune cu cercul
- tangentă : are un punct comun cu cercul (raza și tangenta într-un punct sunt perpendiculare)
- exterioară : nu are puncte comune cu cercul.

Patrulatere înscritibile (cu vârfurile pe un cerc) ; proprietăți :

- un **patrulat** este **inscriptibil** dacă și numai dacă unghiurile sale opuse sunt suplementare
- un patrulatere este inscriptibil dacă și numai dacă unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Un **poligon regulat** este poligonul convex cu toate laturile și toate unghiurile congruente.

Ex : triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat.

Calculul elementelor în poligoane regulate:

	latura	apotema(=r)	aria
triunghi echilateral	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
hexagon regulat	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

unde R=raza cercului circumscris, iar r= raza cercului înscris.

Lungimea cercului : $L = 2\pi \cdot R$

Aria discului : $A = \pi R^2$.

V. 10. Puncte, drepte, plane.Paralelism în spațiu

Un **plan** poate fi **determinat** de:

- trei puncte necoliniare
- o dreaptă și un punct care nu-i aparține
- două drepte paralele
- două drepte concurente

Axioma lui Euclid : Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la dreapta dată.

Teoreme de paralelism :

- dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci orice plan care conține dreapta și-l intersectează pe primul o face după o dreaptă paralelă cu cea dată.

- dându-se două plane paralele, orice dreaptă dintr-unul este paralelă cu celălalt.
- dacă un plan intersectează două plane paralele, atunci dreptele de intersecție sunt paralele.
- dacă un plan conține două drepte concurente care sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.
- două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele.
- mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare pe care le intersectează segmente proporționale.

V. 11. Perpendicularitate în spațiu

Se numesc **drepte perpendiculare** două drepte care formează un unghi drept.

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din plan, atunci ea este perpendiculară pe plan.

Teoreme :

- două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele
- două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele
- teorema celor trei perpendiculare** : dacă dintr-un punct exterior unui plan se duce o perpendiculară pe acel plan, iar din piciorul acesteia se duce o perpendiculară pe o dreaptă conținută în plan, atunci dreapta ce unește punctul cu piciorul celei de a doua perpendicularare este perpendiculară pe dreapta conținută în plan.

Unghiuri în spațiu:

Prin **unghiul a două drepte în spațiu** înțelegem orice unghi ascuțit sau drept cu vârful în orice punct al spațiului și cu laturile paralele cu dreptele date.

Numim **unghi al unei drepte cu un plan** unghiul pe care acea dreaptă îl face cu proiecția ei pe plan.

Se numește **unghi diedru** figura geometrică formată de două semiplane delimitate de aceeași dreaptă.

Se numește **unghi plan** asociat unui unghi diedru unghiul determinat de două semidrepte conținute respectiv în semiplanele ce formează diedrul având originea pe muchia diedrului și fiind perpendiculară pe acestea.

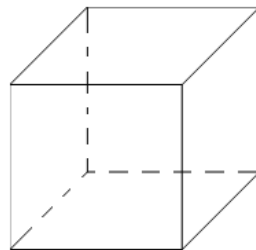
V. 12. Poliedre

-cubul:

$$A=6l^2$$

$$V=l^3$$

$$d=l\sqrt{3}$$



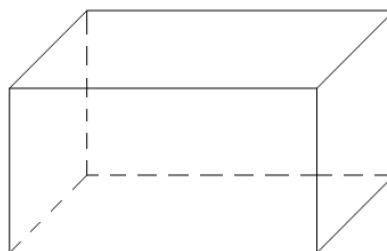
-paralelipipedul dreptunghic:

$$A_{lat} = 2(L+l) \cdot h$$

$$A = 2(lL+hL+hl)$$

$$V = l \cdot L \cdot h$$

$$d^2 = l^2 + L^2 + h^2$$



-prisma regulată (prisma dreaptă cu baza poligon regulat):

$$A_{\text{lat}} = P_B \cdot h \quad (P_B = \text{perimetrul bazei})$$

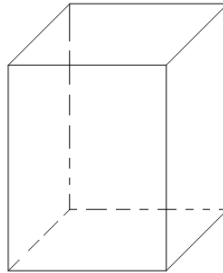
$$A_{\text{tot}} = A_{\text{lat}} + 2A_b \quad (A_b = \text{aria bazei})$$

$$V = A_b \cdot h$$

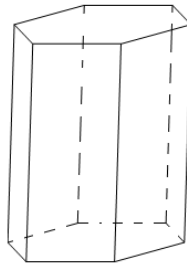
Prisma triunghiulară regulată:



Prisma patrulatară regulată:

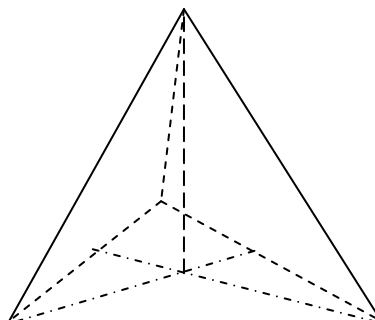


Prisma hexagonală regulată:



-tetraedrul regulat (toate muchiile sunt congruente)

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}, a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}, A = l^2 \sqrt{3}, V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$



-piramida regulată (are baza poligon regulat, iar piciorul perpendicularei din vârf este centrul bazei)

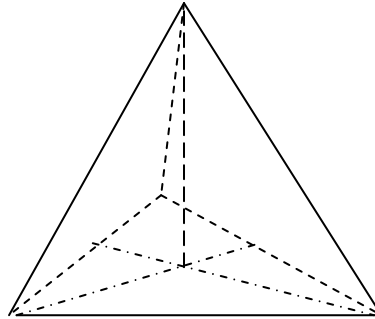
$$A_{\text{lat}} = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \quad (a_p = \text{apotema piramidei})$$

$$A_{\text{tot}} = A_b + A_{\text{lat}}$$

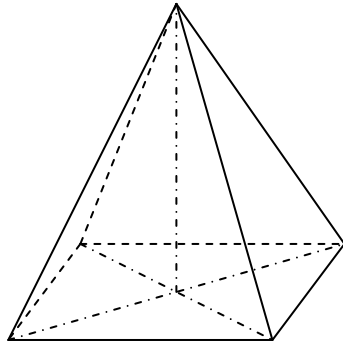
$$a_p^2 = h^2 + a_b^2 \quad (a_b = \text{apotema bazei})$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

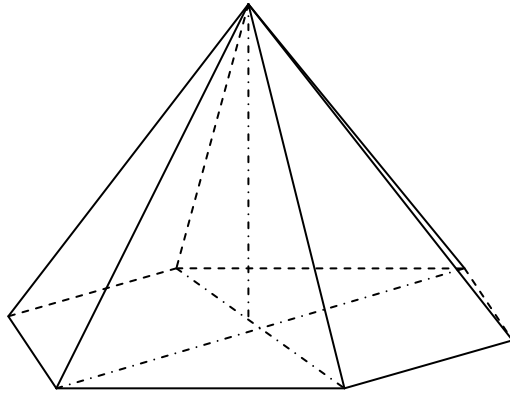
Piramidă triunghiulară regulată



Piramidă patrulateră regulată



Piramidă hexagonală regulată



-trunchiul de piramidă (regulată)

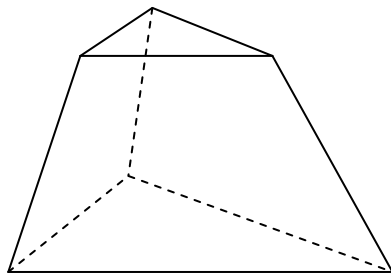
$$A_{\text{lat}} = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_p}{2} \quad (P_B = \text{perimetrul bazei mari}, P_b = \text{perimetrul bazei mici})$$

$$A_{\text{tot}} = A_B + A_b + A_{\text{lat}}$$

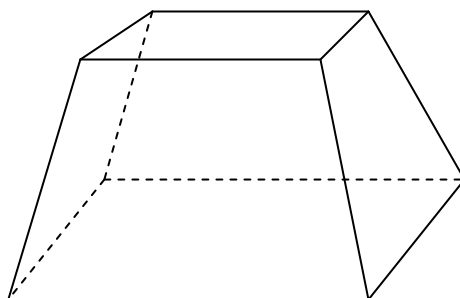
$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) \quad (A_B = \text{aria bazei mari}, A_b = \text{aria bazei mici})$$

$$a_p^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 \quad (a_B = \text{apotema bazei mari}, a_b = \text{apotema bazei mici})$$

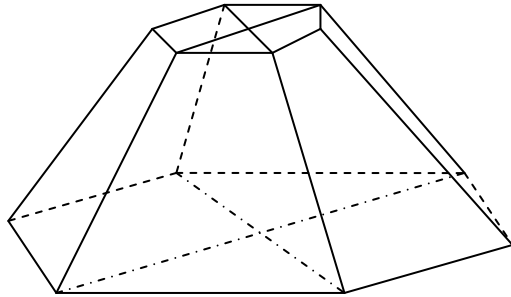
Trunchi de piramidă triunghiulară regulată



Trunchi de piramidă patrulateră regulată



Trunchi de piramidă hexagonală regulată



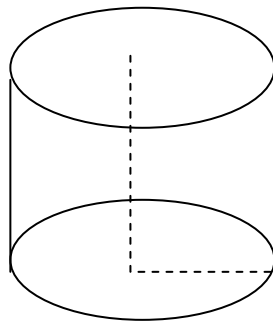
V. 13. Corpuri rotunde

-cilindrul circular drept:

$$A_{\text{lat}} = 2\pi R G$$

$$A_{\text{tot}} = 2\pi R(R+G)$$

$$V = \pi R^2 h$$



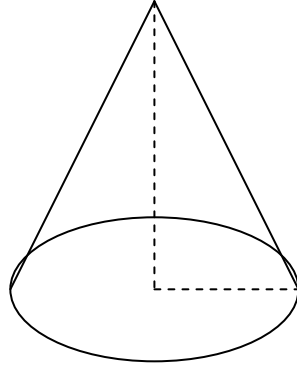
-conul circular drept:

$$G^2 = h^2 + R^2$$

$$A_{\text{lat}} = \pi R G$$

$$A_{\text{tot}} = \pi R(R+G)$$

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

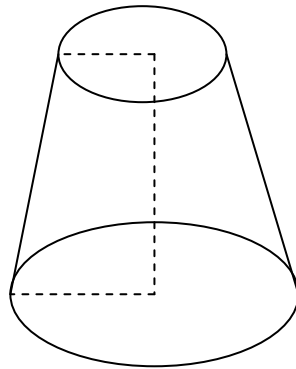


-trunchiul de con:

$$A_{\text{lat}} = \pi g(R+r)$$

$$A_{\text{tot}} = \pi R^2 + \pi r^2 + A_{\text{lat}}$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$



-sfera:

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

