

DIVIZIUNI ȘI FASCICULE ANARMONICE
 NECULAI STANCIU¹

“Geometria proiectivă este toată geometria”
 Arthur Cayley

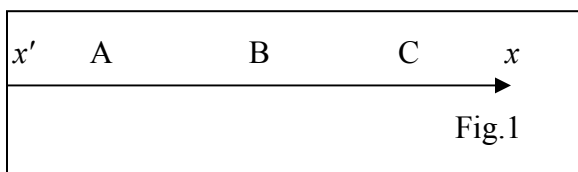
I. DIVIZIUNI ANARMONICE

Aceast articol, este dedicat *geometriei sintetice* (fundamentelor geometriei și geometriei proiective), și se adresează studenților, elevilor, profesorilor de matematică, și în general, oricui este interesat de geometrie.

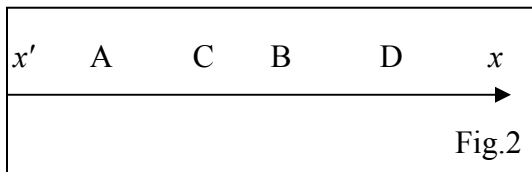
În prezent, geometria din liceu este introdusă via *algebra liniară* (adică *vectorial* nu *sintetic*). Articolul, vine să detalieze noțiunea de *diviziune și fascicul armonic* definită în articolul -“Aplicații ale teoremei lui La Hire” - G.M. - 3 / 2008 ; noțiuni care pot fi înțelese de orice elev din clasa a VI-a.

Diviziunea și fasciculul armonic, sunt tratate în capitole de *fundamentele geometriei*, și în *geometria proiectivă*, unde metoda utilizată este cea *axiomatică sintetică*. Alte noțiuni legate de acestea sunt: *polaritate, dualitate, etc.*

Considerăm punctele coliniare A, B și C ca în fig.1 .



Avem relațiile: (1) $AB = -BA$ și (2) $AB + BC = AC; AB + BC + CA = 0$. Fie acum patru puncte coliniare A, B, C și D ca în fig. 2, astfel încât (3) $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$.



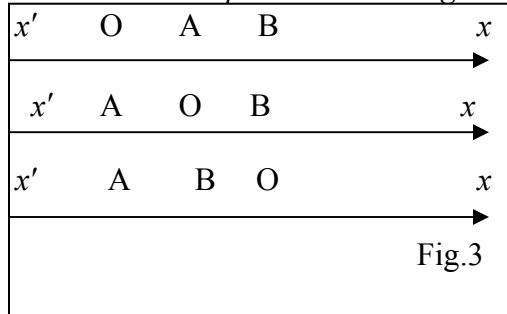
Spunem că perechea (CD) este *armonic conjugată* cu perechea (AB) și reciproc deoarece:

$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$. Se mai spune că A este *conjugatul armonic* al lui B în raport cu C și D sau, B este *conjugatul armonic* al lui A în raport cu C și D sau, C este *conjugatul armonic* al lui D în raport cu A și B sau, D este *conjugatul armonic* al lui C în raport cu A și B .

¹ Profesor, Școala "Geoge Emil Palade" & Școala nr. 6 - Buzău

În continuare vom numi biraport sau, raport anarmonic sau, diviziune anarmonică raportul (4) $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = (ABCD) = r$. Se observă că dacă $r = 1$ atunci $(ABCD)$ este diviziune armonică.

Teorema I.1. *Raportarea la o origine de pe axă.*



Dacă avem axa $x'x$ cu originea O și punctele A și B pe axă atunci (5) $AB = OB - OA$.

Demonstrație. Avem cazurile din fig. 3.

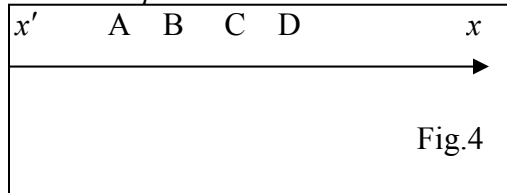
Cazul $O - A - B$. $OA + AB + BO = 0 \Rightarrow$

$$AB = -BO - OA = OB - OA.$$

Cazul $A - O - B$. Din relația (2) avem $AO + OB + BA = 0 \Rightarrow AB = OB + AO = OB - OA$.

Cazul $A - B - O$. $AB + BO + OA = 0 \Rightarrow AB = -BO - OA = OB - OA$.

Cuarțe de punte coliniare.



Avem configurația din fig. 4:

AB și CD sunt segmente care se separă;
 AD și BC sunt segmente care se includ iar;
 AC și BD sunt segmente care se încalcesc.

Teorema I.2. *Echivalența lui Euler.*

$$(6) AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Demonstrație.

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC - AC \cdot BD = AB(AD - AC) + AD(AC - AB) - AC(AD - AB) = AB(AD - AC - AD + AC) + AD(AC - AC) = 0.$$

Teorema I.3. *Punctul care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie segmentul AB , $M \in AB$, $O \in AB$ origine aleasă arbitrar și $k = \frac{AM}{AB}$.

Avem (7) $OM = (1 - k)OA + kOB$.

Demonstrație. Presupunem ordonarea $O - A - M - B$, cu $AM = k \cdot AB$. Rezultă imediat din teorema 1, $OM - OA = k \cdot OB - k \cdot OA$. Celelalte ordonări se tratează analog.

Consecință. Dacă M este mijlocul segmentului AB , atunci $k = \frac{1}{2}$ și $OM = \frac{OA + OB}{2}$.

Teorema I.4. *Unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat.*

Fie pe axa $x'x$, segmentul AB și punctele C , D în interiorul sau în exteriorul segmentului

AB dar de aceeași parte a lui. Dacă $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ atunci $D = C$.

Demonstrație. Considerăm ordonarea $A - C - D - B$.

Din ipoteză rezultă $AC \cdot DB = AD \cdot CB$. Din (6) avem $AD \cdot CB = AC \cdot DB + AB \cdot CD$. Rezultă $AB \cdot CD = 0$, de unde, deoarece $AB \neq 0$ obținem $CD = 0$, adică $C = D$.

În cazul în care C și D sunt ambele exterioare și situate de aceeași parte a segmentului AB , se procedează analog. Cazul în care C și D sunt separate de segmentul AB , adică ordonarea $C - A - B - D$ sau $D - A - B - C$ se exclude deoarece $AB \neq 0$.

Teorema I.5. *Diviziuni anarmonice egale, cu trei perechi de puncte comune.*

Dacă $(ABCD) = (ABCD')$, atunci $D = D'$.

Demonstrație. $(ABCD) = (ABCD') \stackrel{def}{\Rightarrow} \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{D'A}{D'B} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B} \stackrel{T4}{\Rightarrow} D = D'$.

(q.e.d).

Teorema I.6. Valoarea *biraportului* r nu poate fi nici 0 nici 1.

Demonstrație. $r = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \neq 0$ deoarece punctele fiind distincte

$CA \neq 0, CB \neq 0, DA \neq 0, DB \neq 0$.

$$r - 1 = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} - 1 = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} - 1 = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} - 1 = \frac{AC \cdot BD - BC \cdot AD}{BC \cdot AD} \stackrel{T2}{=} \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow r \neq 1.$$

În continuare, vom calcula *valorile biraportului obținute prin permutarea punctelor unei diviziuni anarmonice.*

Teorema I.7. O *transpoziție* a două puncte din aceeași pereche inversează raportul anarmonic.

Demonstrație.
$$\begin{cases} r = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} \\ r_1 = (ABDC) = \frac{DA}{DB} : \frac{CA}{CB} = \frac{DA \cdot CB}{DB \cdot CA} \end{cases} \Rightarrow r \cdot r_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{r}.$$

Am demonstrat $(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} \cdot (BACD) = \frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA} = \frac{CB \cdot DA}{CA \cdot DB} = \frac{1}{(ABCD)}$ (q.e.d).

Teorema I.8. O *transpoziție* a două puncte din perechi diferite ne dă un *raport anarmonic complementar*.

Demonstrație. $r = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$ și $r_2 = (ACBD) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = -\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$. Sumăm cele două egalități și aplicând *echipolența lui Euler* (teorema 2)

obținem: $r + r_2 = \frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = \frac{AD \cdot BC}{AD \cdot BC} = 1 \Rightarrow r_2 = 1 - r \Rightarrow (ACBD) = 1 - r$.

Analog se arată că $(DBCA) = 1 - r$.

Transformările precedente ale raportului anarmonic, definite în *teoremele I.7 și I.8*, compuse succesiv cu ele însele îl reproduc pe r .

Adică :

$$r_1 = \frac{1}{r} \Rightarrow r' = \frac{1}{r_1} = r, \text{ respectiv } r_2 = 1 - r \Rightarrow r'' = 1 - r_2 = r.$$

Vom numi *transpoziții complementare* acele transformări care compuse cu ele însele, lasă *raportul anarmonic* neschimbat.

Teorema I.9. Dacă $(ABCD) = (ABDC)$ sau $(ABCD) = (BACD)$ atunci $(ABCD) = -1$.

Demonstrație. Fie $r = (ABCD) \stackrel{II.7}{\Rightarrow} (ABDC) = \frac{1}{r}$, $(BACD) = \frac{1}{r}$.

Dacă $r = \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = -1$. (q.e.d).

Deoarece cu 4 obiecte putem face 24 de permutări, pentru fiecare diviziune de 4 puncte avem 24 de valori ale rapoartelor anarmonice corespunzătoare câte unei permutări.

Dintre toate acestea numai 6 valori sunt distincte, iar restul se obțin prin transpoziții complementare. Dintr-o permutare dată putem selecta alte trei de același raport anarmonic. Obținem:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = r$$

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{r}$$

$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - r$$

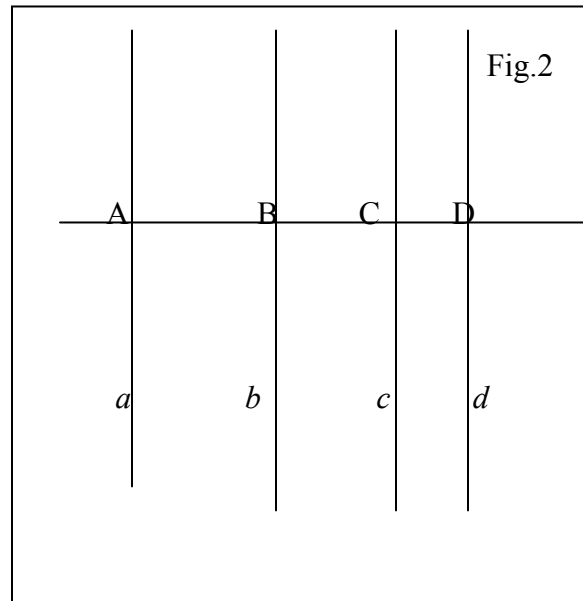
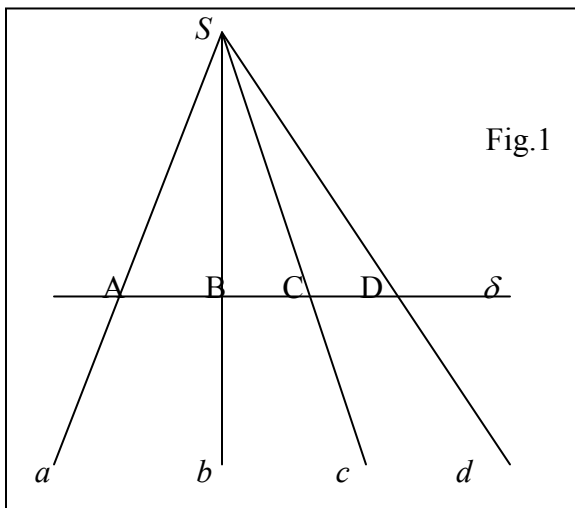
$$(ADBC) = (DACB) = (CBDA) = (BCAD) = \frac{r-1}{r}$$

$$(ACDB) = (CABD) = (BDCA) = (DBAC) = \frac{1}{1-r}$$

$$(ADCB) = (DABC) = (BCDA) = (CBAD) = \frac{r}{r-1}$$

II. FASCICULE ANARMONICE

Considerăm fig.1 unde $S(a, b, c, d)$ sau $S(A, B, C, D)$ reprezintă un *fascicul convergent*, cu punctul S propriu de raze a, b, c, d sau SA, SB, SC, SD și fig.2 în care $S(a, b, c, d)$ este un *fascicul paralel* de raze a, b, c, d sau SA, SB, SC, SD cu punctul S impropriu.



Dacă diviziunea $(ABCD)$ este diviziune armonică atunci fasciculul atașat $S(ABCD)$ se numește *fascicul armonic*.

Biraportul atașat unui fascicul convergent.

Fie fasciculul $S(abcd)$ tăiat de secanta δ (vezi fig.1) în punctele

$A = \delta \cap a, B = \delta \cap b, C = \delta \cap c, D = \delta \cap d$. Dacă $S(XYZ)$ ^{not} = aria triunghiului de vârfuri

X, Y și Z , $\hat{XY} = \hat{XSY}$, $h = d(S, \delta)$, atunci $\frac{CA}{CB} = \frac{CA \cdot h}{CB \cdot h} = \frac{2 \cdot S(CSA)}{2 \cdot S(CSB)} = \frac{S(CSA)}{S(CSB)}$.

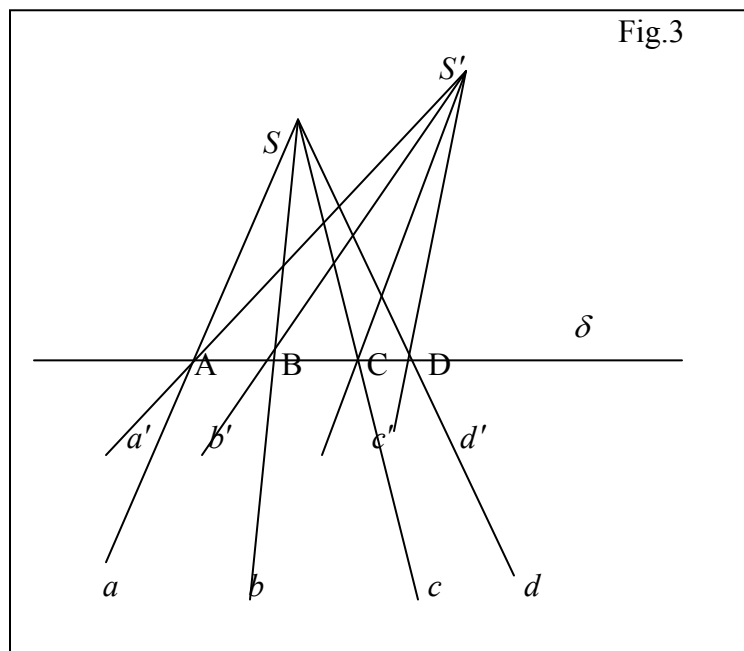
$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{S(CSA)}{S(CSB)} \cdot \frac{S(DSA)}{S(DSB)} = \frac{SC \cdot SA \cdot \sin(\hat{ca})}{SC \cdot SB \cdot \sin(\hat{cb})} \cdot \frac{SD \cdot SA \cdot \sin(\hat{da})}{SD \cdot SB \cdot \sin(\hat{db})} = \\ &= \frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})} \cdot \frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}. \end{aligned}$$

Dacă $S(abcd)$ ^{not} = $\frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})} \cdot \frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})}$, atunci rezultă $(ABCD) = S(abcd)$.

Teoreme de invarianță

Teorema II.1. Fiind date pe dreapta δ , punctele fixe A, B, C, D . Pentru orice $S \notin \delta$, notăm $a = SA, b = SB, c = SC, d = SD$. Biraportul atașat fasciculului $S(abcd)$ este *invariant*.

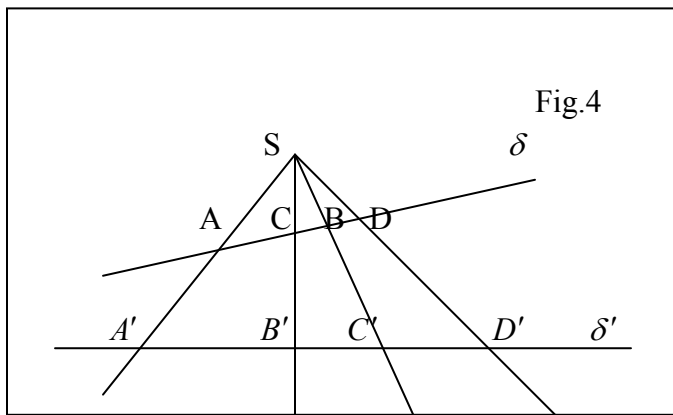
Demonstrație. Fie $S, S' \notin \delta$, ca în fig.3.



Din $S(abcd) = (ABCD)$ și $S'(a'b'c'd') = (ABCD)$ rezultă $S(abcd) = S'(a'b'c'd')$. (q.e.d).

Teorema II.2. Fiind dat fasciculul fix de vârf S și raze a, b, c, d . Pentru orice secantă δ care intersectează razele fasciculului în $A = a \cap \delta, B = b \cap \delta, C = c \cap \delta,$ și $D = d \cap \delta$, *biraportul* atașat diviziunii $(ABCD)$ este *invariant*.

Demonstrație. Fie δ și δ' două secante oarecare (fig.4), care intersectează razele fasciculului în punctele A, B, C, D și A', B', C', D' .



Avem $(ABCD) = S(abcd)$ și $(A'B'C'D') = S'(a'b'c'd')$. Rezultă $(ABCD) = (A'B'C'D')$. (q.e.d).

Fasciculul tăiat de o secantă paralelă cu una din raze.

Fie fasciculul $S(abcd)$ și $\delta \parallel a$ (fig.5).

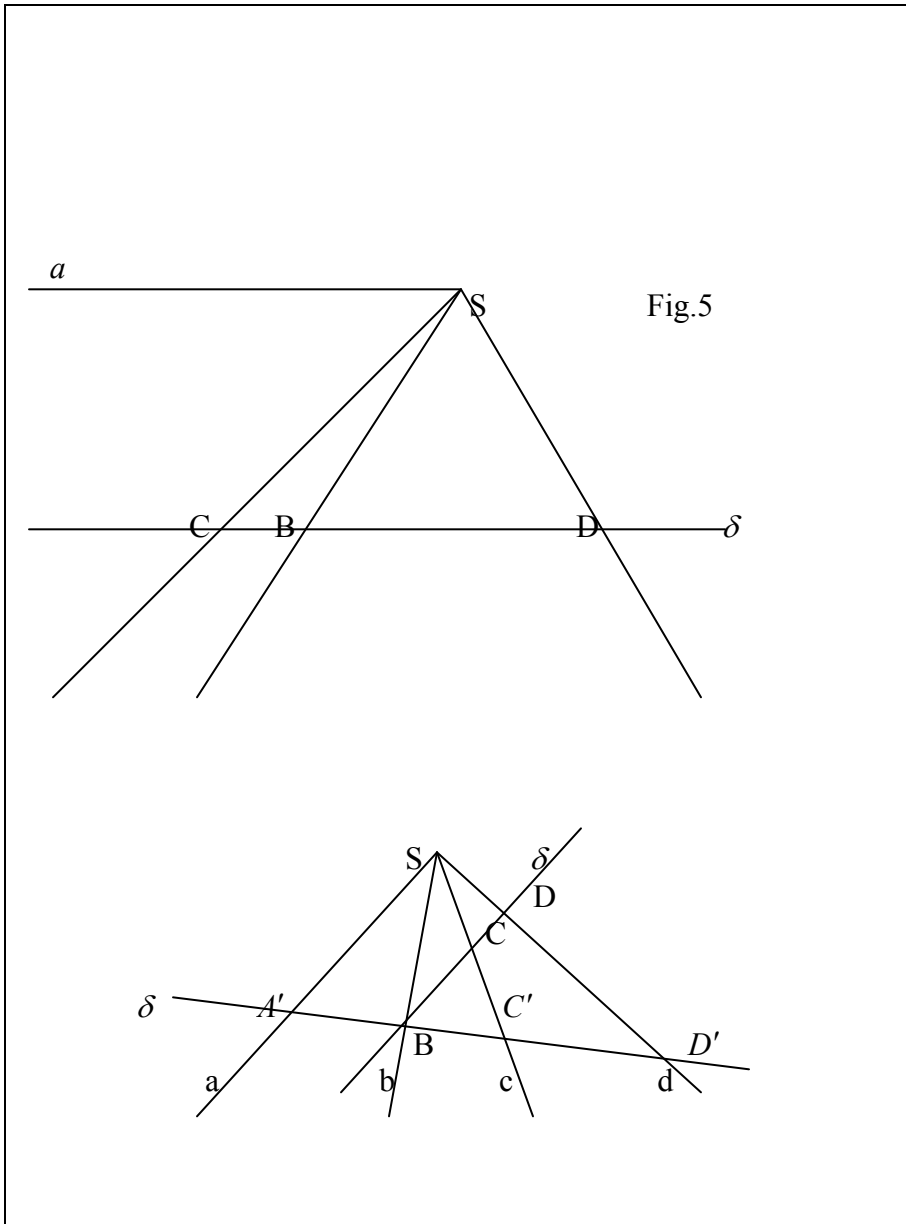


Fig.5

$$(1) S(abcd) = (A'BC'D') = \frac{C'A'}{C'B} : \frac{D'A'}{D'B}, (2) \Delta C'A'S \approx \Delta C'BC \Rightarrow \frac{C'A'}{C'B} = \frac{SA'}{CB},$$

$$(3) \Delta D'A'S \approx \Delta D'BD \Rightarrow \frac{D'A'}{D'B} = \frac{SA'}{DB}. \text{ Din (1), (2) și (3) rezultă :}$$

$$S(abcd) = \frac{SA'}{CB} : \frac{SA'}{DB} = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB} = (A'BC'D').$$

Avem următoarea *regulă mnemotehnică* pentru scrierea valorii biraportului $\frac{1}{CB} : \frac{1}{DB}$.

Deoarece $\delta \parallel a$ scriem $\delta \cap a = A_i$ (*punctul impropriu* pe direcția paralelelor $\delta \parallel a$),

$S(abcd) = \frac{CA_i}{CB} : \frac{DA_i}{DB}$ și luom $CA_i : DA_i = 1$ (trecerea la limită $A' \rightarrow A_i$).

$$S(abcd) = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB}.$$

Consecință. Fie B, C, D puncte fixe pe dreapta δ , $a \parallel \delta, S \in a, SB = b, SC = c, SD = d$.

Atunci $\forall S \in a, S(abcd)$ este invariant.

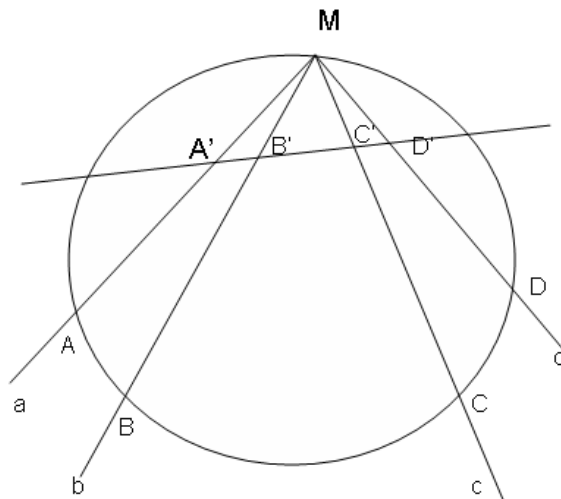
Demonstrație. Fie $A_i = \delta \cap a. S(abcd) = (A_iBCD) = \frac{CA_i}{CB} : \frac{DA_i}{DB} = \frac{1}{CB} : \frac{1}{DB} = \text{constant}$.

Teorema II.3. Fie A, B, C, D puncte fixe pe $C(O; R)$ și $M \in C(O; R)$ (fig.6). Dacă $MA = a, MB = b, MC = c, MD = d$ atunci, $\forall M \in C(O; R) M(abcd)$ este invariant.

Demonstrație. $M(abcd) = \frac{\sin(\hat{ca})}{\sin(\hat{cb})} : \frac{\sin(\hat{da})}{\sin(\hat{db})} = \text{constant}$, deoarece A, B, C, D sunt puncte

fixe și $\hat{ca} = \frac{C\hat{B}A}{2R} = \text{ct.}, \hat{cb} = \frac{C\hat{B}}{2R} = \text{ct.}, \hat{da} = \frac{D\hat{C}B A}{2R} = \text{ct.}, \hat{db} = \frac{D\hat{C}B}{2R} = \text{ct.}$

Fig.6



Observație. Din figura 6 rezultă $M(ABCD) = M(A'B'C'D')$.

Teorema II.4. Fie A, B, C , și D puncte fixe pe $C(O; R)$ iar a, b, c , și d tangentele în cele patru puncte la cercul $C(O; R)$. Atunci oricare ar fi tangenta t la cercul $C(O; R)$ în punctul $T \in C(O; R)$, punctele $A_1 = a \cap t, B_1 = b \cap t, C_1 = c \cap t$ și $D_1 = d \cap t$ formează o diviziune anarmonică $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ invariantă.

Demonstrație. Considerăm fig. 7.

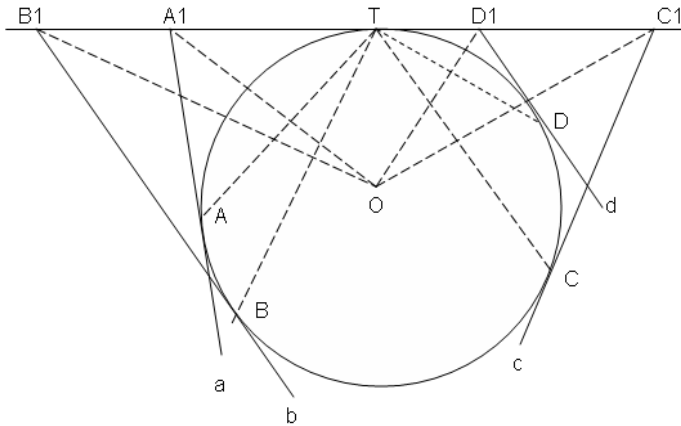


Fig. 7

Avem $(A_1 B_1 C_1 D_1) = O(A_1 B_1 C_1 D_1)$. Formăm apoi fasciculul cu vârful în T și raze $TA \perp OA_1, TB \perp OB_1, TC \perp OC_1$ și $TD \perp OD_1$. Deci $T(ABCD) = O(A_1 B_1 C_1 D_1)$.

Obținem $(A_1 B_1 C_1 D_1) = T(ABCD) = (\sin \frac{\widehat{CBA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{CB}}{2R}) : (\sin \frac{\widehat{DA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{BCD}}{2R}) = \text{constant}$.

Teorema II.5. Pe cercul $C(O; R)$ considerăm punctele distincte A, B, C, D și tangentele a, b, c, d în aceste puncte la cerc (fig. 8). Avem egalitățile:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd).$$

Demonstrație. $A(aBCD) = (\sin \widehat{CAa} : \sin \widehat{CAB}) : (\sin \widehat{DAa} : \sin \widehat{DAB}) =$

$$= (\sin \frac{\widehat{CDA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{BC}}{2R}) : (\sin \frac{\widehat{DA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{BCD}}{2R}) = r = \text{constant} =$$

$$= B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) \text{ (din egalități de sinusuri).}$$

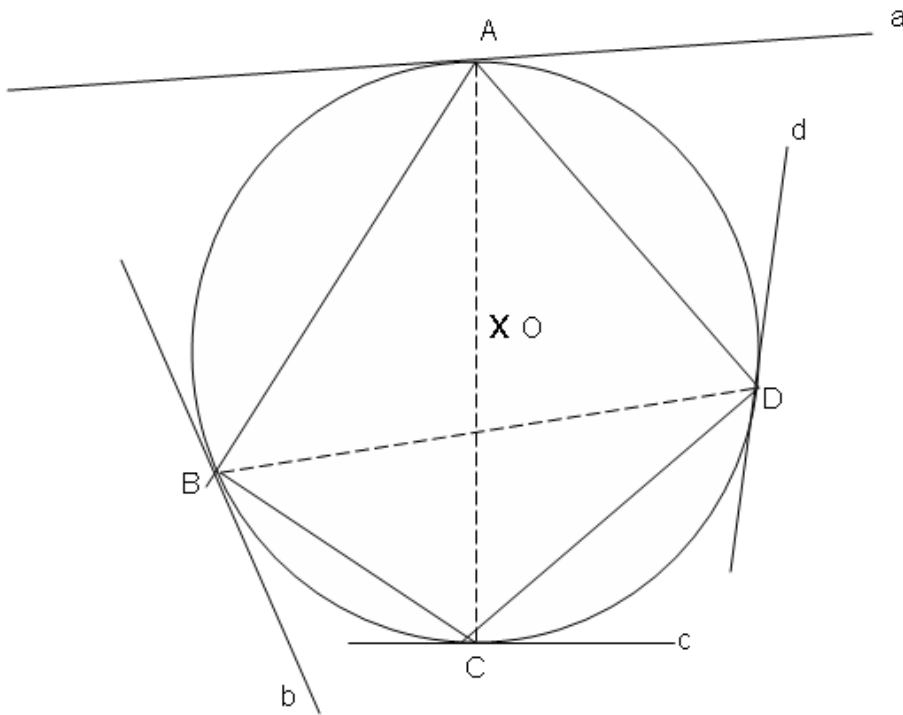


Fig. 8

Observație. *Teorema II.5* reprezintă cazul limită a *teoremei II.3* în care punctul M de pe $C(O; R)$ coincide cu unul din punctele A, B, C sau D .

Teorema II.6. Pe cercul $C(O; R)$ se consideră punctele distincte A, B, C, D și tangentele la cerc în aceste puncte: a, b, c, d (fig.9).

Dacă notăm $E = a \cap b, F = b \cap c, G = c \cap d, H = d \cap a, I = b \cap d$ și $J = a \cap c$, atunci avem egalitățile: $(AEJH) = (EBFI) = (JFCG) = (HIGD)$.

Demonstrație. Considerăm fasciculul cu vârful în O și raze OA, OE, OJ și OH

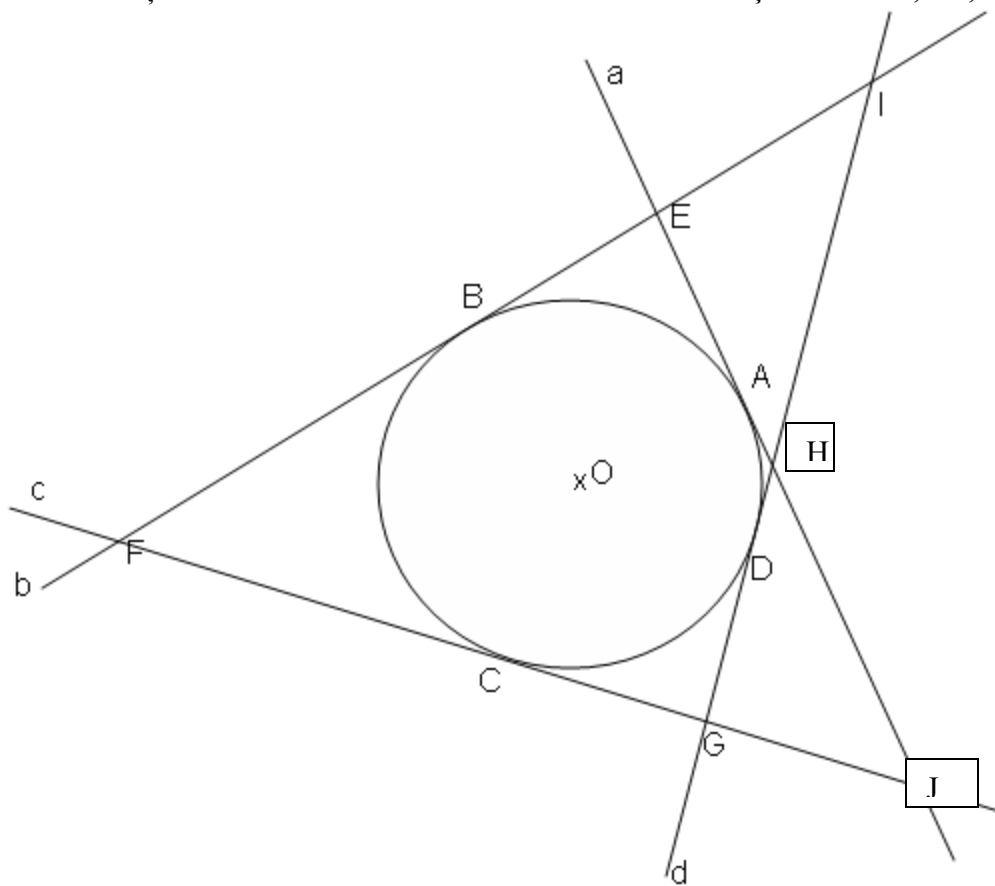


Fig.9

$OAEJH$, apoi fasciculul cu vârful în A și raze perpendiculare pe razele fasciculului anterior : $a \perp OA, AB \perp OE, AC \perp OJ$ respectiv $AD \perp OH$, $A(aBCD)$ și avem :

$$(AEJH) = O(AEJH) = A(aBCD).$$

Analog se obțin și relațiile:

$$(EBFI) = O(EBFI) = B(ABCD);$$

$$(JFCG) = O(JFCG) = C(ABcD);$$

$$(HIGD) = O(HIGD) = D(ABCd).$$

Acum aplicăm relații între sinusuri, ca în teorema 5, pe care aici le detaliem astfel:

$$\hat{C}Aa = \hat{C}BA = c\hat{C}A = \frac{\hat{C}DA}{2R} \text{ și } \hat{C}DA = \frac{\hat{A}BC}{2R} = \pi - \frac{\hat{C}DA}{2R}, \text{ rezultă:}$$

$$\sin(\hat{C}Aa) = \sin(\hat{C}BA) = \sin(c\hat{C}A) = \sin(\hat{C}DA) = \sin\left(\frac{\hat{C}DA}{2R}\right) \text{ și analoagele}$$

$$\sin(\hat{C}AB) = \sin(\hat{C}Bb) = \sin(c\hat{C}B) = \sin(\hat{C}DB) = \sin\left(\frac{\hat{C}B}{2R}\right)$$

$$\sin(\widehat{D\hat{A}a}) = \sin(\widehat{DB\hat{A}}) = \sin(\widehat{D\hat{C}A}) = \sin(\widehat{d\hat{D}A}) = \sin\left(\frac{\widehat{DA}}{2R}\right)$$

$$\sin(\widehat{D\hat{A}B}) = \sin(\widehat{D\hat{B}b}) = \sin(\widehat{D\hat{C}B}) = \sin(\widehat{d\hat{D}B}) = \sin\left(\frac{\widehat{DAB}}{2R}\right).$$

Ținând seama de aceste valori putem scrie:

$$A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd) = \left(\sin \frac{\widehat{CDA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{CB}}{2R}\right) : \left(\sin \frac{\widehat{DA}}{2R} : \sin \frac{\widehat{DAB}}{2R}\right)$$

(q.e.d.).

Observație. Teorema II.6 reprezintă cazul limită al teoremei II. 4 în care tangenta t la cercul $C(O; R)$ coincide cu una din tangentele a, b, c, d .

Teoreme de concurență și coliniaritate.

Teorema II.7. Dacă două diviziuni anarmonice egale $(ABCD) = (AB'C'D')$ au un punct comun A , atunci dreptele BB', CC' și DD' sunt concurente.

Demonstrație. Avem fig.10.

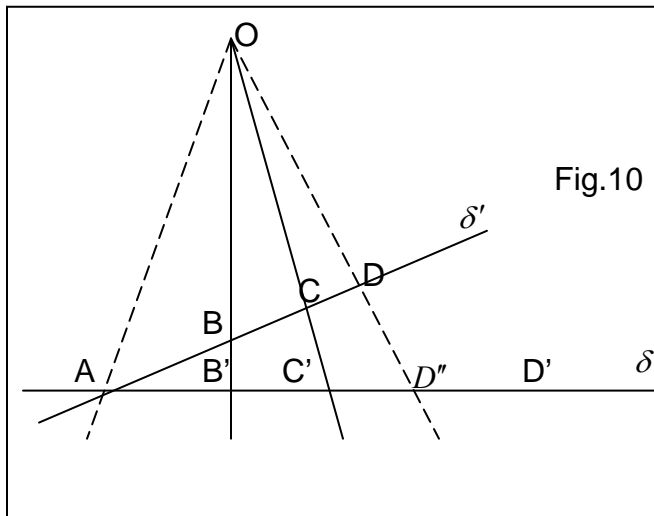


Fig $O = BB' \cap CC'$ și $D'' = OD \cap \delta'$. Din teorema II.2 rezultă $(ABCD) = (AB'C'D'')$ iar, din ipoteză avem $(ABCD) = (AB'C'D')$. Deci $(AB'C'D'') = (AB'C'D')$, apoi din teorema I.5 se obține $D'' = D'$. (q.e.d.).

Teorema II.8. Dacă două fascicule anarmonice egale $S(abcd) = S'(ab'c'd')$ au o rază comună $SS' = a$, atunci punctele de intersecție ale celor trei perechi de raze corespondente: $B = b \cap b', C = c \cap c', D = d \cap d'$ sunt coliniare.

Demonstrație.

Fasciculul de vârf M și raze MB, MC, MA', MA_1 îl tăiem mai întâi cu secanta BC și apoi cu secanta $B'C'$ și aplicăm *teorema II.2*.

$$(1) M(BCA'A_1) = (BCA'A_1) = (B'C'A'N).$$

Fasciculul de vârf A determinat de diviziunea anarmonică $(B'C'A'N)$ îl tăiem cu secanta BC și aplicăm *teorema II.2*.

$$(2) (B'C'A'N) = A(CBA'A_1) = (CBA'A_1).$$

Din (1) și (2) avem $(BCA'A_1) = (CBA'A_1)$ apoi din *teorema I.9* rezultă $(BCA'A_1) = -1$. (q.e.d.).

Teorema II.10. A doua teoremă a lui Pappus.

Pe două drepte δ și δ' luăm trei șiruri de puncte arbitrare $A, B, C \in \delta$ respectiv $A', B', C' \in \delta'$. Intersecțiile $U = BC' \cap B'C$, $V = CA' \cap C'A$ și $W = AB' \cap A'B$ sunt trei puncte coliniare (fig.13).

Demonstrație.

a) cazul dreptelor incidente ($\delta \cap \delta'$)

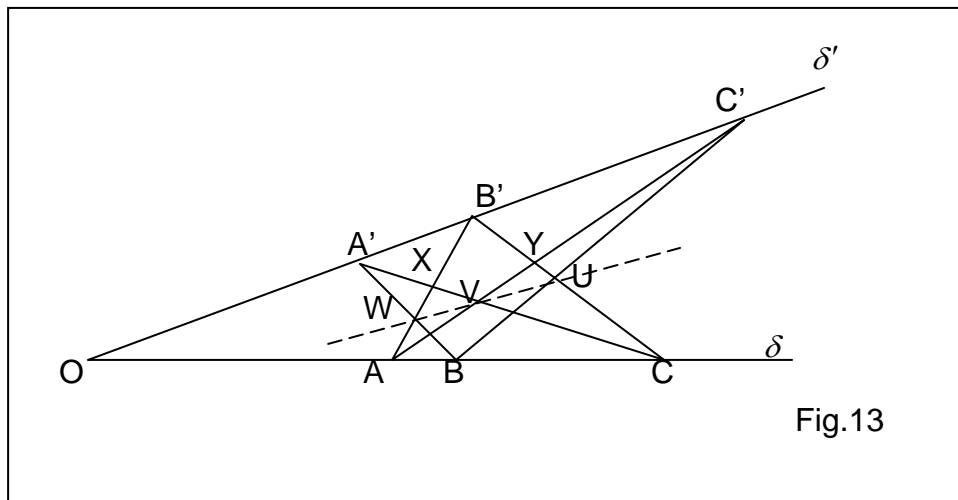


Fig.13

Fie $X = B'A \cap A'C$ și $Y = B'C \cap C'A$.

Considerăm fasciculele de vârfuri A' și C' ale căror raze trec prin punctele diviziunii $(OABC)$. Din *teorema II.1* rezultă (1) $A'(OABC) = C'(OABC)$. Intersectând primul fascicul cu secanta $B'A$, din *teorema II.2* rezultă (2) $A'(OABC) = (B'AWX)$. Analog, intersectând al doilea fascicul cu secanta $B'C$, din *teorema II.2* rezultă (3) $C'(OABC) = (B'YUC)$.

Din (1), (2) și (3) rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, diviziuni anarmonice egale, cu B' punct comun. Conform *teoremei II.7* și schemei de mai jos:

Puncte corespondente

B	B'	punct comun
A	Y	dreapta AY
W	U	dreapta WU
X	C	dreapta XC

Rezultă $AY \cap XC = AC' \cap CA' = V \Rightarrow V \in UW$.(q.e.d).

b) cazul dreptelor paralele ($\delta \parallel \delta'$)

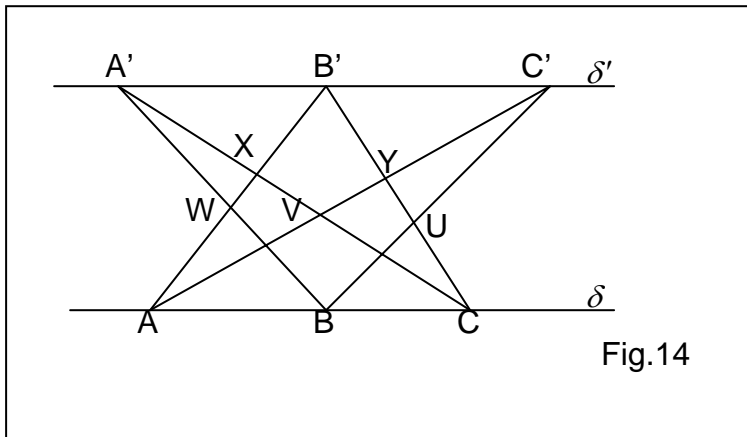


Fig.14

Considerăm fasciculele de vârfuri A' și C' :

(1) $A'(\delta'ABC) = C'(\delta'ABC)$; (2) $A'(\delta'ABC) = (B'AWX)$;(3) $C'(\delta'ABC) = (B'YUC)$.

Rezultă $(B'AWX) = (B'YUC)$, cu B' punct comun, analog ca în cazul a) deducem $V \in UW$.(q.e.d.).

Teorema II.11. Teorema plană a lui Desargues, directă și reciprocă.

Dacă două triunghiuri au vârfurile așezate pe trei drepte concurente atunci laturile lor corespunzătoare se taie în trei puncte coliniare și reciproc dacă intersecția perechilor de laturi a două triunghiuri sunt coliniare atunci vârfurile corespunzătoare sunt așezate pe trei drepte concurente.

Având în vedere că teorema rămâne valabilă și în cazul în care punctul de concurență al celor trei drepte este impropriu iar unul sau toate cele trei puncte de intersecție pot fi improprii enunțul poate fi reformulat astfel:

Fie trei drepte a, b, c pe care luom : $A, A' \in a$; $B, B' \in b$; $C, C' \in c$. Dreptele a, b, c sunt concurente în O (propriu sau impropriu) dacă și numai dacă intersecțiile $A_0 = BC \cap B'C'$, $B_0 = CA \cap C'A'$ și $C_0 = AB \cap A'B'$ sunt situate pe o dreaptă (proprie sau impropriu). Spunem că ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sunt omologice , O este centrul omologiei și $\delta = B_0C_0$ este axa omologiei.

Demonstrație.

Necesitatea. Fie $D = b \cap AC$, $D' = b \cap A'C'$. Considerăm fasciculul $O(abcOB_0)$ tăiat de AC respectiv de $A'C'$ (fig.15). Din teorema II.2., avem relațiile:

(1) $(A'D'C'B_0) = (ADCB_0)$; (2) $(ADCB_0) = B(AbCB_0)$; (3) $(A'D'C'B_0) = B'(A'bC'B_0)$.

Din relațiile de mai sus rezultă $B(AbCB_0) = B'(A'bC'B_0)$, cu rază comună.

Din teorema II.8. și schema de mai jos:

Raze corespondente

BA $B'A'$ $BA \cap B'A' = C_0$

b	b	rază comună
BC	$B'C'$	$BC \cap B'C' = A_0$
BB_0	$B'B_0$	$BB_0 \cap B'B_0 = B_0$

rezultă A_0, B_0, C_0 sunt coliniare. Analog se procedează pentru O punct impropriu. (q.e.d.).

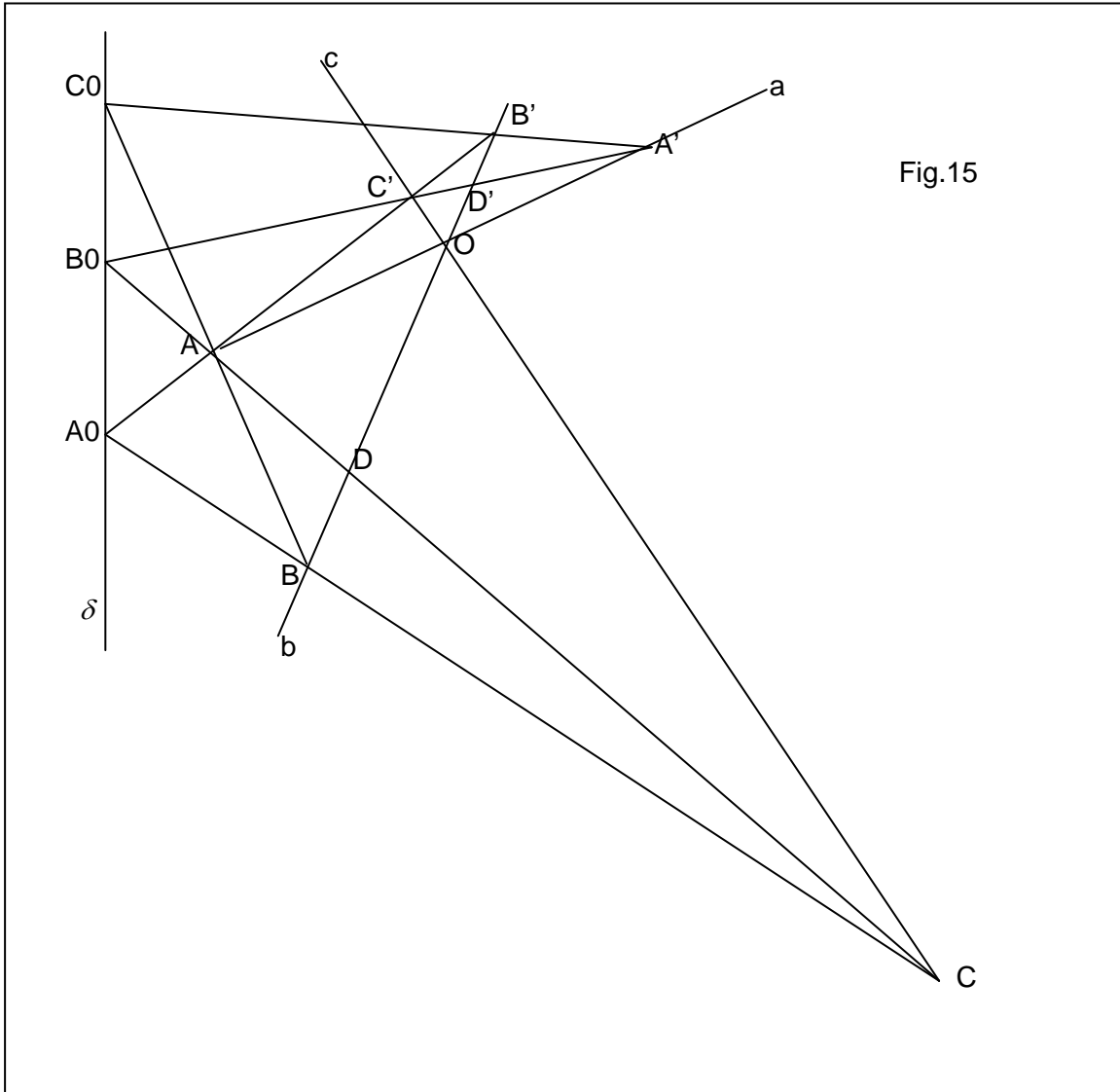


Fig.15

Suficiența. Fie A_0, B_0, C_0 coliniare pe δ . Pe fasciculul de vârf B_0 și raze δ, B_0C, B_0A' considerăm perechile de puncte : $B_0, C_0 \in \delta; C, A \in B_0C; C'A' \in B_0A'$. Deoarece triunghiurile $\Delta A_0CC'$ și $\Delta C_0AA'$ sunt omologice, din *teorema Desargues* (directă) rezultă :

$A_0C \cap C_0A = B, CC' \cap AA' = O$ și $C'A_0 \cap A'C_0 = B'$ sunt coliniare; $O \in BB'$. (q.e.d.).

Teorema II.12. Teorema lui Desargues directă –cazul spațial.

Fie $Oabc$ fasciculul de vârf O - propriu (fig.16)sau O_i - impropriu(fig.17) și $A, A' \in a; B, B' \in b; C, C' \in c$. În aceste condiții, punctele proprii sau improprii $A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ sunt coliniare pe dreapta d (proprie) sau d_i (improprie).

Demonstrație.

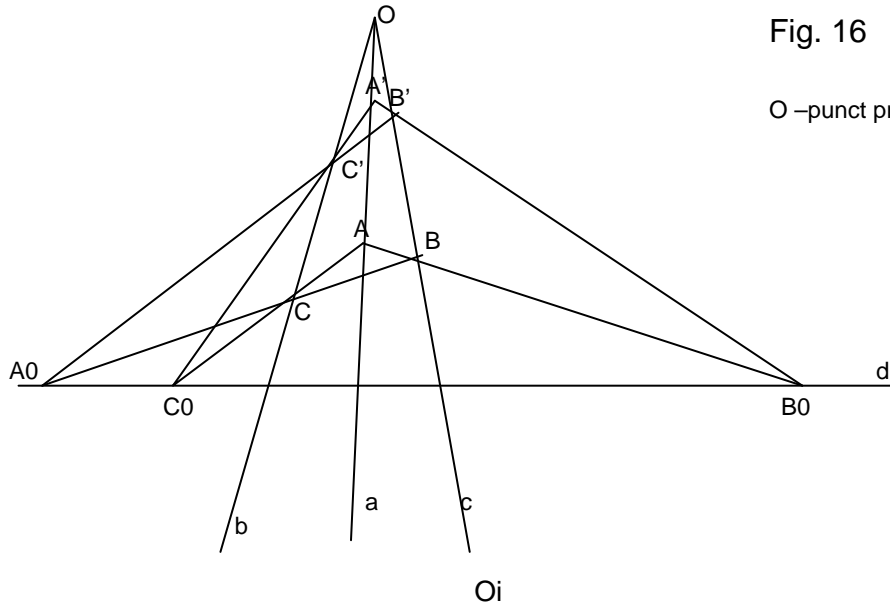


Fig. 16

O –punct propriu

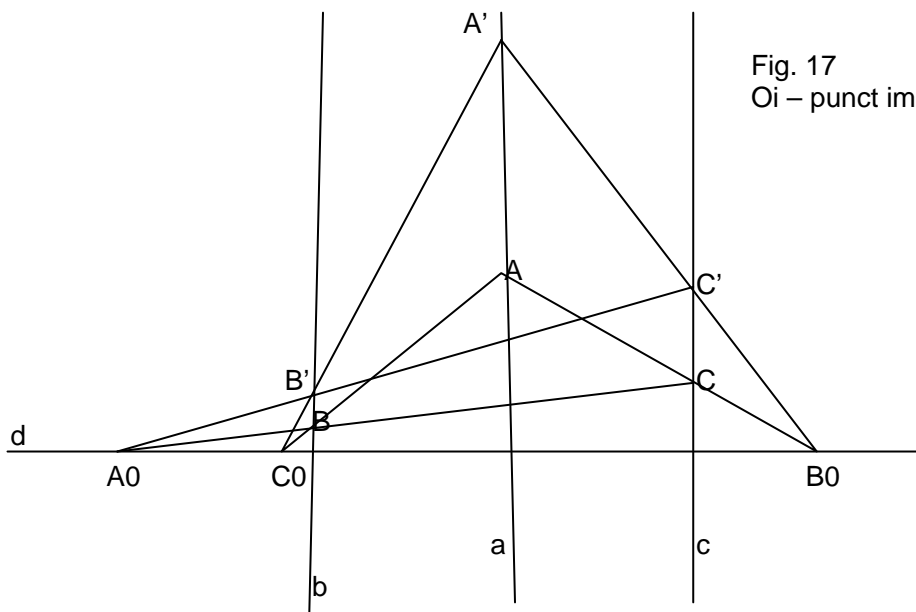


Fig. 17

O_i – punct impropriu

Distingem următoarele plane determinate de triplete de puncte necoliniare și perechi de drepte concurente sau paralele: $(ABC), (A'B'C'), (a,b), (b,c)$ și (c,a) .

Avem: $(ABC) \cap (A'B'C') = d, (bc) \cap d = A_0 \in d, (ca) \cap d = B_0 \in d, (ab) \cap d = C_0 \in d$, rezultă A_0, B_0, C_0 coliniare. (q.e.d.).

Dacă axa omologiei este dreapta improprie d_i , rezultă $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A'$, iar dacă vârful O este propriu avem omotetie de centru O și modul $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema II.13. Teorema lui Desargues reciprocă –cazul spațial.

Fie $A_0 = BC \cap B'C', B_0 = CA \cap C'A', C_0 = AB \cap A'B'$ coliniare pe dreapta d (propriu) sau d_i (improprie). Atunci $AA' \cap BB' \cap CC' = O$.

Demonstrație. Considerăm fasciculul de vârf B_0 ale cărui raze sunt determinate de tripletele de puncte coliniare $(B_0, C_0, A_0); (B_0, C, A); (B_0, C', A')$ și triunghiurile omologice $\Delta A_0CC', \Delta C_0AA'$. În continuare se aplică teorema 12 și rezultă că $B' = A_0C' \cap C_0A'; B = A_0C \cap C_0A$ și $O = CC' \cap AA'$ sunt coliniare, deci $AA' \cap BB' \cap CC' = O$. (q.e.d.).

Observație. Și în cazul plan (teorema II.11.), omologia de centru O - propriu și axă improprie este o omotetie, iar omologia de centru improprie și axă improprie este o translație.

Demonstrație.I). Dacă $a \cap b \cap c = O$ și d_i - dreaptă improprie, rezultă $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A'$, deci $\Delta OAB \approx \Delta OA'B', \Delta OBC \approx \Delta OB'C'$ și $\Delta OCA \approx \Delta OC'A'$. De aici avem $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$, de unde A', B', C' sunt omoteticile punctelor A, B, C în raport cu centrul O de modul k . (q.e.d.).

II). Dacă $a \parallel b \parallel c$ și $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A'$, rezultă $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$ sunt paralelograme. De aici $AA' = BB' = CC' = t$, deci avem o translație a ΔABC în direcția comună $a \parallel b \parallel c$ pe distanța t . (q.e.d.).

Teorema II.14. Teorema lui Pascal pentru hexagon.

Într-un hexagon înscris într-un cerc, laturile opuse se taie în puncte coliniare.

Demonstrație. Pentru claritatea desenului vom considera hexagonal stelat $AB'CA'BC'$ înscris în cercul $C(O; R)$ cu perechile de laturi opuse $(AB', A'B); (B'C, BC'); (CA', C'A)$ (fig.18.). Fasciculele de vârfuri A și C ale căror raze trec prin A', B', B, C' sunt egale (conform teoremei II.3.).

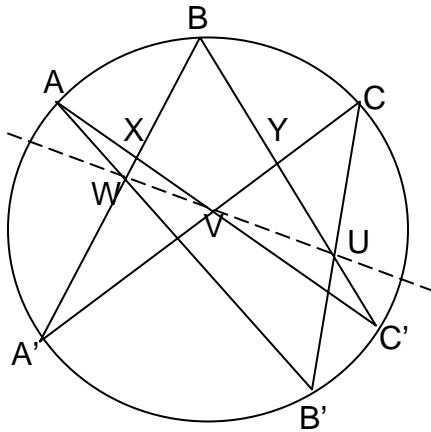
$$(1) A(BA'B'C') = C(BA'B'C').$$

Fie $X = BA' \cap AC'$ și tăiem fasciculul de vârf A cu secanta BA' , apoi din *teorema II.2*, rezultă :

$$(2) A(BA'B'C') = C(BA'B'C').$$

Fie $Y = BC' \cap A'C$ și tăiem fasciculul de vârf C cu secanta BC' . Din *teorema II.2*, rezultă :

Fig.18



$$(3) C(BA'B'C') = (BYUC').$$

Din relațiile (1), (2) și (3), rezultă (4) $(BA'WX) = (BYUC') =$ diviziuni anarmonice egale cu B punct comun..

Din *teorema II. 7.*, și schema de mai jos:

Puncte corespondente

B	B	comun
A'	Y	dreapta $A'Y$
W	U	dreapta WU
X	C'	dreapta XC'

rezultă $A'Y, WU, XC'$ sunt concurente. Deoarece, $A'Y \cap XC' = V$, avem $V \in WU$. (q.e.d.).

Teorema II.15. Teorema lui Pascal pentru patrulater înscris.

Într-un patrulater înscrisibil, intersecțiile laturilor opuse și cele ale tangentelor la cercul circumscris duse prin perechile de vârfuri opuse sunt 4 puncte coliniare.

Demonstrație.

Fie $U = AB \cap CD, V = BC \cap AD$, iar a și c tangentele în A și C la cercul $C(O; R)$ (fig.19).

Considerăm $W = a \cap c$.

Din *teorema 5*, $A(BaDC) = C(BADC)$, dar din *teoremele I.7. și I.8.* avem $A(BaDC) = A(CDaB)$, $C(BADc) = C(ABcD)$. Rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza comună AC .

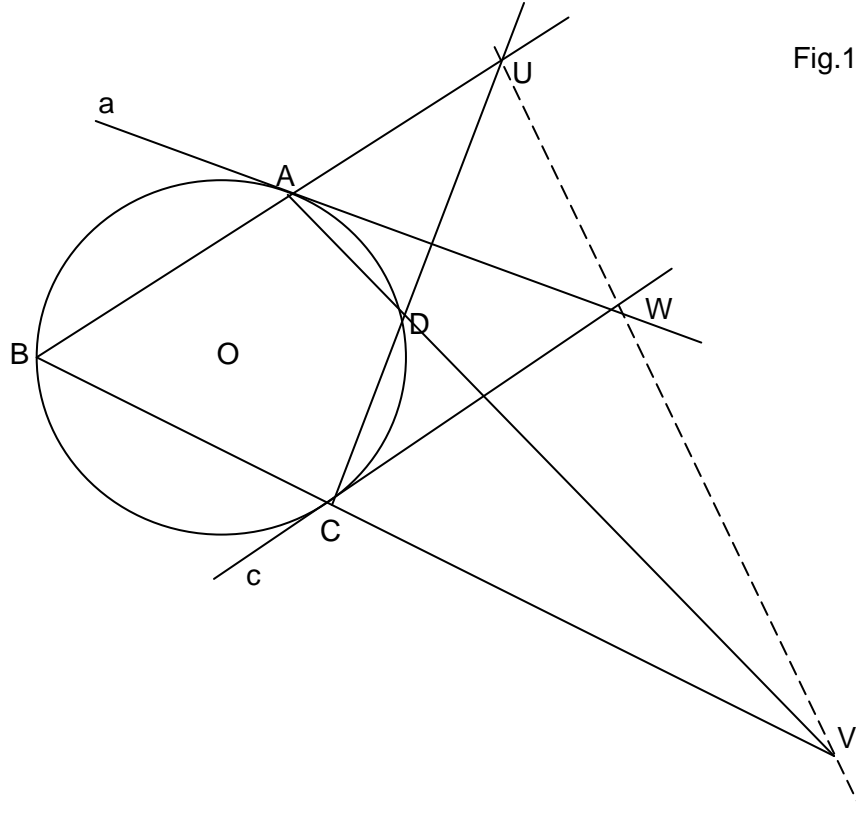


Fig.19

Raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = V$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = U$

Rezultă că: (1) U, V, W sunt coliniare.

Raționând analog pentru tangentele b și d , duse prin punctele B și D de pe $C(O; R)$, cu $T = b \cap d$, deducem (2) $T \in UV$. Din (1) și (2) rezultă că U, V, W, T sunt coliniare. (q.e.d.).

Teorema II.16. Teorema lui Brianchon.

Într-un hexagon circumscris unui cerc diagonalele sunt concurente.

Demonstrație. Fie $ABCDEF$ un hexagon circumscris cercului $C(O; R)$. Considerăm tangentele a, c, e și f tăiate, pe rand, de tangentele b și d , unde $G = b \cap f, H = b \cap e, I = d \cap f$ și $J = d \cap a$ (fig.20). Aplicând teorema II.4, rezultă $(BCHG) = (JDEI)$, și permutând convenabil (vezi partea I) obținem $(GHCB) = (IEDJ)$.

În continuare, considerăm fasciculele anarmonice cu vârfurile în F și A :

$F(GHCB) = A(IEDJ)$, egale și cu raza comună $FG = AI = f$.

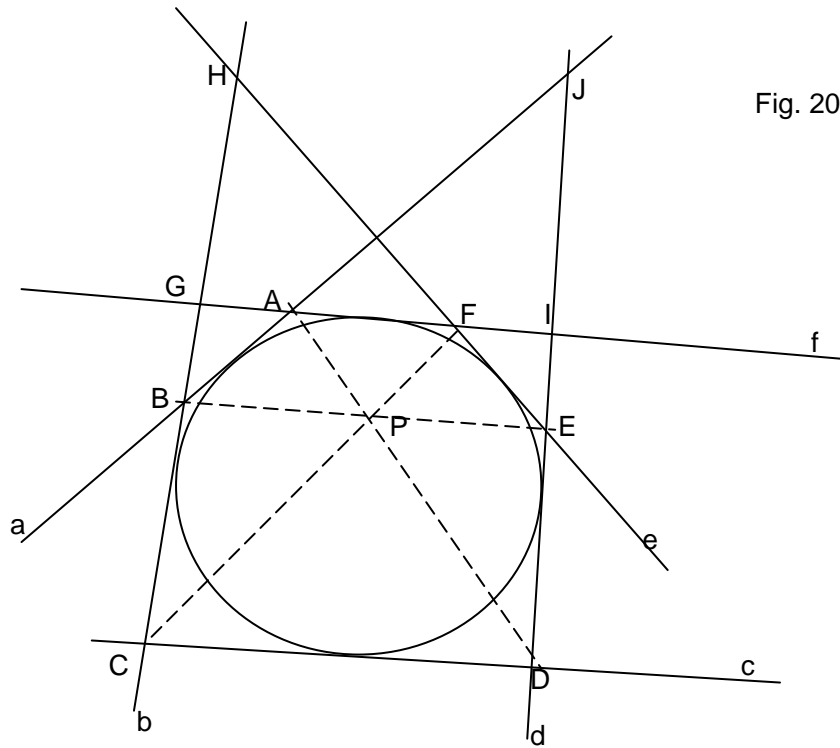


Fig. 20

Conform teoremei II.8., și schema de mai jos

Raze corespondente:

FG	AI	rază comună
FH	AE	$FH \cap AE = E$
FC	AD	$FC \cap AD = P$
FB	AJ	$FB \cap AJ = B$

rezultă $P \in EB$, adică diagonalele AD, FC și EB sunt concurente în P . (q.e.d.).

Teorema II.17. Teorema lui Newton.

Într-un patrulater circumscriptibil, cele două diagonale împreună cu cele două drepte determinate de punctele de contact ale perechilor de laturi opuse cu cercul înscris, sunt patru drepte concurente.

Demonstrație. Fie $ABCD$ patrulaterul circumscris cercului $C(O; R)$; E, F, G, H punctele de contact ale laturilor AB, BC, CD, DA cu cercul $C(O; R)$; $I = AB \cap CD, J = BC \cap AD$ (fig.21). Aplicăm teorema II.6. tangentelor în H și F la cerc, avem: $(HAJD) = (JBFC)$, și permutând convenabil $(HAJD) = (JDHA)$, deci $:(JDHA) = (JBFC)$, diviziuni anarmonice egale, cu un punct comun J . Conform teoremei II.7. și schemei de mai jos:

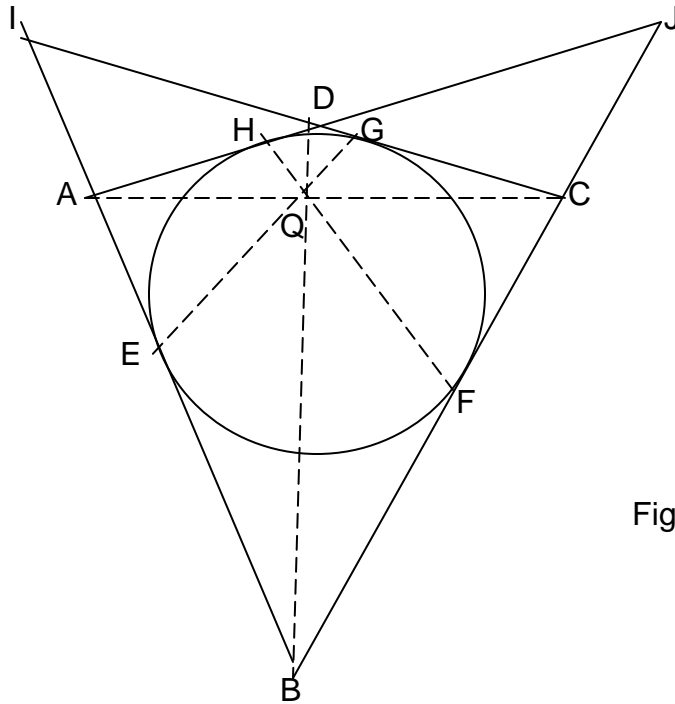


Fig.21

Puncte corespondente

J	J	punct comun
D	B	dreapta DB
H	F	dreapta HF
A	C	dreapta AC

$Q = AC \cap BD$, rezultă (1) $Q \in HF$.

Raționăm analog pentru diviziunile de pe tangentele în E și G la cerc, și obținem $(IBE A) = (IDGC)$, apoi cu schema de mai jos:

Puncte corespondente

I	I	punct comun
B	D	dreapta BD
E	G	dreapta EG
A	C	dreapta AC

Cum $AC \cap BD = Q$, rezultă (2) $Q \in EG$.

Din (1) și (2) rezultă AC, BD, EG , și FH sunt concurente în punctul Q .

Teorema II.18. Într-un trapez isoscel, intersecția laturilor neparalele și intersecțiile tangentele duse prin vârfurile opuse la cercul circumscris trapezului, sunt puncte coliniare pe o dreaptă paralelă cu bazele.

Demonstrație. Fie $ABCD$, un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, și $AD = BC$.

Considerăm a, b, c și d tangentele la cercul $C(O; R)$ circumscris trapezului, duse prin vârfurile trapezului. Notăm: $U = AD \cap BC$, $W = a \cap c$, $T = d \cap b$ și $AB \cap CD = V_i$ (punctul impropriu pe direcția paralelelor AB și CD , $V_i \in AB$ și $V_i \in CD$) – vezi fig.22.

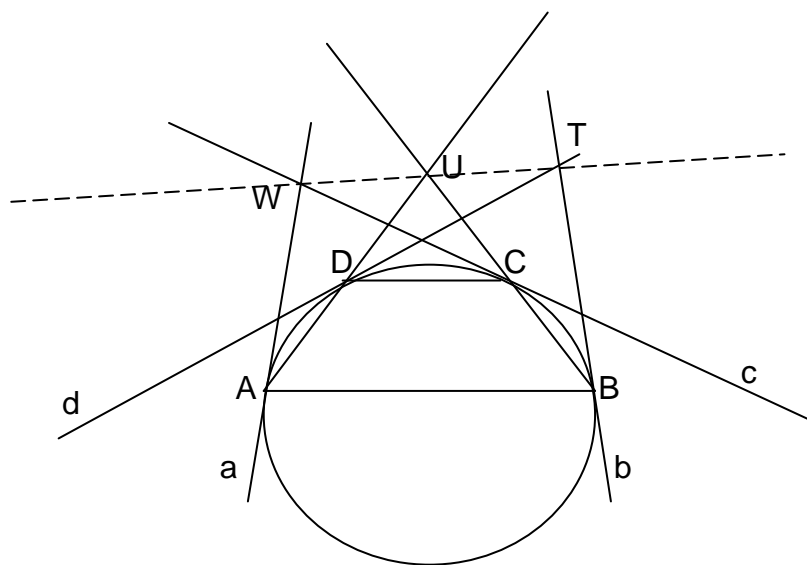


Fig.22

Din *teorema II.5.*, avem șirul de egalități: $A(aBCD) = B(AbCD) = C(ABcD) = D(ABCd)$, care grupate câte două și permutând convenabil $A(aBCD) = C(ABcD)$, rezultă $A(CDaB) = C(ABcD)$, fascicule anarmonice egale cu raza AC comună. Conform *teoremei II.8.*, din schema de mai jos:

raze corespondente:

AC	CA	rază comună
AD	CB	$AD \cap CB = U$
a	c	$a \cap c = W$
AB	CD	$AB \cap CD = V_i$

deducem $V_i \in UW$. Rezultă (1) $UW \parallel AB \parallel CD$.

În continuare se procedează ca mai sus, $B(AbCD) = D(ABCd) \Rightarrow B(DCbA) = D(BAdC)$, fascicule anarmonice egale cu raza BD comună.

Raze corespondente:

BD	DB	rază comună
BC	DA	$BC \cap DA = U$
b	d	$b \cap d = T$
BA	DC	$BA \cap DC = V_i$

rezultă $V_i \in UT$, deci (2) $UT \parallel AB \parallel CD$.

Din (1) și (2) rezultă că punctele W, U și T sunt situate pe o dreaptă paralelă cu AB și CD . (q.e.d.).

Teorema II.19. Raportul anarmonic al unui fascicul este egal cu *raportul anarmonic al coeficienților unghiulari* ai razelor fasciculului.

Demonstrație. Fie $O(abcd)$ fasciculul de vârf O și raze a, b, c și d . Considerăm o dreaptă OX , astfel încât: $\alpha = \hat{xa}, \beta = \hat{xb}, \gamma = \hat{xc}, \delta = \hat{xd}$.

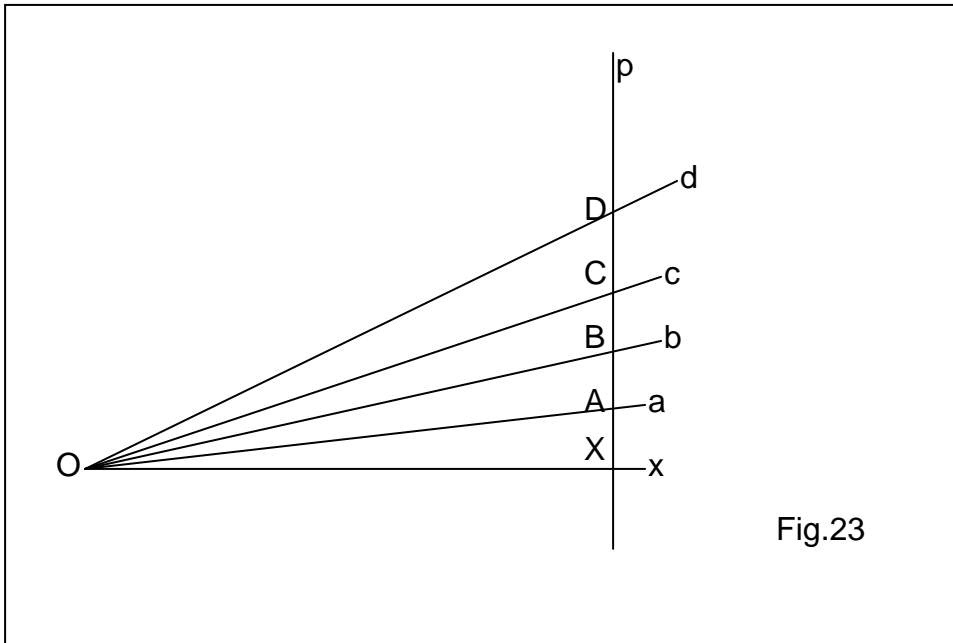


Fig.23

Ducem o dreaptă $p \perp Ox$ și notăm
 $: X = p \cap Ox, A = p \cap a, B = p \cap b, C = p \cap c, D = p \cap d$ (vezi fig.23).

Rezultă $r = O(abcd) = (ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{XA - XC}{XB - XC} : \frac{XA - XD}{XB - XD}$, însă notând
 $OX = x, \operatorname{tg} \alpha = m_a, \operatorname{tg} \beta = m_b, \operatorname{tg} \gamma = m_c, \operatorname{tg} \delta = m_d$, avem

$$XA = xm_a, XB = xm_b, XC = xm_c, XD = xm_d. \text{ Deci } r = \frac{m_c - m_a}{m_c - m_b} : \frac{m_d - m_a}{m_d - m_b}. (\text{q.e.d.}).$$

Aplicație. Polara unghiulară.

Fie (xy) , un unghi de vârf O și laturi x, y , iar A un punct nesituat pe laturile lui. O secantă mobilă care conține punctul A taie laturile unghiului în punctele X și Y .

Se cere locul geometric al punctului M , conjugatul armonic al lui A în raport cu X și Y .

Soluție. Se aplică *teorema II.19.*, pentru :

$$a = x, b = OM, c = y, d = OA, m_a = 0, m_b = m, m_c = m_0, m_d = m_A, \text{ și } r = -1.$$

$$\text{Rezultă : } \frac{m_0}{m_0 - m} + \frac{m_A}{m_A - m} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_A}.$$

Deci $m = \text{constant}$. Locul geometric este OM , de direcție fixă, cu coeficientul unghiular față de OX egal cu media armonică ai coeficienților unghiulari ai dreptelor OY și OA față de OX .

Justificarea *motto*-ului ales este :

Pentru construcția *geometriei proiective* se utilizează *metoda axiomatică sintetică*. După ce se construiește *corpul coordonatelor* asociat unui *spațiu proiectiv* sau *plan proiectiv desarguesian*, se poate trece, în cazul unui *corp comutativ*, la dezvoltarea *geometriei analitice (în coordonate) proiective*. *Geometria afină* se recuperează pe complementara unui *hiperplan* al spațiului proiectiv; se poate face deci trecerea de la *proprietăți proiective* la *proprietăți afine* și reciproc.

Bibliografie

- [1] Nicolescu, L., Boskoff, W., Probleme practice de geometrie, Ed. Tehnică, București, 1990.
- [2] Mihăileanu, N. N., Elemente de geometrie sintetică, E.D.P., București, 1965.