PROBLEME PROPUSE PENTRU OLIMPIADĂ
Clasele a VII-a şi a VIII-a

CLASA a VII-a

Problema 1 : Calculaţi: $2^{-1}\cdot\left[\left(3^3-1\right)^{-1}-\left(3^3+1\right)^{-1}\right]-\left(3^6+1\right)^{-1}$

Soluţie:

$$2^{-1}\cdot\left[\left(3^3-1\right)^{-1}-\left(3^3+1\right)^{-1}\right]-\left(3^6+1\right)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3^3-1}-\frac{1}{3^3+1}\right)-\frac{1}{3^6+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^3+1-3^3+1}{\left(3^3\right)^2-1}-\frac{1}{3^6+1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3^6-1}-\frac{1}{3^6+1}=\frac{1}{3^6-1}-\frac{1}{3^6+1}=\frac{3^6+1-3^6+1}{\left(3^6\right)^2-1}=\frac{2}{3^{12}-1}$$

Problema 2 : Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi pozitive ecuaţia:

$$7^{x^2+y-1}-7^{x^2+1}=2352$$

Soluţie:

$$7^{x^2+1+y-2}-7^{x^2+1}=7^2\cdot 2^4\cdot 3$$
$$7^{x^2+1}\cdot 7^{y-2}-7^{x^2+1}=7^2\cdot 2^4\cdot 3$$
$$7^{x^2+1}\cdot\left(7^{y-2}-1\right)=7^2\cdot 2^4\cdot 3$$

Deci:

$$7^{x^2+1}=7^2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=+1\in\mathbb{R}_+ \\ x_2=-1\notin\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

şi

$$7^{y-2}-1=2^4\cdot 3 \Leftrightarrow 7^{y-2}=48+1 \Leftrightarrow 7^{y-2}=49 \Leftrightarrow 7^{y-2}=7^2 \Leftrightarrow y-2=2 \Leftrightarrow y=4\in\mathbb{R}_+$$

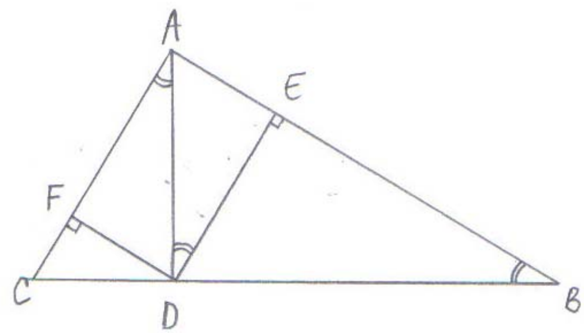
În concluzie, soluţia ecuaţiei în $\mathbb{R}_+$ este: $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

Problema 3: Se dă triunghiul ABC unde $m\sphericalangle(ABC)<m\sphericalangle(BAC)$. Punctul D aparţine segmentului BC astfel încât $m\sphericalangle(DAC)=m\sphericalangle(ABC)$.

a) Stabiliţi dacă $AC^2=DC\cdot BC$

b) Dacă, în plus, $AD \perp BC$, iar E şi F sunt proiecţiile ortogonale ale lui D pe dreptele AB şi respective AC, atunci avem relaţia $AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC$?

Soluție : a)



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC \\ \sphericalangle C - comun\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot BC$$

b) $AD \perp BC \Rightarrow \triangle ADC$ dreptunghic, şi cum $\triangle ADC \sim \triangle BAC \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic în A

$\left.\begin{array}{l}AC \perp AB \\ DE \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow DE \parallel AC$, AD secantă $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ADE$ (alterne interne). Cum triunghiurile ADE şi CAD sunt dreptunghice cu două unghiuri ascuţite congruente, rezultă că sunt asemenea şi putem scrie:

α

$$\triangle ADE \sim \triangle CAD \Rightarrow \frac{AE}{CD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC \cdot AE = AD \cdot DC \, (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle ABC \\ \sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle ADB - drepte\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{AF}{BD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB \cdot AF = AD \cdot BD \, (2)$$

Adunând membru cu membru relaţiile (1) şi (2), obţinem:

$AC \cdot AE + AB \cdot AF = AD \cdot DC + AD \cdot BD \Leftrightarrow$

$AC \cdot AE + AB \cdot AF = AD \cdot (DC + BD) \Leftrightarrow AC \cdot AE + AB \cdot AF = AD \cdot BC \, (3)$

Aria triunghiului ABC poate fi exprimată în două moduri , ceea ce ne duce la concluzia că: $\frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow AD \cdot BC = AB \cdot AC \, (4)$

Din relaţiile (3) şi (4) $\Rightarrow AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC$

Clasa a VIII-a

Problema 1 : Să se arate că dacă x,y,z$\in\mathbb{R}$ şi $x^2+y^2+z^2=n$, unde $n\in\mathbb{R}_+$ atunci $x+y+z\in\left[-\sqrt{3n};\sqrt{3n}\right]$

Soluție: Avem inegalitățile evidente: $x^2+y^2\geq 2xy$; $y^2+z^2\geq 2yz$ şi $x^2+z^2\geq 2xz$. Adunându-le membru cu membru obținem $2(x^2+y^2+z^2)\geq 2(xy+xz+yz)$ iar prin adunarea la ambii membri a numărului pozitiv $x^2+y^2+z^2$ obținem: $3(x^2+y^2+z^2)\geq (x+y+z)^2$. Înlocuind ceea ce cunoşteam din ipoteză obținem $3n\geq (x+y+z)^2$, de unde $-\sqrt{3n}\leq x+y+z\leq\sqrt{3n}$ sau $x+y+z\in\left[-\sqrt{3n};\sqrt{3n}\right]$

Problema 2: Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x-1}$$

Soluție:
Condiții de existență: Numitorii nenuli, adică $x\neq 0$ şi $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$
Prin urmare, ecuația are sens pentru $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

$$\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{x^4+1}{x^4}=\frac{x-1+x^8}{x^7\cdot(x-1)}\Leftrightarrow\frac{(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)}{x^7}=\frac{x-1+x^8}{x^7\cdot(x-1)}\Leftrightarrow$$

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)=x-1+x^8\Leftrightarrow(x^2-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)=x-1+x^8\Leftrightarrow$$

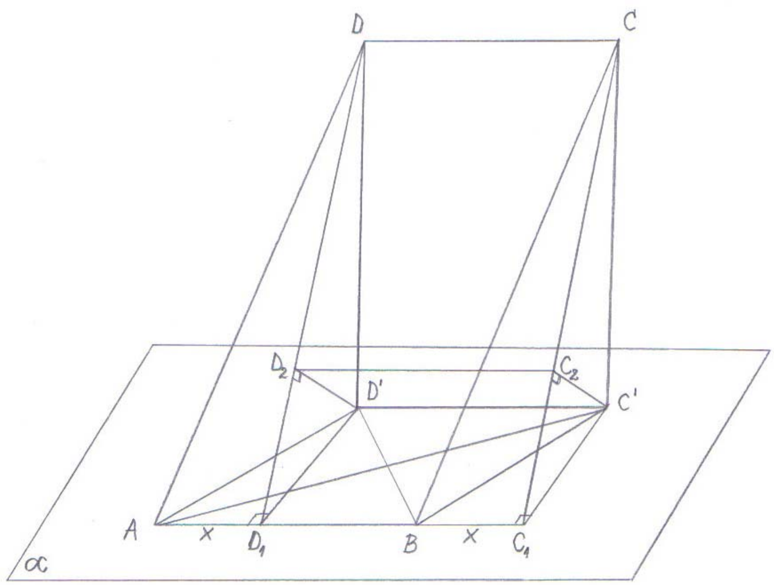
$$(x^4-1)\cdot(x^4+1)=x-1+x^8\Leftrightarrow x^8-1=x-1+x^8\Leftrightarrow x=0$$

Cum $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$, rezultă că ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor reale.

Problema 3: Paralelogramul ABCD are latura AB inclusă în planul α. AB=50 m şi AD=130 m. Proiecțiile diagonalelor pe planul α sunt de 80 m şi de 60 m. Aflați:

a) lungimile diagonalelor paralelogramului ABCD
b) aria proiecției patrulaterului $ABC'D'$ pe planul ABCD unde C' şi D' sunt proiecțiile punctelor C şi respective D pe planul α.

Soluție:



a) Notăm cu $D^{'}$ și $C^{'}$ proiecțiile punctelor D respective C pe planul α, cu D_1 și C_1 picioarele înălțimilor paralelogramului ABCD, duse din D și respectiv din C $(DD_1 \perp AB, CC_1 \perp AB)$. Notând $AD_1 = x$, avem: $D_1B = 50 - x, BC_1 = x$ și $AC_1 = 50 + x$.

Considerăm cazul în care proiecția diagonalei AC pe planul α are lungimea de 80 m.

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $D^{'}D_1 \perp AB$ și $C^{'}C_1 \perp AB$ și evident $D^{'}D_1 = C^{'}C_1$. Din $DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel \alpha$ și $DC \parallel D^{'}C^{'}$ și $D^{'}C^{'} = DC = AB = 50m$.

Avem în triunghiul dreptunghic $\triangle D^{'}D_1B : D^{'}D_1^{\,2} = D^{'}B^2 - D_1B^2 = 60^2 - (50 - x)^2$,

iar în triunghiul dreptunghic $\triangle AC_1C^{'} : C^{'}C_1^{\,2} = C^{'}A^2 - C_1A^2 = 80^2 - (50 + x)^2$

Deoarece $D^{'}D_1 = C^{'}C_1$, obținem ecuația: $60^2 - (50 - x)^2 = 80^2 - (50 + x)^2$, sau

$(50 + x)^2 - (50 - x)^2 = 80^2 - 60^2 \Leftrightarrow (50 + x + 50 - x) \cdot (50 + x - 50 + x) = (80 + 60) \cdot (80 - 60)$

$100 \cdot 2 \cdot x = 140 \cdot 20 \Rightarrow x = 14$

Obținem $AD_1 = 14m, D_1B = 36m, AC_1 = 64m$.

În triunghiul dreptunghic $\triangle ADD_1$, prin teorema lui Pitagora, obținem:

$DD_1^{\,2} = AD^2 - AD_1^{\,2} = 130^2 - 14^2 = (130 - 14) \cdot (130 + 14) = 144 \cdot 116 = 12^2 \cdot 2^2 \cdot 29$, deci

$DD_1 = 24\sqrt{29}m$

În triunghiul dreptunghic $\triangle DD_1B$, avem:

$$DB^2 = DD_1^2 + D_1B^2 = 24^2 \cdot 29 + 36^2 = (12 \cdot 2)^2 \cdot 29 + (12 \cdot 3)^2 =$$
$$= 12^2 \cdot (4 \cdot 29 + 9) = 12^2 \cdot 125 = 12^2 \cdot 25 \cdot 5 \Rightarrow DB = 60\sqrt{5}m$$

Deoarece $CC_1 = DD_1$, în triunghiul dreptunghic $\triangle ACC_1$ avem:

$$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = 64^2 + 24^2 \cdot 29 = 8^4 + 8^2 \cdot 3^2 \cdot 29 = 8^2 \cdot (8^2 + 9 \cdot 29) =$$
$$= 8^2 \cdot 325 = 8^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \Rightarrow AC = 40\sqrt{13}m$$

Am obținut $BD = 60\sqrt{5}m, AC = 40\sqrt{13}m$.

În cazul în care proiecția diagonalei AC pe planul α este de 60 m, caz în care unghiul DAB este obtuz, obținem $AC = 60\sqrt{5}m, BD = 40\sqrt{13}m$

b) Notăm cu D_2 și C_2 proiecțiile punctelor D' respectiv C' pe planul ABCD. Din $D'C' \parallel DC \Rightarrow D'C' \parallel (ABCD)$ și $D'C' \parallel D_2C_2$ și $D_2C_2 = D'C' = 50m$. În triunghiul $\triangle D'D_1B$ dreptunghic $(m\sphericalangle D_1 = 90°)$, avem: $D'D_1^2 = D'B^2 - D_1B^2 = 60^2 - 36^2 = (60-36)\cdot(60+36) = 96 \cdot 24 = 4 \cdot 24^2$, adică $D'D_1 = 48m$ și $C'C_1 = 48m$

Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic $\triangle DD'D_1$, obținem:

$D'D_1^2 = D_1D \cdot D_1D_2$, deci $D_1D_2 = \dfrac{D'D^2}{D_1D} = \dfrac{48^2}{24\sqrt{29}} = \dfrac{96\sqrt{29}}{29}$ m

$DD_1 \perp AB$ și $D_2C_2 \parallel D'C' \parallel AB \Rightarrow D_1C_1C_2D_2$ este dreptunghi și deci

$$S_{D_1C_1C_2D_2} = D_1D_2 \cdot D_1C_1 = \frac{96\sqrt{29}}{29} \cdot 50 = \frac{4800\sqrt{29}}{29} m^2$$

În concluzie, $S_{ABC_2D_2} = D_1D_2 \cdot AB = \dfrac{96\sqrt{29}}{29} \cdot 50 = \dfrac{4800\sqrt{29}}{29} m^2$

BIBLIOGRAFIE:

1. Constantin Cărbunaru; Mihaela Singer et alii; MATEMATICĂ - culegere de probleme pentru clasele IV-VIII, Editura SIGMA, București , 1994
2. Nicolae Teodorescu et alii; Probleme din gazeta matematică – ediție selectivă și metodologică, Editura Tehnică, București, 1984

Propunător: Prof. gr.I IGNĂTESCU VIOREL OVIDIU
Școala cu clasele I-VIII Mătești, com. Săpoca, jud. Buzău