Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. ianuarie 2010

PROBLEME PENTRU CONCURSURI

Corneliu Mănescu-Avram

1. Să se demonstreze identitatea : $5S_9 + 2S_{11} = 6S_5^2 + S_7$, unde $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$, $n, k \in \mathbb{N}^*$.

Soluție : Scriem identitatea din enunț pentru n şi pentru $n - 1$

$5S_9(n) + 2S_{11}(n) = 6S_5^2(n) + S_7(n)$, $5S_9(n-1) + 2S_{11}(n-1) = 6S_5^2(n-1) + S_7(n-1)$,

scădem egalitățile obținute, înlocuim $S_5(n-1)$ cu $S_5(n) - n^5$ şi rezultă

$$5n^9 + 2n^{11} = 6n^5[2S_5(n) - n^5] + n^7, \tag{1}$$

aşadar

$$S_5(n) = \frac{1}{6}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^5 + \frac{5}{12}\,n^4 - \frac{1}{12}\,n^2\,. \tag{2}$$

Reciproc, scriem (1) sub forma

$$5n^9 + 2n^{11} = 6[S_5^2(n) - S_5^2(n-1)] + n^7, \tag{3}$$

dăm valori de la 1 la n, adunăm şi obținem identitatea din enunț.

Egalitățile (1), (2), (3) sunt echivalente, deci este suficient să demonstrăm (2). Pentru mai multă uşurință a scrierii eliminăm numitorii, prin urmare vom demonstra prin inducție egalitatea

$$12S_5(n) = 2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2.$$

Pentru $n = 1$ avem $12 = 2 + 6 + 5 - 1$, care este adevărată. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru $k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

$$12S_5(k-1) = 2(k-1)^6 + 6(k-1)^5 + 5(k-1)^4 - (k-1)^2$$

adunăm $12k^5$ în stânga şi în dreapta egalității, ridicăm la puterile respective cu binomul lui *Newton* şi obținem

$12S_5(k) = 12k^5 + 2(k^6 - 6k^5 + 15k^4 - 20k^3 + 15k^2 - 6k + 1) + 6(k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1) +$
$+ 5(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 2k^6 + 6k^5 + 5k^4 - k^2$,

deci egalitatea este adevărată şi pentru k, ceea ce trebuia demonstrat.

2. Să se găsească cifrele zecimale din egalitatea : $2 \cdot \overline{abcdef} = 11 \cdot \overline{defabc}$.

Soluție : Fie $x = \overline{abc}$, $y = \overline{def}$. Se obține egalitatea $2(10^3x + y) = 11(10^3y + x)$, de unde se deduce $(2 \cdot 10^3 - 11)x = (11 \cdot 10^3 - 2)y$, deci $3^2 \cdot 13 \cdot 17x = 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 47y$, aşadar $17x = 94y$, cu soluția $x = 94t$, $y = 17t$, $t \in \mathbb{N}$. Numerele x şi y au trei cifre, deci $17t > 100$, $94t < 1000$, cu soluțiile $t \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Rezultă următoarele egalități :

$$2 \cdot 564102 = 11 \cdot 102564,\quad 2 \cdot 658119 = 11 \cdot 119658,\quad 2 \cdot 752136 = 11 \cdot 136752,$$

$$2 \cdot 846153 = 11 \cdot 153846,\quad 2 \cdot 940170 = 11 \cdot 170940.$$

3. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$.

Soluție : Dacă $a = 0$, e clar că $x = y = 0$ este singura soluție.

Fie $a = b^2c$, cu $b, c \in \mathbb{N}^*$, c liber de pătrate. Se arată că dacă (x, y) este soluție, atunci $c \mid x$ şi $c \mid y$. Într-adevăr, ecuația devine $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b\sqrt{c}$, deci $\sqrt{y} = b\sqrt{c} - \sqrt{x}$ şi $y = b^2c + x - 2b\sqrt{cx}$, de unde $\sqrt{cx} \in \mathbb{Q}^*$, aşadar $\sqrt{cx} \in \mathbb{N}^*$ şi deci $c \mid x$; similar, $c \mid y$.

Fie $x = cx_1$, $y = cy_1$; rezultă $\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = b$. Se arată asemănător că $\sqrt{x_1} = t \in \mathbb{N}$, de unde $x_1 = t^2$, $y_1 = (b - t)^2$, $0 \le t \le b$.

Soluțiile sunt $x = ct^2$, $y = c(b - t)^2$, $t\in \mathbb{N}$, $0 \le t \le b$.

4. Se consideră mulțimile $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}, n \in \mathbb{Z}\}$ şi $T_k = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = t_1 + t_2 + .. t_k , t_i \in T, 1 \le i \le k\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este un număr fixat. Să se arate că

a) $T_1 = T$ conține cel puțin trei pătrate perfecte.

b) T_2 conține toate pătratele şi o infinitate de cuburi perfecte.

c) $T_4 = \mathbb{Z}$.

Soluție : a) Avem $\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1^2$, $\dfrac{2\cdot3\cdot4}{6} = 2^2$, $\dfrac{48\cdot49\cdot50}{6} = 140^2$.

b) Prima afirmație rezultă din identitatea

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = n^2.$$

Pentru a doua, luăm

$$\frac{(n+m-1)(n+m)(n+m+1)}{6} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} = \frac{m(3n^2+m^2-1)}{3}.$$

Dacă $3n^2 + m^2 - 1 = 3m^2$, atunci obținem $m^3 \in T_2$. Rezultă

$$3n^2 - 2m^2 = 1. \tag{1}$$

Se consideră ecuația

$$x^2 - 6y^2 = 1. \tag{2}$$

Ea are o infinitate de soluții $(x_k, y_k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ şi se poate arăta că acestea sunt

$$x_k = \frac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^k + \left(5-2\sqrt{6}\right)^k}{2}, \quad y_k = \frac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^k - \left(5-2\sqrt{6}\right)^k}{2\sqrt{6}}.$$

Dacă (x, y) este o soluție a ecuației (2), atunci (n, m) este o soluție a ecuației (1), unde $n = x + 2y$, $m = x + 3y$. Într-adevăr, $3n^2 - 2m^2 = 3(x+2y)^2 - 2(x+3y)^2 = x^2 - 6y^2 = 1$. Obținem astfel o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ale ecuației (1) şi deci o infinitate de cuburi perfecte în mulțimea T_2.

c) Din identitatea

$$n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - 2\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

rezultă că $T_4 = \mathbb{Z}$.

Observație. Se ştie că numerele de la a) sunt singurele pătrate perfecte din T_1.

5. Să se arate că numărul $2^{3^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, are cel puțin n divizori primi distincți.

Soluție : Demonstrăm afirmația prin inducție după n.

Dacă $n = 1$, atunci $2^{3^1} + 1 = 3^2$ are un divizor prim.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru un k natural oarecare fixat şi o demonstrăm pentru $k + 1$. Este adevărată descompunerea :

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(2^{2\cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1\right).$$

Conform ipotezei de inducție, numărul din prima paranteză are cel puțin k divizori primi distincți. Este suficient deci să arătăm că numărul din a doua paranteză are un factor prim care nu divide numărul din prima paranteză. Vom demonstra o afirmatie mai generală : "Cel mai mare divizor comun al numerelor $a + 1$ şi $a^2 - a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, este 1 sau 3". Într-adevăr, din $a^2 - a + 1 = (a + 1)(a - 2) + 3$ rezultă că orice divizor comun al celor două numere este divizor al lui 3. Numărul din a doua paranteză nu este putere a lui 3, deci are cel puțin un factor prim diferit de 3, ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

Comentariu. Am demonstrat astfel că mulțimea numerelor prime este infinită.

6. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $N = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$. Să se arate că

a) pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, numerele N şi $F_k = 2^{2^k}$ sunt prime între ele;

b) dacă $n \geq 3$, atunci N se divide cu 3, 7 şi 13, dar nu se divide cu 5, 11 şi 17;

c) N are cel puțin n divizori primi.

Soluție : a) Pentru $k \leq n - 1$, $N - 3 = 2^{2^n} - 1 + 2^{2^{n-1}} - 1$ este divizibil cu F_k, deci N şi F_k sunt prime între ele, deoarece $F_k \equiv 2 \pmod 3$. Pentru $k = n$, $N = F_n + 2^{2^{n-1}}$, deci sunt prime între ele, fiind impare.

b) Este adevărată descompunerea $N = (2^2 + 2 + 1)(2^2 - 2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1) \ldots (2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1)$, deci N se divide cu $3 = 2^2 - 2 + 1$, $7 = 2^2 + 2 + 1$, $13 = 2^4 - 2^2 + 1$ şi nu se divide cu $5 = F_1$ şi $17 = F_2$. În plus, $N \equiv 7, 10, 9, 2, 3, 10, 9, 2, 3, \ldots \pmod{11}$, deci N nu se divide cu 11.

c) Se arată că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincte, numerele $2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1$ şi $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$ sunt prime între ele. Putem presupune $m < n$, deci $N = 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1 + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} =$

$= \left(2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1\right)M$, unde M este un număr natural, de unde rezultă că numerele respective sunt prime între ele, fiind impare. Se alege câte un divizor prim de la fiecare dintre numerele

$2^{2^m} - 2^{2^{m-1}} + 1$, $1 \leq m \leq n - 1$. Aceste $n - 1$ numere prime sunt distincte şi diferite de $2^2 + 2 + 1 = 7$, deoarece $2^{2^k} \equiv 2$ sau $4 \pmod 7$, deci am găsit n divizori primi diferiți ai lui N.

Comentariu. La punctul c) am obținut o demonstrație a faptului că mulțimea numerelor prime este infinită.

7. Să se arate că dacă numerele $p, p + 2, p + 6, p + 8$ sunt prime ($p > 5$), atunci restul împărțirii lui p la 210 este unul dintre numerele 11, 101, 191.

Soluție : Numărul prim p este de forma $6k + 5$, $k \in \mathbb{N}^*$: într-adevăr, dacă $p - 1$ se divide cu 3, atunci $p + 2$ se divide cu 3, deci nu este prim. Ultima cifră a lui p este 1 : într-adevăr, dacă ultima cifră a lui p este 3, 7 sau 9, atunci $p + 2$, $p + 8$, respectiv $p + 6$ se divide cu 5, deci nu este prim. Restul împărțirii lui p la 30 nu poate fi egal cu 1 ($p + 1$ nu se divide cu 3) sau 21 (altfel p se divide cu 3, deci nu este prim). Rezultă că restul împărțirii lui p la 30 este egal cu 11.

Dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 41, 71, 131, respectiv 161, atunci $p + 8$, $p + 6$, $p + 2$, respectiv p se divide cu 7. Deducem că restul împărțirii lui p la 210 este unul dintre numerele 11, 101 sau 191.

Notă. Dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 11, atunci $p - 4$ se divide cu 7 ; dacă restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 191, atunci $p + 12$ se divide cu 7. Obținem rezultatul : *Dacă numerele $p - 4$, p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, $p + 12$ sunt prime ($p > 11$), atunci restul împărțirii lui p la 210 este egal cu 101.* Astfel de numere există, de exemplu pentru $p = 101$, 16061, 19421, 43781, ..., dar nu se ştie dacă ele sunt sau nu în număr finit. Evident, putem lua ca referință primul număr al secvenței şi deducem că în orice sextuplu de tipul (0, 4, 6, 10, 12, 16) de numere prime, restul împărțirii primului termen la 210 este egal cu 97. Pentru detalii, a se vedea “Prime quadruplet” – diverse adrese pe internet.

8. Să se arate că numărul $5^{32} + 1$ se divide cu 641.

Soluție : Avem $5^{32} - 2^{32} = (5 - 2)(5 + 2)(5^2 + 2^2)(5^4 + 2^4)(5^8 + 2^8)(5^{16} + 2^{16})$ se divide cu 641 = $= 5^4 + 2^4$. Numărul $2^{32} + 1 = 2^{28} \cdot 2^4 + 1 = 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1 - 5^4) + 1 =$
$= 2^{28}(2^7 \cdot 5 + 1) - [(2^7 \cdot 5)^4 - 1] = (2^7 \cdot 5 + 1)[2^{28} - (2^7 \cdot 5 - 1)(2^{14} \cdot 5^2 + 1)]$ se divide cu 641 = $= 2^7 \cdot 5 + 1$. Rezultă că şi numărul $5^{32} + 1 = (5^{32} - 2^{32}) + (2^{32} + 1)$ se divide cu 641.

9. Să se găsească baza unui sistem de numerație în care este adevărată egalitatea :

$$\overline{aaa} = a^4, \quad a \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție : Fie x baza sistemului de numerație respectiv. Deducem $ax^2 + ax + a = a^4$, de unde, prin simplificare, se obține $x^2 + x + 1 = a^3$. Numărul din stânga este impar, deci şi a este impar. Prin încercări găsim $a = 7$, $x = 18$.

10. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ o matrice astfel încât $\det(A^3 - A)$ nu se divide cu 3. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ sistemul de ecuații

$$ax_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$

$$ax_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$

$\vdots$

$ax_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$

are soluție unică.

Soluție : Fie I matricea unitate şi X matricea coloană a necunoscutelor. Sistemul poate fi scris sub forma $(A - aI)X = 0$ (evident, în dreapta avem matricea coloană cu n elemente nule) şi el are soluție unică dacă şi numai dacă $\det(A - aI) \neq 0$.

Fie $P(\mathrm{X}) = \det(A - \mathrm{X}\cdot I)$ polinom în variabila X. Evident, $P \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Prin ipoteză, niciunul dintre numerele $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ nu se divide cu 3 , deoarece $\det(A^3 - A) =$

$= \det(A - I)\det(A)\det(A + I) = P(-1)P(0)P(1)$. Vom arăta că $P(a) \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr, din

$P(\mathrm{X}) - P(a) = (\mathrm{X} - a)Q(\mathrm{X})$, $Q \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ şi $P(a) = 0$, rezultă că cel puțin unul dintre numerele $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ se divide cu 3, contradicție.

11. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât polinomul $\mathrm{X}^7 - \mathrm{X} + 280$ să fie divizibil cu polinomul $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + a$.

Soluție : Fie $f = \mathrm{X}^7 - \mathrm{X} + 280$, $g = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + a$. Din $g \mid f$ în $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, deducem că $g(x) \mid f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

În particular, $g(1) \mid f(1)$, $g(-1) \mid f(-1)$, deci $a \mid 280$ şi $a + 2 \mid 280$ (*).

Fie ε o rădăcină cubică complexă nereală a lui -1, deci $\varepsilon^3 = -1$, $\varepsilon \neq -1$, astfel că $\varepsilon^2 - \varepsilon = -1$ şi $\varepsilon^7 - \varepsilon = 0$. Rezultă că $g(\varepsilon) \mid f(\varepsilon)$ în $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, deci şi în $\mathbb{Z}$, deoarece ε este întreg algebric, iar numerele $f(1)$ şi $g(1)$ sunt întregi raționali. Obținem că $a - 1 \mid 280$ (**).

Mulțimea divizorilor întregi ai numărului 280 este

$D_{280} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \pm 20, \pm 28, \pm 35, \pm 40, \pm 56, \pm 70, \pm 140, \pm 280\}$.

Din condițiile (*) şi (**) rezultă că trebuie să căutăm divizori consecutivi $a - 1$, $a \in D_{280}$ astfel încât $a + 2 \in D_{280}$. Deducem că $a \in \{-7, -4, -1, 2, 5, 8\}$. Avem şi $g(2) \mid f(2)$, deci $a + 2 \mid 2^7 - 2 + 280$, aşadar $a + 2 \mid 2^7 - 2$. Cel mai mare divizor comun al numerelor $2^7 - 2 = 126$ şi 280 este egal cu 14, astfel că $a + 2 \in \in D_{14}$, de unde $a \in \{-16, -9, -4, -3, -1, 0, 5, 12\}$. Obținem că $a \in \{-4, -1, 5\}$.

Se verifică prrin calcul că singura valoare convenabilă este $a = 5$, pentru care există descompunerea

$$X^7 - X + 280 = (X^2 - X + 5)(X^5 + X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 11X + 56).$$

12. Fie $p \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de gradul 2 cu proprietatea că $|p(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Să se arate că $|p(3)| \leq 7^2$, $|p(15)| \leq 41^2$. Generalizare.

Soluție : Dacă $p = aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci

$$a = 2p(0) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + 2p(1),\ b = -3p(0) + 4p\left(\frac{1}{2}\right) - p(1),\ 2a + b = p(0) - 4p\left(\frac{1}{2}\right) + 3p(1)$$

şi deci $|a| \leq 8$, $|2a + b| \leq 8$, în ipoteza $|p(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

Avem

$$p(x) = a(x - 1)^2 + (2a + b)(x - 1) + p(1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

de unde

$$|p(x)| \leq 8(x - 1)^2 + 8(x - 1) + 1 = 2(2x - 1)^2 - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În particular, dacă (u, v) este o soluție oarecare a ecuației $u^2 - 2v^2 = -1$ (1), atunci

$$\left|p\left(\frac{v+1}{2}\right)\right| \leq u^2.$$

Soluția generală în numere naturale a ecuației (1) este

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^n}{2}, \quad v_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n + \sqrt{2}-1^n}{2\sqrt{2}},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ este impar. Avem $v_1 = 1$, $v_3 = 5$, $v_5 = 29$, ..., $\left|p\left(\frac{v_n+1}{2}\right)\right| \leq u_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ impar şi $u_n^2 - 2v_n^2 = -1$.

13. Să se găsească rădăcinile reale ale polinomului $P = (X^m - 1)^n + (X^n - 1)^m$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ au parități diferite.

Soluție : Avem $P(0) = (-1)^n + (-1)^m = 0$, deoarece $m - n$ este impar ; $P(1) = 0$, deci P are rădăcinile 0 şi 1. Vom arăta că P nu are alte rădăcini reale. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că este m par şi n este impar.

Dacă $x \in (-\infty, -1)$, atunci $x^m > 1$, $x^m - 1 > 0$ şi $x^n < -1$, $x^n - 1 < -2$, deci $P(x) > 0$.

Avem $P(-1) = 2^m \neq 0$.

Dacă $x \in (-1, 0)$, atunci $0 < x^m < 1$ şi $-1 < (x^m - 1)^n < 0$; $-1 < x^n < 0, -2 < x^n - 1 < -1$ şi $1 < (x^n - 1)^m < 2^m$, de unde rezultă că $P(x) > 0$.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $-1 < (x^m - 1)^n < 0$ şi facem substituțiile $x^m - 1 = -y^m$, $x^n - 1 = -z^n$ cu $y, z \in (0, 1)$, de unde $-y^{mn} + z^{mn} = 0$, aşadar $y = z$. Putem presupune că $0 < x < y < 1$ şi dacă, de exemplu $m < n$, atunci $x^n < x^m$, $y^n < y^m$, aşadar $1 = x^n + y^n < x^m + y^m = 1$, contradicție, deci P nu are rădăcini în intervalul (0, 1).

Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $P(x) > 0$.

Observație. Rădăcinile 0 şi 1 au acelaşi ordin de multiplicitate, egal cu $\min(m, n)$.

14. Să se determine numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin^m x + \cos^m x}{m} - \frac{\sin^n x + \cos^n x}{n}$$

să fie constantă.

Soluție : Dacă $m = n$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă $m \neq n$, atunci putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $m > n$. Avem $f(0) = f(\pi)$, deci

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n},$$

aşadar m şi n sunt numere pare, $m = 2k$, $n = 2l$, $k, l \in \mathbb{N}^*$. Funcția dată este constantă dacă şi numai dacă polinomul

$$P = \frac{X^k + (1-X)^k}{k} - \frac{X^l + (1-X)^l}{l} \quad , k, l \in \mathbb{N}^*, k > l$$

este constant. Pentru k par, gradul lui P este egal cu k, pentru k impar avem în mod necesar $k - 1 = l$. În acest caz, coeficientul lui X^{k-1} trebuie să fie nul

$$1 - \frac{2}{k-1} = 0,$$

de unde $k = 3$, $l = 2$, aşadar $m = 6$, $n = 4$.

Calcule directe arată că pentru aceste valori funcția dată este constantă.