

Asupra unor numere “extreme”

-de Marcu Stefan Florin profesor Calarasi-

Vom spune ca patru numere reale  $a, b, c, d$  sunt numere extreme daca indeplinesc conditiile

1)  $a \geq 0, b > 0, c > 0, d \geq 0$

2) 
$$\frac{a+b}{2} = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \sqrt{cd}$$

Relatiile 2) exprima faptul ca media aritmetica dintre  $a$  si  $b$  este egala cu media armonica dintre  $b$  si  $c$  si cu media geometrica dintre  $c$  si  $d$ .

Consecinte ale definitiei:

1)  $d \neq 0$

2) Daca  $a=0$  atunci  $b=3c$  si  $d=\frac{9}{4}c$

Demonstratie:

1) Daca  $d=0 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2bc}{b+c} = 0 \Rightarrow b=0$  sau  $c=0$  (absurd), deci si  $d \neq 0$

2) Daca  $a=0 \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{cd} \Rightarrow b(b+c) = 4bc \Rightarrow b^2 = 3bc \Rightarrow b=3c$

Din  $\sqrt{cd} = \frac{b}{2} = \frac{3c}{2} \Rightarrow cd = \frac{9c^2}{4} \Rightarrow d = \frac{9}{4}c$ .

In continuare vom prezenta o serie de proprietati remarcabile ale acestor numere si vom arata cum se pot gasi acestea.

## ARTICOL

### PROPRIETATEA 1

Daca doua numere extreme sunt egale atunci toate patru sunt egale.

SOLUTIE:

Vom studia toate cazurile posibile:

$$1) a=d \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{ca} \Rightarrow (a+b)^2 = 4ca \text{ si } (a+b)(b+c) = 4bc$$

Evident  $a+b \neq 0$  si impartind cele doua relatii obtinem :

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ca} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a=b \Rightarrow b=c. \text{ Deci } a=b=c=d.$$

$$2) a=c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ad} \Rightarrow a=b \text{ (deoarece daca media aritmetica a doua}$$

numere este egala cu media lor armonica cele doua numere sunt egale). Deci  $a = \sqrt{ad} \Rightarrow a=d$  (daca  $a=0$  atunci  $c=0$  absurd) si conform cu 1) avem  $a=b=c=d$ .

$$3) a=b \Rightarrow a = \frac{2ac}{a+c} = \sqrt{cd} \Rightarrow a^2 = ac \text{ si cum } a=b \neq 0 \Rightarrow a=c \text{ si conform cu 2)}$$

avem  $a=b=c=d$

$$4) b=c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2b^2}{2b} = \sqrt{bd} \Rightarrow a=b=d.$$

$$5) b=d \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{cb} \Rightarrow b=c \text{ (deoarece media geometrica dintre } b \text{ si}$$

$c$  este egala cu media lor armonica) si din 4) avem  $a=b=c=d$ .

$$6) c=d \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = c \Rightarrow b=c \text{ si } a=b.$$

### PROPRIETATEA 2

Daca a,b,c,d sunt numere extreme atunci au loc inegalitatile:

i.  $a+b \leq c+d$

ii.  $ab \leq cd$

## ARTICOL

iii.  $a \leq c$

iv.  $b \geq d$

v.  $c \geq \frac{a+b}{3}$

### DEMONSTRATIE:

Folosind inegalitatea mediilor avem:

$$\text{Din } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{cd} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq cd$$

$$\text{Din } \frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{cb} \Rightarrow \sqrt{cd} \leq \sqrt{cb} \Rightarrow b \geq d$$

$$\text{Din } \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq \frac{c+d}{2} \Rightarrow a+b \leq c+d$$

$$\text{Din } (a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 4 \Rightarrow \frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{c} = 4 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = 4 - \frac{a+b}{b} = 3 - \frac{a}{b} \leq 3 \Rightarrow a+b \leq 3c \Rightarrow$$

$$c \geq \frac{a+b}{3}$$

### PROPRIETATEA 3

Daca a,b,c,d numere extreme strict pozitive cu  $b \neq d$  atunci:

1)  $\frac{a+b}{b+c} = \frac{d}{b}$

2)  $\frac{a-c}{d-b} = \frac{4c}{a+b}$

### DEMONSTRATIE:

Din definitia numerelor extreme avem relatiile :

$$(a+b)^2 = 4cd \quad \text{si} \quad (a+b)(b+c) = 4bc$$

$$\text{Impartind cele doua relatii avem : } \frac{a+b}{b+c} = \frac{d}{b}$$

$$\text{Scazand relatiile avem } (a+b)(a-c) = 4c(d-b) \Rightarrow \frac{a-c}{d-b} = \frac{4c}{a+b}$$

## ARTICOL

### PROPRIETATEA 4

Daca  $a, b, c, d$  numere extreme strict pozitive cu  $c-a=b-d$  atunci  $a=b=c=d$ .

#### DEMONSTRATIE:

Din  $c-a=b-d$  avem  $a=c-b+d$  si inlocuind in definitia numerelor extreme avem:

$$\frac{c-b+d+b}{2} = \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{cd} \Rightarrow \frac{c+d}{2} = \sqrt{cd} \Rightarrow c=d \text{ si din P1 avem } a=b=c=d.$$

### PROPRIETATEA 5

Daca  $a, b, c, d$  numere extreme strict pozitive cu  $c-a=2(b-d)$  atunci  $a=b=c=d$ .

#### DEMONSTRATIE:

Din P3 avem  $(a+b)(a-c)=4c(d-b)$  si din ipoteza  $\Rightarrow 2(a+b)(d-b)=4c(d-b)$   
 $\Rightarrow d=b$  sau  $c = \frac{a+b}{2} = \sqrt{cd} \Rightarrow c=d$ . In ambele situatii din P1  $\Rightarrow a=b=c=d$ .

#### CONSECINTE:

- 1) Daca  $a+b=c+d$  sau  $ab=cd$  unde  $a, b, c, d$  numere extreme strict pozitive atunci  $a=b=c=d$ .
- 2) Nu exista patru numere extreme in progresie aritmetica sau geometrica.

#### DEMONSTRATIE:

1) Din  $a+b=c+d \Rightarrow c-a=b-d$  si din P4  $\Rightarrow a=b=c=d$

Din  $ab=cd$  si din  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{cd} = \sqrt{ab} \Rightarrow a=b \Rightarrow a=b=c=d$

2) Lasam ca exercitiu aceasta demonstratie care este evidenta folosind P2.

TEOREMA

Daca  $a, b, c, d$  numere extreme strict pozitive si distincte doua cate doua

atunci  $(\exists) p, q \in (0, +\infty)$  cu  $p > \frac{4q}{3}$  si  $p \neq 2q$  astfel incat :

$$a = \frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2} \quad b = \frac{p^2q}{(p-2q)^2} \quad c = \frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2} \quad d = \frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}.$$

DEMONSTRATIE:

Din P2 avem  $a < c$  si  $b > d$  (deoarece sunt distincte)

Sa notam  $c-a=p$  si  $b-d=q$  Evident  $p > 0$  si  $q > 0$ .

Se observa ca  $p \neq 2q$  deoarece in caz contrar am avea  $c-a=2(b-d)$  si din P5 avem  $a=b=c=d$  contradictie.

Sa mai aratam si ca  $p > \frac{4q}{3} \Leftrightarrow 3p > 4q \Leftrightarrow 3(c-a) > 4(b-d)$

Din P3 stim ca  $\frac{a-c}{d-b} = \frac{4c}{a+b}$

Din P2 avem  $c \geq \frac{a+b}{3} \Leftrightarrow \frac{4c}{a+b} \geq \frac{4}{3}$  si obtinem  $\frac{a-c}{d-b} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(c-a) \geq 4(b-d)$

Vom mai arata ca inegalitatea de mai sus este stricta , altfel daca  $3(c-a)=4(b-d)$

d) obtinem  $c = \frac{a+b}{3}$

Din  $(a+b)(b+c)=4bc \Rightarrow 3c(b+c)=4bc \Rightarrow b=3c$  si cum  $a+b=3c$  am avea  $a=0$ (absurd).

In continuare avem  $c=a+p$  si  $b=d+q$  . Inlocuind pe  $c$  si  $b$  in relatiile din P3

obtinem:  $\frac{a+d+q}{a+d+p+q} = \frac{d}{b}$  si prin calcul direct obtinem  $d = \frac{aq+q^2}{p-q}$

Din a doua relatie din P3 avem  $\frac{p}{q} = \frac{4(a+p)}{a+d+q}$  si prin calcul direct obtinem

$$d = \frac{a(4q-p)+3pq}{p} \quad \text{Egaland cele doua relatii obtinem } a = \frac{pq(3p-4q)}{(p-2q)^2}$$

## ARTICOL

In continuare inlocuind pe a obtinem  $d = \frac{4q^2(p-q)}{(p-2q)^2}$

Dar  $c = a + p = \frac{p^2(p-q)}{(p-2q)^2}$  si  $b = d + q = \frac{p^2q}{(p-2q)^2}$  prin calcul direct .

### OBSERVATII:

Se pot construi oricat de multe astfel de numere , de exemplu daca luam  $p=5$  si  $q=3$  obtinem  $a=45$  ,  $b=75$  ,  $c=50$  ,  $d=72$ .

PROPUNEM CELOR INTERESATI SA GASEASCA SI ALTE  
PROPRIETATI INTERESANTE ALE ACESTOR NUMERE.