MateInfo.ro
MATEmatică şi INFOrmaţii din învăţământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

GENERALIZAREA UNOR INEGALITĂŢI

NECULAI STANCIU[1]

În cei 115 ani de apariţie neîntreruptă a Gazetei Matematice (1895 – 2010) în paginile acestei reviste cât şi în alte reviste din ţara noastră şi din străinătate s-au publicat mai multe inegalităţi , care permit evidenţierea unei clase (de inegalităţi)care au anumite proprietăţi commune.

În acest articol vom exemplifica utilitatea , eleganţa şi generalitatea folosirii conceptului matematic de funcţie convexă în demonstrarea unor inegalităţi.

Vom considera $f : D \to R$, o funcţie convexă pe mulţimea D.Pentru $\forall \lambda_i \in R^+$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \neq 0$ şi $a_i \in D$, $i = \overline{1,m}$ avem cunoscută inegalitatea lui *Jensen*

$$(1)\quad f\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(a_j)}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

care se poate demonstra uşor prin inducţie.

Dificultatea stabilirii unor inegalităţi prin folosire funcţiilor convexe constă în alegerea funcţiei convexe f şi a numerelor λ_i din inegalitatea (1).

Fie α_i, $\beta_i \in (0,\infty)$; p_i, q_i, $k_i \in R$ şi funcţiile $u_i : (0,\infty) \to R$ date de $u_i(x) = (\alpha_i x_i^{p_i} + \beta_i x_i^{q_i})^{k_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Vom considera funcţia :

$$(2)\quad f(x) = \prod_{i=1}^{n} u_i(x)$$

Se arată prin inducţie că :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) u_i'(x), \text{ unde } A_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} u_j(x) \text{ şi}$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) u_i''(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x) u_i'(x) u_j'(x), \text{ unde } B_{ij}(x) = \prod_{k=1, k\neq i,j} u_k(x).$$

Pe de altă parte avem :

$$u_i'(x) = k_i(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 1}(\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1}),\ \forall i = \overline{1,n} \text{ şi}$$

$$u_i''(x) = k_i(k_i - 1)(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 2}(\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1})^2 +$$
$$+ k_i(\alpha_i x^{p_i} + \beta_i x^{q_i})^{k_i - 1}(\alpha_i p_i (p_i - 1) x^{p_i - 2} + \beta_i q_i (q_i - 1) x^{q_i - 2}),\ \forall i = \overline{1,n}.$$

Fie

$$D = \left\{x \in (0,\infty) / (\alpha_i p_i x^{p_i - 1} + \beta_i q_i x^{q_i - 1}) > 0, (\alpha_i p_i (p_i - 1) x^{p_i - 2} + \beta_i q_i (q_i - 1) x^{q_i - 2} > 0, \forall i = \overline{1,n}\right\}$$

---

[1] Prof., Şc. ''George Emil Palade'' , Buzău

atunci $\forall x \in D$ rezultă că $f''(x) \geq 0$ şi prin urmare funcția f este convexă pe D.
Din inegalitatea lui Jensen (1) se obține:

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i a_j^{p_i} + \beta_i a_j^{q_i})^{k_i} \geq m\prod_{i=1}^{n}\left[\alpha_i(\frac{a}{m})^{p_i} + \beta_i(\frac{a}{m})^{q_i}\right]^{k_i}$$

, unde $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$ şi $\lambda_j = 1$, $\forall\ j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = m$.

Dacă în inegalitatea (3) înlocuim $n = 1$, atunci $\forall \alpha, \beta \in (0,\infty)$ avem:

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{m}(\alpha a_j^p + \beta a_j^q)^k \geq m\left[\alpha(\frac{a}{m})^p + \beta(\frac{a}{m})^q\right]^k$$

Aplicații (ale inegalității (4))

În continuare, voi prezenta un set de inegalități din Gazeta Matematică care, au fost rezolvate la vremea respectivă prin alte metode.

1. Dacă în inegalitatea (4) înlocuim $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 1$ rezultă :

$$(5)\quad \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j^p}{m} \geq \frac{(\sum_{j=1}^{m} a_j)^p}{m^p}$$

, inegalitatea *Titu Andreescu*, care generalizează problema 8807 din G.M nr. 3 / 1968 autor *Iosif Bohler* şi problema 8785 din G.M nr. 3 / 1968 autor *N. Pantazi.*

2. Dacă în inegalitatea (5) $p = 2$, avem :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \geq \frac{a^2}{m}$$

, publicată în *Journal de mathematiques elementaires* în 1964 şi în G.M nr. 10 / 1964 problema 6579 .

3. Dacă în (4) înlocuim $a = 1$, $\alpha = \beta = 1$ şi $q = -1$ rezultă :

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j + \frac{1}{a_j})^k \geq \frac{(1+m^2)^k}{m^{k-1}}$$

, problema 8745 din G.M nr. 2 / 1968, autor *Liviu Pîrşan* (care este în legătură cu problema 7877, C.d *Skiliarski* , 1965, pag. 67)

4. Pentru $\alpha = 0$, $\beta = k = 1$, $q = -\frac{1}{s}$, $s \geq 2$, $s \in N$ obținem:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt[s]{a_j}} \geq m\sqrt[s]{\frac{m}{a}}$$

, problema 8796 din G.M. nr. 3 / 1968 autor *Liviu Pîrşan* ,în legătură cu problemele 6641 din G.M. nr. 12 / 1964 autor *Cornel Popovici* , 8358 din G.M. nr. 7 / 1967 autor *Dan Stănescu* şi problema 8688 din G.M. nr. 1 / 1968.

În încheiere, pe baza ideilor prezentate, propunem cititorilor să rezolve următoarele probleme:

a) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (\alpha a_j^r + \beta) \geq \frac{a^q (\alpha a^r + \beta m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în (4) $k = 1$ şi $p = q + r$)

b) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (a_j^r + 1) \geq \frac{a^q (a^r + m^r)}{m^{q+r-1}}$$

(soluția se obține imediat dacă înlocuim în a) $\alpha = \beta$)

c) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$ cu $\sum_{j=1}^{m} a_j = a$. Să se arate că :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^q (a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq (\frac{m}{a})^{m-q-r} + (\frac{m}{a})^{m-q}$$

(soluție. În inegalitatea a) înlocuim $\alpha = \beta = (a_1 a_2 ... a_m)^{-1}$ şi ținem seama că produsul a m numere reale strict pozitive, pentru care suma este constantă, este maxim atunci când numerele sunt egale între ele, adică

$a_1 a_2 ... a_m \leq (\frac{a}{m})^m$)

d) Fie $a_j > 0$, $\forall j = \overline{1,m}$. Să se arate că :

$\sum_{j=1}^{m} a_j^p (a_j^r + 1)(a_1 a_2 ... a_m)^{-1} \geq m^{m-q-r} + m^{m-q}$ (vezi G.M nr. 10 / 1968 , problema 9234, autor *Liviu Pîrşan*)

(soluție.rezultă imediat dacă înlocuim în d) $a = 1$).

BIBLIOGRAFIE

[1]. Gazeta matematică 1895 – 2010

*** www.gazetamatematica.net