MateInfo.ro
MATEmatică și INFOrmații din învățământul ROmânesc
Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

SUBIECTE PROPUSE PENTRU EXAMENELE DE BACALAUREAT 2008 – 2009

MATEMATICĂ – M1

Corneliu Mănescu-Avram

Aceste subiecte prezintă interes pentru candidații la examenul de bacalaureat – 2010, întrucât conțin modelul propus de minister, care este extras respectiv din variantele **48**(**I**), **21**(**II**), **72**(**III**). Ele au fost postate pe site-ul ministerului la 1 martie 2008 şi au fost rezolvate în diverse culegeri, inclusiv electronice. Multe dintre aceste soluții sunt însă prea stufoase, incomplete sau chiar incorecte. Se impune de aceea reluarea şi rediscutarea unora dintre ele, ceea ce vom face în continuare.

SUBIECTUL II

VARIANTA 1

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

a) Să se verifice că pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Soluție

a) Dacă $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, atunci funcția $g : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $g(x) = bx$, este injectivă, deoarece $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$

este un corp, în particular este inel integru. Mulțimea $\mathbb{Z}_7$ este finită, deci funcția g este şi

surjectivă. Avem $g(\hat{0}) = \hat{0}$, aşadar mulțimile $\mathbb{Z}_7^*$ şi $b\mathbb{Z}_7^*$ coincid, deci produsul elementelor lor este acelaşi

$$\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot \hat{6} = (b \cdot \hat{1}) \cdot (b \cdot \hat{2}) \cdot \ldots \cdot (b \cdot \hat{6}).$$

Prin simplificare, rezultă $b^6 = \hat{1}$.

b) Avem $(x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4}) = x^6 - \widehat{16} = x^6 - \widehat{16} + \widehat{21} = x^6 + \hat{5}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Dacă $a = \hat{0}$, atunci $f = X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{4})(X^3 + \hat{4})$ (punctul b)), deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Dacă $a \neq \hat{0}$, atunci a este inversabil în $\mathbb{Z}_7$, deoarece $\mathbb{Z}_7$ este un corp (numărul 7 este un număr prim), deci există $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, $b = a^{-1}$. Atunci $f(b) = b^6 + ab + \hat{5} = \hat{1} + \hat{1} + \hat{5} = \hat{0}$ (punctul a)). Rezultă că polinomul f se divide în $\mathbb{Z}_7[X]$ cu $X - b$, deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Comentarii. 1) Afirmaţia de la a) este un caz particular al teoremei lui *Fermat* : *"Dacă p este un număr prim şi $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq \hat{0}$, atunci $a^{p-1} = \hat{1}$"*. Demonstraţia aceste teoreme se poate face prin aceeaşi metodă.

2) Se poate arăta că dacă p este un număr prim şi $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, atunci polinomul $f = X^{p-1} + aX - \hat{2} \in \mathbb{Z}_p[X]$ este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$.

VARIANTA 6

2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuaţiei

$x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ şi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$.

a) Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 şi x_3.

b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuaţia are o singură rădăcină reală.

c) Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

Soluţie

a) Fie $f = X^3 - 2X^2 + 2X - a \in \mathbb{C}[X]$. Pentru $a = 1$ avem descompunerea

$f = (X - 1)(X^2 - X + 1)$, deci rădăcinile lui f sunt $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) Din relaţiile lui *Viète* rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$. Dacă rădăcinile lui f sunt toate reale, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deci $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, absurd. Numărul rădăcinilor complexe nereale ale lui f este par, prin urmare f are o singură rădăcină reală.

c) Avem $\Delta = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$. Scriem că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale lui f, adunăm egalitățile respective şi obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3a =$
$= -4 + 3a$. Din $x_1x_2x_3 = a$, rezultă $\Delta = -4 + 3a - 3a = -4$, deci valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

Notă. Dacă $a \notin \mathbb{R}$, atunci ecuația dată nu are rădăcini reale. Într-adevăr, dacă x_0 este o rădăcină a ecuației date, atunci $a = x_0^3 - 2x_0^2 + 2x_0 \in \mathbb{R}$, absurd.

VARIANTA 8

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi ecuația $x^3 - x + a + 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.

b) Să se calculeze x_2, x_3, dacă $x_1 = 2$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

Soluție

a) Fie $f = X^3 - X + a \in \mathbb{R}[X]$. Avem $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, deci
$(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) = -f(-1) = -a$.

b) Dacă $x_1 = 2$, atunci $a = -2^3 + 2 = -6$ şi $f = (X - 2)(X^2 + 2X + 3)$, deci
$x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

c) Fie $b \in \mathbb{Z}$ rădăcină a lui f, deci $f(b) = 0$ şi $a = -b^3 + b$. Rezultă
$f = (X - b)(X^2 + bX + b^2 - 1)$. Discriminantul celui de-al doilea factor $\Delta = -3b^2 + 4 \geq 0$ dacă şi numai dacă $b \in \{-1, 0, 1\}$, deci $a = 0$.

VARIANTA 12

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0})$ şi $f(\hat{1})$.

b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

c) Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

Soluție

a) Avem $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$.

b) Pătratele din $\mathbb{Z}_5$ sunt $\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}$, puterea a patra a oricărui element din $\mathbb{Z}_5$ este $\hat{0}$ sau $\hat{1}$. Rezultă

$$f(x) = \begin{cases} \hat{0}, dacă\ x = \hat{0}, \\ \hat{1} - x,\ dacă\ x \neq \hat{0} \end{cases}$$

şi e clar că funcția f nu ia valoarea $\hat{1}$, deci f nu este surjectivă.

c) Polinomul $X^4 + \hat{4}X = X^4 - X$ se descompune peste $\mathbb{Z}_5$ astfel $X^4 + \hat{4}X =$

$= X(X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$. Factorul $X^2 + X + \hat{1} = (X + \hat{3})^2 + \hat{2}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_5$, în caz contrar

el ar avea o rădăcină în $\mathbb{Z}_5$, dar $-\hat{2} = \hat{3}$ nu este pătrat în $\mathbb{Z}_5$, contradicție.

VARIANTA 17

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu

rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^2 - 1$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se calculeze $(1 - x_1)\cdot(1 - x_2)\cdot(1 - x_3)\cdot(1 - x_4)$.

c) Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

Soluție

a) $f = gq + mX + n$, $q \in \mathbb{Q}[X]$, $m, n \in \mathbb{Q}$, deoarece gradul restului este mai mic decât gradul împărțitorului.. Avem $m + n = f(1) = 5$, $-m + n = f(-1) = 1$, de unde $m = 2$, $n = 3$, aşadar restul este $r = 2X + 3$.

b) Din $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$, rezultă $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = f(1) = 5$.

c) Avem şi $f(-1) = 1$, deci $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4) = f(1)\cdot f(-1) = 5\cdot 1 = 5$.

VARIANTA 18

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2$, $b = 0$.

b) Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.

c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

Soluție

a) Dacă $a = 2$ şi $b = 0$, polinomul devine $f = X^3 + 8X^2 + 20X = X(X^2 + 8X + 20)$, cu rădăcinile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -4 \pm 2i$.

b) Folosim relațiile lui *Viète* : $x_1 + x_2 + x_3 = -4a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 20$, de unde

$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$

$= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 8(4a^2 - 15)$.

c) Din $x_1 = x_2 = -a$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = -4a$, rezultă $x_3 = -2a$ şi polinomul devine $f = (X + a)^2(X + 2a) = X^3 + 4aX^2 + 5a^2X + 2a^3$. Prin identificarea coeficienților se obțin egalitățile $5a^2 = 20$, $2a^3 = b$, de unde rezultă soluțiile $a = 2$, $b = 16$ şi $a = -2$, $b = -16$.

VARIANTA 22

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ şi $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi polinomul

$f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ şi cu proprietatea că $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(5)$.

b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = a_n$.

c) Să se arate că $f = X$.

Soluție

a) Se dau lui x valorile 0, 1, 2 şi se obțin egalitățile $f(1) = (f(0))^2 + 1 = 1$, $f(2) = (f(1))^2 + 1 = 2$, $f(5) = (f(2))^2 + 1 = 5$.

b) Demonstrăm egalitatea $f(a_n) = a_n$ prin inducție matematică. Am verificat la punctul a) egalitatea pentru $n \in \{0, 1, 2\}$. Presupunem că egalitatea este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$: dacă $f(a_n) = a_n$, atunci $f(a_{n+1}) = f(a_n^2 + 1) = f(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 =$ $= a_{n+1}$.

c) Aplicăm următoarea *Teoremă. Numărul rădăcinilor unui polinom cu coeficienți îint-un corp comutativ este cel mult egal cu gradul polinomului.* Rezultă că dacă un polinom cu coeficienți reali are o infinitate de rădăcini reale, atunci el este polinomul nul. Considerăm polinomul $g = f - X \in \mathbb{R}[X]$. Avem $g(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci g este polinomul nul, de unde rezultă $f = X$.

VARIANTA 23

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ şi polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Soluție

a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = a$, $f(\hat{2}) = \hat{1} + a$, deci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{3}a = \hat{1}$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, avem $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{2}$, $f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, deci singura rădăcină din $\mathbb{Z}_3$ a polinomului f este $x = \hat{2}$.

c) Dacă $a = \hat{0}$, atunci $f = X^3 + \hat{2}X^2 = X^2(X + \hat{2})$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Dacă $a = \hat{2}$, atunci $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2} = (X + \hat{1})(X^2 + X + \hat{2})$ este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Dacă $a = \hat{1}$, atunci f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ (punctul a)), deci f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ (dacă un polinom de gradul 3 cu coeficienți într-un corp comutativ este reductibil, atunci el are o rădăcină în corpul coeficienților).

Comentariu. Polinomul $f = X^3 - X^2 + a \in \mathbb{Z}_p[X]$, p număr prim, este reductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$, dacă $a \in \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

VARIANTA 26

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = 3X^4 - 2X + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X - 1)^2$.

c) Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție

a) Rădăcinile complexe y_1 , y_2 , y_3 , y_4 ale polinomului $g = X^4 - aX^3 - X^2 + 2X - 3$ sunt inversele rădăcinilor lui f (am inversat ordinea coeficienților şi am schimbat semnele), deci

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = a.$$

b) Se împarte polinomul f la polinomul $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ şi se obține restul $r = (a + 8)X - 7$.

c) $f(0) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, deci f are cel puțin două rădăcini reale. Din $f''(x) = 36x^2 - 12x + 2 > 0$ pe $\mathbb{R}$, rezultă că f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f' are o singură rădăcină reală (întrucât f' este o funcție polinomială de gradul 3), prin urmare f are cel mult două rădăcini reale. Rezultă că f are exact două rădăcini reale şi două rădăcini complexe nereale.

VARIANTA 29

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea

$$G = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix}\right\} \text{ şi matricele } O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ şi } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

a) Să se verifice că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_3$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $x = y = \hat{0}$.

b) Să se arate că mulțimea $H = G \setminus \{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

Soluție

a) Pătratele din $\mathbb{Z}_3$ sunt $\hat{0}$ şi $\hat{1}$. Avem $\hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$, $\hat{0} + \hat{1} = \hat{1} + \hat{0} = \hat{1}$, $\hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$, aşadar $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $x = y = \hat{0}$.

b) O submulțime H a unui grup finit G este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $xy \in H$, oricare ar fi $x, y \in H$. Matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(X) \neq \hat{0}$. Avem $\det(X) = a^2 - \hat{2}b^2 = a^2 + b^2 = \hat{0}$ dacă şi numai dacă $a = b = \hat{0}$ (punctul a)). Este suficient deci să demonstrăm că $H = G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă față de înmulțirea obişnuită a matricelor. Produsul a două matrice inversabile este o matrice inversabilă. Dacă

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \hat{2}b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in H, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & \hat{2}b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in H,$$

atunci

$$X_1X_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 & \hat{2}(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 + \hat{2}b_1b_2 \end{pmatrix} \in H.$$

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Din $X^2 = I_2$ rezultă $\begin{cases} a^2 - b^2 = \hat{1} \\ \hat{2}ab = \hat{0} \end{cases}$. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $b^2 = \hat{2}$, imposibil. Dacă $b = \hat{0}$, atunci $a = \hat{1}$ sau $a = \hat{2}$. Se obțin soluțiile $X_1 = I_2$, $X_2 = -I_2$.

Comentariu. Dacă p este un număr prim şi $p \equiv 3 \pmod 4$, $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_p)$, atunci singurele soluții ale ecuației $X^2 = I_2$ sunt $X_1 = I_2$ şi $X_2 = -I_2$.

VARIANTA 30

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G = \{X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $X(a)X(0) = X(a)$ şi $X(a)X(b) = X(a + b - 10ab)$.

b) Să se arate că mulțimea $H = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

Soluție

a) Se verifică prin calcul că $A^2 = -10A$. Atunci $X(a)X(0) = X(a)I_2 = X(a)$, $X(a)X(b) =$
$= (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a + b)A + abA^2 = I_2 + (a + b - 10ab)A = X(a + b - 10ab)$,
$\forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Egalitatea $a + b - 10ab = \frac{1}{10} - 10(a - \frac{1}{10})(b - \frac{1}{10})$ arată că dacă $a \neq \frac{1}{10}$ şi $b \neq \frac{1}{10}$, atunci $a + b - 10ab \neq \frac{1}{10}$. Din $X(a)X(b) = X(a + b - 10ab)$ rezultă că H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Din $X(a)X(a) = X(2a - 10a^2) = X(0) = I_2$, rezultă $2a - 10a^2 = 0$, cu soluțiile $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{5}$.

Se obțin matricele $X_1 = I_2$ şi $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$.

VARIANTA 35

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcția $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}, f(a + b\sqrt{2}) = = a^2 - 2b^2, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ şi mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$.

a) Să se verifice dacă $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

b) Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

c) Să se arate că mulțimea A este infinită.

Soluție

a) $f(7 + 5\sqrt{2}) = 7^2 - 2\cdot 5^2 = -1$, deci $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

b) $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(xy) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 =$
$= (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = f(x)f(\mathrm{y})$.

c) Dacă $x = 7 + 5\sqrt{2}$ şi $n \in \mathbb{N}$ este impar, atunci $f(x^n) = (f(x))^n = (-1)^n = -1$, deci A conține mulțimea infinită $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ impar}\}$, astfel că A este mulțime infinită.

Comentariu. Dacă se înlocuieşte 2 cu un întreg de forma $m^2 + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci găsim $x = 4m^3 + 3m + (4m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1} \in A$, deci mulțimea A este infinită.

VARIANTA 37

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ şi cu rădăcinile

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.

b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de p, q şi r.

c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ şi $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.

Soluție

a) Dacă $x > 0$, atunci $f(x) > 0$ (este o sumă de numere strict pozitive); avem şi $f(0) = r > 0$, deci f nu se anulează pe $[0, \infty)$.

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - q(x_1 + x_2 + x_3) - 3r =$
$= -p[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] - q(x_1 + x_2 + x_3) - 3r = -p(p^2 - 2q) + pq - 3r =$

$= -p^3 + 3pq - 3r$.

c) Dacă a, b, c sunt rădăcinile lui f, atunci $a + b + c = -p > 0$, $ab + bc + ca = q > 0$, $abc = -r > 0$ şi deci $a, b, c \in (-\infty, 0)$ (punctul a)).

Comentariu. Mai general, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ are toți coeficienții pozitivi şi $f(0) > 0$, atunci toate rădăcinile reale ale lui f sunt strict negative.

VARIANTA 38

2. Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că numărul $f(3) - f(1)$ este număr par.

b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, numărul $f(x) - f(y)$ este divizibil cu $x - y$.

c) Să se determine coeficienții polinomului f ştiind că $f(1) = 4$ şi $f(b) = 3$.

Soluție

a) $f(3) - f(1) = a(3^4 - 1^4) + b(3 - 1)$ se divide cu $3 - 1 = 2$, deci este un număr par.

b) $f(x) - f(y) = a(x^4 - y^4) + b(x - y) = (x - y)[a(x + y)(x^2 + y^2) + b]$ se divide cu $x - y$.

c) $f(1) - f(b) = 4 - 3 = 1$ se divide cu $1 - b$, deci $1 - b \in \{-1, 1\}$, astfel că $b \in \{0, 2\}$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 1$, $c = 3$. Dacă $b = 2$, atunci $a = -\frac{1}{15} \notin \mathbb{Z}$.

Comentariu. Dacă $f = aX^n + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ şi $f(1) = c + 1$, $f(b) = c$, atunci $a = 1$, $b = 0$.

VARIANTA 39

2. Se consideră mulțimea $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1\}$.

a) Să se arate că $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

b) Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

c) Să se demonstreze că nulțimea M are o infinitate de elemente.

Soluție

a) $9^2 - 5\cdot 4^2 = 1$, deci $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

b) Mulțimea M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale : dacă $a_1 + b_1\sqrt{5}$, $a_2 + b_2\sqrt{5} \in M$, atunci $(a_1 + b_1\sqrt{5})(a_2 + b_2\sqrt{5}) = a_1a_2 + 5b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}$, deoarece $(a_1a_2 + 5b_1b_2)^2 - 5(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 - 5b_1^2)(a_2^2 - 5b_2^2) = 1$, Înmulțirea numerelor reale este asociativă şi comutativă, în particular aceste proprietăți se păstrează pe M, elementul neutru $1 = 1 + 0\cdot\sqrt{5} \in M$, inversul unui element $a + b\sqrt{5} \in M$ este $(a + b\sqrt{5})^{-1} = a - b\sqrt{5} \in M$, deoarece $a^2 - 5(-b)^2 = 1$. Rezultă că $(M, \cdot)$ este un grup abelian.

c) Mulțimea M conține submulțimea infinită $\{(9 + 4\sqrt{5})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, deci M este o mulțime infinită.

Comentariu. Dacă numărul 5 se înlocuieşte cu $m^2 + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, atunci

$2m^2 + 1 + 2m\sqrt{m^2 + 1} \in M$ şi toate proprietățile se păstrează.

VARIANTA 41

2. Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$, unde $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

b) Să se rezolve în mulțimea A ecuația $X^2 = I_2$.

c) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

Soluție

a) Elementele a, b au câte 5 valori posibile, deci mulțimea A are $5 \cdot 5 = 25$ de elemente.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in A$. Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & \hat{2}ab \\ -\hat{2}ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ dacă şi numai dacă $a^2 - b^2 = \hat{1}$ şi $ab = \hat{0}$. Dacă $a = \hat{0}$, atunci $b^2 = -\hat{1} = \hat{4}$, deci $b \in \{\hat{2}, \hat{3}\}$. Dacă $b = \hat{0}$, atunci $a^2 = \hat{1}$, deci $a \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$. Se obțin soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix}$.

c) Matricea $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{2} \end{pmatrix} \in A$ este nenulă şi neinversabilă (determinantul ei este egal cu $\hat{0}$), deci $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

Comentariu. Dacă p este un număr prim, $p \equiv 1 \pmod 4$ şi $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$, atunci matricea $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{a} \end{pmatrix} \in A$ este nenulă şi neinversabilă.

VARIANTA 44

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + 1$.

b) Să se arate că polinomul $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.

c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție

a) f se divide cu $X + 1$ dacă şi numai dacă $f(-1) = 1 - a + 4 + 1 = 0$, deci $a = 6$.

b) Polinomul g are aceiaşi coeficienți ca şi polinomul f, dar scrişi în ordine inversă, deci rădăcinile lui g sunt inversele rădăcinilor lui f.

c) Dacă $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină reală. Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = 0$. Atunci evident $x_0 \neq 0$ şi $a = -\frac{x_0^4 + 4x_0^2 + 1}{x_0^3} \in \mathbb{R}$, contradicție.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, avem $g''(x) = 12x^2 + 8 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci g' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Funcția g' este funcție polinomială de gradul 3 şi este injectivă pe $\mathbb{R}$, deci are o singură rădăcină reală, astfel că g are cel mult două rădăcini reale (*Rolle*). Rezultă că f are cel mult două rădăcini reale.

VARIANTA 45

2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, funcția $f: G \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ şi corespondența $(x, y) \to x * y$, unde $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se arate că această corespondență defineşte o lege de compoziție pe G.

b) Să se arate că $\forall x, y \in G$, $f(x * y) = f(x)f(y)$.

c) Ştiind că operația "$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{9}$.

Soluție

a) Demonstrăm că dacă $x, y \in G$, atunci $x*y \in G$. Avem $\frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0$,

$1 - \frac{x+y}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$, dacă $x, y \in (-1, 1)$.

b) $f(x*y) = \frac{1-x*y}{1+x*y} = \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y} = \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = f(x) \cdot f(y)$.

c) $f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{8}{10} = \frac{1}{45}$. Dar $f^{-1} = f$, deci $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{9} = f^{-1}\left(\frac{1}{45}\right) = f\left(\frac{1}{45}\right) = \frac{44}{46} = \frac{22}{23}$.

Notă. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$.

VARIANTA 54

2. Se consideră şirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ şi polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_nX - F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

a) Să se arate că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu P.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

c) Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul Q_n este divizibil cu P.

Soluție

a) $X^3 - 2X - 1 = P\cdot(X + 1)$.

b) $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, deci $Q_3 = X^3 - 2X - 1$ are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Demonstrăm proprietatea prin inducție matematică. Polinomul $Q_2 = P$ se divide cu P, iar la punctul a) am arătat că polinomul Q_3 se divide cu P. Presupunem că polinoamele Q_{n-2} şi Q_{n-1}, $n \geq 4$, se divid cu P şi demonstrăm că polinomul Q_n se divide cu P. Acest fapt rezultă simplu din egalitatea $Q_n - Q_{n-1} - Q_{n-2} = X^{n-2}P$.

VARIANTA 63

2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\hat{f} = X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Să se arate că rădăcinile $\mathbb{C}$ din ale polinomului f nu sunt toate reale.

b) Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

c) Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.

Soluție

a) Dacă toate rădăcinile lui f sunt reale, atunci suma pătratelor lor este strict pozitivă, dar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-2)^2 - 2\cdot3 = -2 < 0$, deci f are o singură rădăcină reală.

b) $\hat{f}(\hat{0}) = \hat{f}(\hat{1}) = \hat{1}$, deci $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

c) Dacă f este produsul a două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, atunci el are un factor unitar de gradul 1 (adică un factor de forma $X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$) , deci f are o rădăcină întreagă, de unde rezultă că $\hat{f}$ are o rădăcină în $\mathbb{Z}_2$, contradicție.

Comentariu. Din $f(-5) = -45 < 0$, $f(-4) = 1 > 0$, rezultă că singura rădăcină reală a lui f nu este întreagă, deci nici raţională, deoarece f este polinom unitar.

VARIANTA 68

2. Se consideră ecuaţia $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 soluţiile complexe ale acesteia.

a) Ştiind că $p = 1$ şi $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Să se determine p şi q ştiind că $x_1 = 1 + i$.

c) Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

Soluţie

a) $x^3 + x = 0$, cu soluţiile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm i$.

b) Din $x_2 = 1 - i$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă $x_3 = -2$, deci $x^3 + px + q = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, de unde , prin identificarea coeficienţilor, se deduce $p = -2$, $q = 4$.

c) Fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Aceste sume se calculează înmulţind ecuaţia cu puteri convenabile ale lui x, substituind cu valorile rădăcinilor şi însumând. Avem $S_1 = 0$, $S_2 =$
$= S_1^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2p$, $S_3 = -pS_1 - 3q = -3q$, $S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2$, $S_5 =$
$= -pS_3 - qS_2 = 5pq$, $S_7 = -pS_5 - qS_4 = -7p^2q$ şi se vreifică simplu egalitatea din enunţ.

VARIANTA 72

2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Ştiind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

Soluţie

a) $p = X^3 - X - 6 = (X - 2)(X^2 + 2X + 3)$ are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$.

b) $S_4 = 2\cdot(-1)^2 = 2$ (a se vedea varianta 68).

c) Toate rădăcinile lui p sunt întregi dacă şi numai dacă $m = 0$ (varianta 8).

VARIANTA 75

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

b) Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a.

c) Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

Soluţie

a) Polinomul p este reciproc, adică $p(X) = X^4\, p\left(\frac{1}{X}\right)$, deci dacă x este rădăcină a lui f, atunci şi $\frac{1}{x}$ este rădăcină a lui f, aşadar suma rădăcinilor coincide cu suma inverselor rădăcinilor.

b) Polinomul p este divizibil cu $X^2 - 1$ dacă şi numai dacă $p(1) = p(-1) = 0$. Avem însă $p(1) + p(-1) = 4$, deci p nu este divizibil cu $X^2 - 1$.

c) Dacă $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$, atunci $x \neq 0$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$. Se face substituţia $x + \frac{1}{x} = t$ şi se obţine ecuaţia $t^2 - \frac{1}{2}t - 2 = 0$, cu soluţiile $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. Se verifică simplu inegalităţile $t_1^2 < 4$, $t_2^2 < 4$. Din $x + \frac{1}{x} = t$ se deduce $x^2 - tx + 1 = 0$, cu soluţiile

$x_{1,2} = \frac{t \pm i\sqrt{4 - t^2}}{2}$ (avem de fapt 4 soluţii, câte două pentru fiecare valoare a lui t). Pentru fiecare rădăcină x a polinomului p se deduce $|x| = \sqrt{\frac{t^2}{4} + \frac{4 - t^2}{4}} = 1$.

VARIANTA 86

2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

a) Să se determine gradul polinomului f^2.

b) Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

c) Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

Soluție

a) $f^2 = (\hat{2}X + \hat{1})^2 = \hat{4}X^2 + \hat{4}X + \hat{1} = \hat{1}$, deci grad $f^2 = 0$.

b) $f^{-1} = f$.

c) Fie $g = aX + b \in \mathbb{Z}_4[X]$, $a \neq \hat{0}$. Dacă $g^2 = \hat{1}$, atunci $a^2 = \hat{0}$, $\hat{2}ab = \hat{0}$, $b^2 = \hat{1}$. Din $a^2 = \hat{0}$ şi $a \neq \hat{0}$, rezultă $a = \hat{2}$, care satisface şi $\hat{2}ab = \hat{0}$. Din $b^2 = \hat{1}$, rezultă $b = \hat{1}$ sau $b = \hat{3}$. Se obțin polinoamele $g_1 = \hat{2}X + \hat{1}$, $g_2 = \hat{2}X + \hat{3}$.

Notă. Dacă $g = \widehat{2n}X \pm \hat{1} \in \mathbb{Z}_{4n}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $g^2 = \hat{1}$.

VARIANTA 89

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

a) Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

c) Să se calculeze $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.

Soluție

a) $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, deci $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = f(1) = 4$.

b) Dacă f ar avea rădăcini întregi, acestea s-ar găsi printre divizorii termenului liber, dar $f(1) =$
$= 4$, $f(-1) = -8$.

c) Grupăm termenii şi folosim relațiile liu *Viète* : $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$, $x_1x_2x_3 = -1$. Expresia este $x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) = x_1x_2(3 - x_3) +$
$+ x_1x_3(3 - x_2) + x_2x_3(3 - x_1) = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3) = 3(5 + 1) = 18$.

VARIANTA 94

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$ şi $f(0) = 0$.

a) Să se determine $f(-1)$.

b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - 5$.

c) Să se demonstreze că $f = X$.

Soluție

a) Pentru $x = -1$ se obține $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, de unde se deduce $f(-1) = -1$.

b) Pentru $x = 0$ se obține $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$. Pentru $x = 1$ se obține $f(5) =$
$= f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$, deci restul împărțirii lui f la $X - 5$ este egal cu 5.

c) Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1$. Se demonstrează prin inducție că $f(a_n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Am verificat egalitatea pentru $n \in \{0, 1, 2\}$, deoarece $a_0 = 0$, $a_1 =$
$= 1$, $a_2 = 5$. Presupunem că $f(a_n) = a_n$ pentru un n natural oarecare fixat, atunci $f(a_{n+1}) =$
$= f(a_n^2 + 3a_n + 1) = f^2(a_n) + 3f(a_n) + 1 = a_n^2 + 3a_n + 1 = a_{n+1}$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deoarece $a_{n+1} - a_n = (a_n + 1)^2 > 0$. Polinomul $f - X$ are deci o infinitate de rădăcini $x = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, prin urmare el este polinomul nul, astfel că $f = X$ (a se vedea şi varianta 22).

VARIANTA 95

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine a, b, c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1 + i$.

b) Să se arate că resturile împărțirii polinomului f la $(X - 1)^2$ şi la $(X - 2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a, b, c.

c) Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a, b, c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

Soluție

a) $x_3 = 1 - i$, deci $f = (X - 2)(X^2 - 2X + 2) = X^3 - 4X^2 + 6X - 4$, de unde, prin identificarea coeficienților se deduce $a = 4$, $b = 6$, $c = 4$.

b) Presupunem că există $r \in \mathbb{R}[X]$ polinom de grad cel mult 1 astfel încât $f - r$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$ şi cu $(X - 2)^2$, polinoame care sunt prime între ele. Rezultă că $f - r$, care este polinom de gradul 3, se divide cu polinomul $(X - 1)^2(X - 2)^2$, care este de gradul 4, deci $f - r$ este polinomul nul, aşadar gradul lui $f = r$ este cel mult 1, absurd.

c) Dacă $x > 0$, atunci $f(-x) = -(x^3 + ax^2 + bx + c) < 0$, deci f nu are rădăcini negative.

VARIANTA 98

2. Fie $p \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^4 - 4X + p \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X + 1$.

b) Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

c) Să se arate că pentru orice $p \in \mathbb{R}$ polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Soluție

a) $f(-1) = 5 + p = 0$, deci $p = -5$.

b) Polinomul f are o rădăcină dublă $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $f(a) = f'(a) = 0$,

$f''(a) \neq 0$. Din $f'(a) = 4a^3 - 4 = 4(a-1)(a^2 + a + 1) = 0$ şi $a \in \mathbb{R}$ rezultă $a = 1$. Atunci $f(1) =$

$= -3 + p = 0$, deci $p = 3$.

c) Funcția reală f' este negativă pe $(-\infty, 1)$, pozitivă pe $(1, \infty)$ şi $f'(1) = 0$, deci $x = 1$ este punct de minim (global). Dacă $f(1) = p - 3 \leq 0$, atunci f are două rădăcini reale, deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Dacă $f(1) = p - 3 > 0$, atunci f nu are rădăcini reale.

VARIANTA 100

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ şi polinomul $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$.

a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

b) Să se arate că dacă $f(2)$ şi $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$ nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante cu coeficienți întregi.

Soluție

a) $f(1) + f(-1) = 2(a_0 + a_2 + a_4 + ...)$ (suma se extinde asupra tuturor coeficienților cu indicele par).

b) Presupunem că f are o rădăcină $a \in \mathbb{Z}$. Atunci $f = (X - a)q$, cu $q \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $f(2) =$

$= (2 - a)q(2)$ şi $f(3) = (3 - a)q(3)$ sunt numere impare, atunci $2 - a$ şi $3 - a$ sunt numere impare, deci $3 - a - (2 - a) = 1$ este număr par, absurd.

c) Dacă g este produsul a două polinoame neconstante cu coeficienți întregi, atunci el are un factor de forma $X - b \in \mathbb{Z}[X]$, deci are o rădăcină $b \in \mathbb{Z}$. Atunci polinomul

$\hat{g} = X^3 - X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ are rădăcina $\hat{b} \in \mathbb{Z}_3$. Avem $\hat{g}(\hat{0}) = \hat{g}(\hat{1}) = \hat{g}(\hat{2}) = \hat{1}$, deci $\hat{g}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$, contradicție.

SUBIECTUL III

VARIANTA 45

2. Fie funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}dx$.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx$.

Soluție

a) Funcția $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, este impară, intervalul $[-1, 1]$ este simetric față de origine, deci $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}dx = 0$.

b) $V_f = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x^2)dx = 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$.

c) Avem $0 \le f(x) \le 1$, $\forall x \in [-1, 1]$, deci $0 \le x^n f(x) \le x^n$, $\forall x \in [-1, 1]$. Prin integrare se obține $0 \le \int_0^1 x^n f(x)dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, de unde $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ (criteriul cleştelui).

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com