Revista Mateinfo.ro ISSN 2065 – 6432 nr. februarie 2010

Olimpiada de matematică –faza zonală - test pregătitor
Clasa a-V-a

I. a) **Să se afle elementele mulţimii A ={ a,b,c,d,e } ştiind că sunt ele sunt numere naturale diferite ,nenule, a<b<c<d şi îndeplinesc simultan condiţiile :**

i) $e^2 = c^2+d^2$

ii) produsul elementelor din mulţimea A este 120

b) Arătaţi că numărul $X=152^{c+d}+563^{a+b+e}+787^{a+b}$ nu este pătrat perfect

c) Ordonaţi crescător numerele c^{2010} , b^{3015} , d^{1506}

Soluţie

a) $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 120 \Rightarrow 120 = 1\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ şi ţinând cont că $5^2 = 3^2+4^2 \Rightarrow$

a= 1 , b= 2 , c=3 , d= 4 , e= 5 $\Rightarrow$ A={ 1,2,3,4,5 }

b) $X= 152^{3+4}+563^{1+2+5}+787^{1+2} = 152^7+563^8+787^3 \Rightarrow u(X) = u(2^7) + u(3^8) + u(7^3) =$
$= u(8+1+3) = 2 \Rightarrow$ un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2; 3; 7; 8.
$\Rightarrow$ X nu este p.p.

c) $c^{2010} = 3^{2010} = (3^2)^{1005} = (9)^{1005}$
$b^{3015} = 2^{3015} = (2^3)^{1005} = (8)^{1005}$
$d^{1506} = 4^{1506} = (2^2)^{1506} = (2^2)^{2\cdot 3\cdot 251} = (2^3)^{2\cdot 2\cdot 251} = (8)^{1004}$
$(8)^{1004} < (8)^{1005} < (9)^{1005} \Rightarrow d^{1506} < b^{3015} < c^{2010}$

II. Să se afle numerele naturale n pentru care avem :

$$4^{n+3}+4^{n+2}+4^{n+1}+4^n \le (4^{26}\cdot 8^{13} : 32^{17})\cdot(3^2+4^2+5^2+6^2-7^0)$$

Soluţie $4^{n+3}+4^{n+2}+4^{n+1}+4^n = 4^n(4^3+4^2+4^1+1) = 85\cdot 4^n$
$4^{26}\cdot 8^{13} : 32^{17} = 2^{52}\cdot 2^{39} : 2^{85} = 2^6$
$3^2+4^2+5^2+6^2-7^0 = 85$
$85\cdot 4^n \le 2^6\cdot 85 \Rightarrow 4^n \le 2^6 \Rightarrow 4^n \le 4^3 \Rightarrow n \le 3$
$n \in \{0,1,2,3\}$

III. **Fie numărul n** $= \overline{abcabc} + \overline{abc}$

a) Aflaţi restul împărţirii numărului $\overline{abcabc}$ la 91

b) Arătaţi că numărul n este divizibil cu 167

Soluţie a) $\overline{abcabc} = 1001\,\overline{abc} = 7\cdot 11\cdot 13 = 11\cdot 91 \Rightarrow r=0$

b) $n = \overline{abcabc}+\overline{abc} = 1001\,\overline{abc} + \overline{abc} = 1002\,\overline{abc} = 167\cdot 6\,\overline{abc} \Rightarrow 167/n$

IV.Aflaţi două numere naturale ştiind că unul este mai mare decât celălalt cu 33 iar dacă împărţim triplul sumei lor la dublul diferenţei lor obţinem câtul 2 şi restul 57 .

Soluţie

Fie $a > b \Rightarrow a - b = 33 \Rightarrow 2(a - b) = 66$ = dublul diferenţei
$3(a+b)$ = triplul sumei
$D = I\cdot C + R \Rightarrow 3(a+b) = 66\cdot 2 + 57 = 189 \Rightarrow a+b = 63 \Rightarrow a=45$ si $b= 33$

Prof. Vasile Uleanu - Şcoala cu clasele I-VIII nr. 5 "Armand Călinescu " Curtea de Argeş