

**Izomorfism de structuri algebrice**  
**de Florin Antohe**

Există patru probleme de izomorfism:

**1. Dacă mulțimile suport sunt finite**, se fac tabelele legilor de compoziție și se arată că prin suprapunere coincid, adică corespondența a două linii sau coloane omoloage se menține pe întreg tabelul.

**Exemplul 1** : Fie grupurile  $G_1 = (\{0, 1, 2\}, \oplus)$  cu  $\oplus =$  adunarea modulo 3 și  $G_2 = (\{1, \xi, \xi^2\}, \bullet)$  unde  $\xi = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  este o rădăcină cubică complexă a unității ( $\xi^3 = 1$ ).

Atunci  $G_1 \cong G_2$ .

**Soluție** : Tabelele legilor de compoziție date sunt:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\bullet$	1	$\xi$	$\xi^2$
1	1	$\xi$	$\xi^2$
$\xi$	$\xi$	$\xi^2$	1
$\xi^2$	$\xi^2$	1	$\xi$

Structurile sunt izomorfe deoarece tabelele prin suprapunere coincid. Funcția izomorfism este  $f : G_1 \rightarrow G_2$  definită prin  $f(0)=1$ ,  $f(1)=\xi$ ,  $f(2)=\xi^2$  sau  $f(k)=\xi^k$ ,  $k \in G_1$ .

**2. Dacă mulțimile suport sunt infinite, dar cu structură specificată:** perechi, numere complexe, matrice, permutări, funcții, numere iraționale de formă particulară, etc. atunci funcția izomorfism va fi aplicația ce asociază elementului general dintr-o mulțime, elementul general din cealaltă mulțime, scrise cu aceleași simboluri. Se arată că funcția aleasă este bijecție și morfism.

**Exemplul 2 :** Fie grupurile  $G_1 = (\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}, +)$

$$G_2 = \left( \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}, + \right).$$

Să se arate ca  $G_1 \cong G_2$

**Soluție :** Fie funcția  $f: G_1 \rightarrow G_2, f(a+b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ .

Injectivitate ( $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ )

$$f(a+b\sqrt{2}) = f(c+d\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Rightarrow a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$$

Surjectivitate ( $\forall y \in B, \exists x \in A$  așa încât  $y = f(x)$ )

$\forall M \in G_2 \exists z \in G_1$  așa încât  $f(z) = M$ .

$$\text{Fie } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\beta & \alpha \end{pmatrix} \in G_2 \Rightarrow \exists z = \alpha + \beta\sqrt{2} \in G_1 \text{ așa încât } f(\alpha + \beta\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(z) = M$$

$\Rightarrow f$  este bijectivă

morfism  $f(z_1+z_2) = f(z_1) + f(z_2), \forall z_1, z_2 \in G_1$

$$f(z_1+z_2) = f(a+b\sqrt{2} + c+d\sqrt{2}) = f(a+c + \sqrt{2}(b+d)) =$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = f(a+b\sqrt{2}) + f(c+d\sqrt{2}) = f(z_1) + f(z_2).$$

**3. Dacă mulțimile suport sunt infinite, intervale ale lui  $\mathbf{R}$  sau  $\mathbf{R}^*$**  funcția izomorfism va fi aplicația cea mai simplă ce realizează bijecția între cele două intervale, învățată până în clasa a-X-a inclusiv. Se arată că funcția aleasă este bijecție și morfism.

**Exemplul 3 :** Fie grupurile  $G_1 = ((0, \infty), \bullet)$  și  $G_2 = (\mathbf{R}, +)$ . Arătați că  $G_1 \cong G_2$ .

**Soluție** Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \log_2 x, a > 0, a \neq 1$

Injectivitate  $f(x) = f(y) \Rightarrow \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Surjectivitate:  $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in (0, \infty)$  așa încât  $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \Rightarrow f$  este bijectivă

Morfism:  $f(xy) = f(x) + f(y) \forall x, y \in (0, \infty)$

$$f(xy) = \log_a xy = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y) \forall x, y \in (0, \infty) \Rightarrow f \text{ izomorfism.}$$

**Exemplul 4 :** Fie grupurile  $G_1 = \left( \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), * \right)$  unde  $x*y = \arctg(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y)$  și  $G_2 = (\mathbf{R}, +)$ . Arătați că  $G_1 \cong G_2$ .

**Soluție :** Fie  $f = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{tg}x$

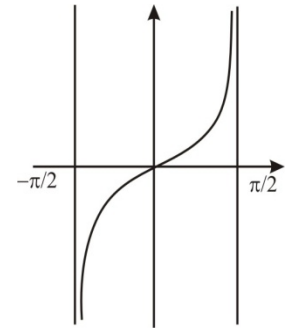
Injectivitate:  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \Rightarrow f$  este strict crescătoare pe  $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow f$  este

injectivă (orice funcție strict monotonă este injectivă).

Surjectivitate  $f$  este continuă, deci face proprietatea lui Darboux

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}x = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}x = -\infty \Rightarrow \operatorname{Im}f = \mathbf{R} \Rightarrow f$  surjectivă  $\Rightarrow f$  este

bijectivă.



Morfism : Să arătăm că  $f(x*y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$   $f(x*y) = \operatorname{tg}(x*y) =$

$\operatorname{tg}(\arctg(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y)) = \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = f(x) + f(y) \Rightarrow f$  izomorfism.

**4.** Se dă funcția izomorfism, depinzând eventual de un parametru, și se cere să se demonstreze că este izomorfism. Parametrul se determină din condiția  $f(e) = e'$ , apoi se arată că  $f$  este bijecție și morfism.

**Exemplul 5 :** Fie grupurile  $G_1 = ((0, \infty), \bullet)$  și  $G_2 = ((-1, 1), *)$  unde  $x*y = \frac{x+y}{1+xy}$  și

funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ , definită prin  $f(x) = \frac{x+a}{x+1}$ , unde  $a \in \mathbf{R}$  este un parametru ce

se va determina. Să se arate că  $f$  este izomorfism de grupuri.

**Soluție :** Parametrul  $a$  se determină din condiția  $f(e) = e'$ . In cazul nostru

$$e_{G_1} = 1 \text{ și } e_{G_2} = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Injectivitate :  $f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow xy-y+x-1=xy-x+y-1 \Leftrightarrow 2x=2y \Leftrightarrow x=y$  .

Surjectivitate :  $\forall y \in (-1,1), \exists x \in (0,\infty)$  așa încât  $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=xy+y \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$  .

Cum  $y \in (-1,1)$   $\left\{ \begin{array}{l} y < 1 \Rightarrow y-1 \neq 0 \Rightarrow \exists x \\ -1 < y < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y > 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow f$  este bijectivă .

$f$  morfism :  $\Leftrightarrow f(xy) = f(x) * f(y) \forall x, y \in (0,\infty)$

$$f(xy) = \frac{xy-1}{xy+1} \Leftrightarrow f(x) * f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{y+1}} =$$

$$= \frac{xy-y+x-1+xy-x+y-1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1} = \frac{2(xy-1)}{2(xy+1)} = \frac{xy-1}{xy+1} \Rightarrow f$$
 este izomorfism.

**Bibliografie :**

- [1]. C. Năstăsescu , C. Niță , Bazele algebrei –E.D.P. 1986.
- [2]. Gh. Andrei , C. Caragea , V. Ene- Culegere de probleme.

profesor , Școala Gimnazială “Nichita Stănescu  
 str. Costache Conachi nr 2,cod 800643  
 Galați, județul Galați