Revista MateInfo.ro ISSN 2065 - 6432 nr. martie 2010

Impartirea numerelor naturale si impartirea numerelor intregi

I) Impartirea numerelor naturale

Teorema impartirii cu rest: $d=ic+r$, $0\leq r<1$.

"Deimpartitul este egal cu impartitorul ori catul plus restul".

Daca $i=0$, avem $a:1=a$.

Daca $d=0$ si $i\neq 0$ avem $0=i\cdot 0$. Deci $0:a=0$, $a\neq 0$.

Daca $d\neq 0$ si $i=0$ vom avea $d=0c+r$, dar $0\leq r<1$, insa $i=0$, deci impartirea cu 0 nu este posibila.

Daca $d=0$ si $i=0$ vom avea $0=0c+r$, , ceea ce ar fi adevarat daca $r=0$.

Probleme

1. Delia a avut o suma de lei din care si-a propus sa-si cumpere numai caiete. Ea si-a putut cumpara doar 10 caiete cu 5750 lei bucata. Ce suma a avut Delia?

Rezolvare:

Daca notam suma Deliei cu S, atunci avem $S=5750\cdot 10+R$, unde $0\leq R<5750$.

Daca $R=0$, atunci $S=57500$.

Daca $R=1$, atunci $S=57501$.

....

Daca $R=5749$, atunci $S=63249$.

2. Radu are doua clasoare in care are in total 131 timbre. Daca imparte numarul timbrelor dintr-un clasor la numarul timbrelor din celalalt clasor obtine catul 3 si restul 15. Cate timbre are in fiecare clasor?

Rezolvare: Avem nevoie de o figura.

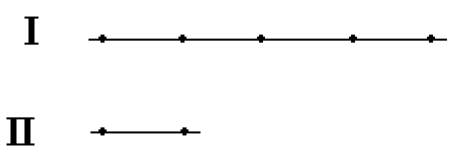

Figure 1

Si prin metoda figurativa deducem ca in clasorul al doilea va avea $(131-15):4=29$ timbre, iar atunci in primul clasor vor fi $3\cdot 29+15=102$ timbre.

3. Intr-o impartire cu rest a doua numere naturale se stie ca suma dintre rest si impartitor este 15, suma dintre cat si impartitor este 17, suma dintre rest, cat si impartitor este 18. Aflati numerele.

Solutie:

$D=C\cdot I+R$, $0\leq r<I$

$R+I=15$

C+I=17

I+C+R=18

Din ultimele doua relatii obtinem 17+R=18, de unde R=1. Apoi din a doua si ultima relatie obtinem C+15=18, de unde C=3. Apo inlocuind in a doua relatie avem I=14., iar din prima relatie D=43.

4. Suma a doua numere este 340. Daca impartim numarul mai mare la jumatatea numarului mai mic obtinem catul 3 si restul 25. Aflati numerele.

Solutie:

Notam x si $y \in N$ cele doua numere.

Presupun $x<y$.

Atunci $x+y=340$ si $y=0,5x \cdot 3+25$, cu $0,5\,x>25$.

$x+\frac{3}{2}x+25=340.$

$\frac{5}{2}x=340-25$

$\frac{5}{2}x=315$

x=126

y=340-126

y=214

5. Diferenta a doua numere este 94, iar ea intrece cu 23 sfertul numarului mic. Aflati numerele.

*Solutie:*Notam x si $y \in N$ cele doua numere. Vom avea $x-y=94$ si $x-y-23=\frac{1}{4}y$.Obtinem $94-23=\frac{1}{4}y$.

$\frac{1}{4}y=71$

y=284.

x=y+94

x=284+94

x=378.

6. Impartind numerele 1243, 6532, 1817 la un acelasi numar, obtinem resturile 13, 7 si 2. Aflati impartitorul.

Solutie:

Fie x nenul, impartitorul comun. Atunci conform teoremei impartirii cu rest avem

1243=xa+13

6532=xb+7

1817=xc+2

unde a, b, c sunt caturile din impartirile efectuate. Scadem din fiecare egalitate restul corespunzator si vom obtine $1230=xa$

$6525=xb$

$1815=xc$

Cum x este acelasi, inseamna ca el este cmmdc al numerelor date si $x \geq 13$.

Atunci cum $1230=2\cdot3\cdot5\cdot41$

$6525=3^2\cdot5^2\cdot29$

$1815=3\cdot5\cdot11^2$

Inseamna ca x =cmmdc$=3\cdot5=15$.

7. Sa se afle cel mai mic numar de doua cifre, pe care impartindu-l la 10, 18, 15 sa obtinem acelasi rest 2.

Solutie:

Fie x numarul cautat; x avand doua cifre este mai mare decat 2.(2 ar fi fost cel mai mic numar cu proprietatile cerute).

Deci $x-2\in M_{10}$, $x-2\in M_{18}$ si $x-2\in M_{15}$; de unde x-2=cmmdc[10,18,15].

Fiind cel mai mic numar cautat.

Avem atunci $x-2=90$ si $x=92$.

8.Care sunt numerele naturale cuprinse intre 200 si 300, cre impartite pe rand la 5, 4, 3 sa dea resturile4, 3, 2?

Solutie:

Daca x este un numar ce indeplineste cerintele problemei, inseamna ca

$x-4\in M_5$ rezulta ca $x+1\in M_5$

$x-3\in M_4$ rezulta ca $x+1\in M_4$

$x-2\in M_3$ rezulta ca $x+1\in M_3$

Din ultimele trei relatii obtinem $x+1\in M_{[5,4,3]}$

$x+1\in M_6=\{60, 120, 180, 240, 300,...\}$

Cum insa $200<x<300$, vom avea $x+1=240$ deci $x=239$

$x+1=300$ de unde $x=299$.

Numerele cautate sunt 239 si 299.

9. Care exte cel mai mare numar $\overline{abc}$ care impartit pe rand la 7, 3, 5 sa dea restul 1?

Solutie: Daca $\overline{abc}=x$, avem

$x-1\in M_7$

$x-1\in M_3$

$x-1\in M_5$

De aici rezulta ca $x-1\in M_{[7,3,5]}$

$x-1 \in M_{105}$

$\overline{abc}-1 \in M_{105}=\{105, 210, 315, 420, ..., 945\}$

$\overline{abc}-1=105$, de unde $\overline{abc}=106$

$\overline{abc}-1=210$, de unde $\overline{abc}=211$

....

$\overline{abc}-1=945$, de unde $\overline{abc}=946$.

Cum $\overline{abc}$ este cel mai mare numar de trei cifre cu aceste proprietati, vom avea $\overline{abc}=946$.

10. Sa se afle doua numere naturale stiind ca cmmdc=4 si cmmmc=144.

Solutie:

Fie a si b numerele cautate. Atunci $(a,b)=4$ si $[a,b]=144$.

Cum $(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$ avem $a\cdot b=4\cdot 144$

$a\cdot b=576$

Cum $(a,b)=4$, rezulta $a=4k$ si $b=4x$ cu $(k,x)=1$.

Prin inlocuire obtinem $4k\cdot 4x=576$ rezulta $k\cdot x=36$.

Deci $k, x \in D_{36}=\{1, 2, 3, 4, 6, 6, 12, 18, 36\}$

Numerele a si b cautate vor fi (4,144); (16,36); (36,16); (144,4).

11. Sa se afle cmmdc si cmmmc al numerelor 729 si 576.

Solutie:

Pentru a afla cmmdc avem doua metode: Algoritmul lui Euclid si descompunerea numerelor.

Metoda I: Algoritmul lui Euclid

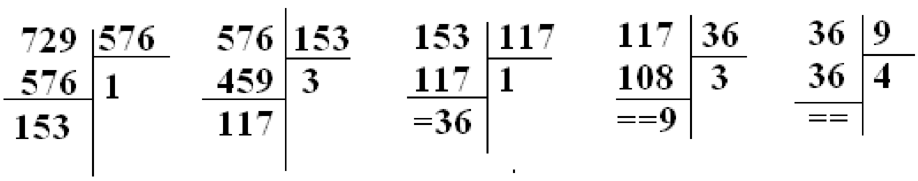

Figure 2

Cmmdc(729, 576)=9, ultimul rest nenul.

Cum $(729, 576)\cdot[729, 576]=729\cdot 576$

$[729, 576]=46656$.

Metoda a II-a: Descompunerea in factori primi

$729=3^6$

$576=2^6\cdot 3^2$

$(729, 576)=3^2=9$

$[729, 576]=2^6\cdot 3^6=46656$.

12. Ciurul lui Eratostene este o metoda cunoscuta inca din antichitate pentru determinarea numerelor prime.

Exemplu.

Sa se afle numerele prime mai mici decat 100.

Solutie:

Se scriu toate numerele de la 2 la 100, apoi se bareaza multiplii lui 2(mai putin 2), multiplii lui 3(mai putin 3), etc.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

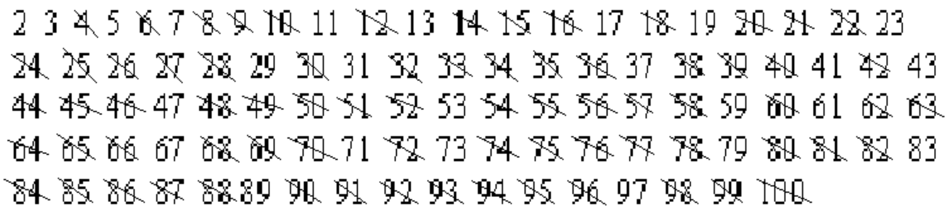

Figure 3

Deci numerele prime mai mici decat 100 sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

13. Sa se determine restul impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3.($n\in N$).

Solutie:

$1^n+2^n+4^n= 1+ (3-1)^n+(3+1)^n=1+C_n^0 3^n- C_n^1 3^{n-1}+ C_n^2 3^{n-2}-....+(-1)^n C_n^n+ +C_n^0 3^n+ C_n^1 3^{n-1}+ C_n^2 3^{n-2}+....+ C_n^n=M_3+2+(-1)^n$.

Daca n este numar par atunci $(-1)^n=1$ si $1^n+2^n+3^n+4^n=M_3$ deci restul impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3 este 0.

Daca n este numar impar atunci $(-1)^n=-1$ si $1^n+2^n+3^n+4^n=M_3+1$ deci restul

impartirii lui $1^n+2^n+3^n+4^n$ la 3 este 1.

14. Sa se arate ca daca $n\in N^*$, atunci n^2 divide $(n+1)^n-1$.

Solutie:

$(n+1)^n-1= C_n^0 n^n+C_n^1 n^{n-1}+ C_n^2 n^{n-2}+...+C_n^n-1= C_n^0 n^n+C_n^1 n^{n-1}+ C_n^2 n^{n-2}+...+ +C_n^{n-1}= n^2(C_n^0 n^{n-2}+C_n^1 n^{n-3}+ C_n^2 n^{n-4}+...+ +C_n^{n-3} n+ C_n^{n-2}+1)$ este divizibil cu n^2, pentru orice n natural, mai mare sau egal cu 2.

Daca n=2 atunci $2^2 \mid 3^2-1$ ceea ce este adevarat.

Daca n=1 atunci $1 \mid 2-1$ ceea ce este adevarat.

II) Teorema impartirii cu rest a numerelor intregi

Fie a si b doua numere intregi cu b nenul. Atunci exista doua numere intregi q si r unice cu proprietatile

$a=bq+r$ si $0\leq r < |b|$. (1)

Egalitatea (1) se numeste formula impartirii cu rest pentru numere intregi, iar numerele q si r se numesc catul si respectiv restul impartirii lui a la b.

Exercitii

1. Sa se efectueze impartirea cu rest a lui -50 la 6.

Solutie:

Vom efectua impartirea cu rest a lui 50 la 6. Vom avea $50=6\cdot8+2$, apoi inmultind cu -1 obtinem $-50=6\cdot(-8)-2$

$-50=6\cdot(-8)-6+4$

$-50=6\cdot(-9)+4$

De aici rezulta ca $q=-9$ si $r=4$.

2. Sa se efectueze impartirea cu rest a lui -721 la -50.

Solutie:

Avem $721=50\cdot14+21$

$-721=-50\cdot14-21$

$-721=-50\cdot14-50+29$

$-721=-50\cdot15+29$

De aici $q=15$ si $r=29$.

3. Fie a, b, c numere intregi cu c nenul si r_1 si r_2 resturile impartirii lui a si b la c. Atunci restul impartirii lui a+b la c este acelasi cu restul impartirii lui r_1+r_2 la c, iar restul impartirii lui ab la c este egal cu restul impartirii lui $r_1\cdot r_2$ la c.

Solutie:

Avem $a= q_1\cdot c+r_1$, $0\leq r_1< |c|$

$b= q_2\cdot c+r_2$, $0\leq r_2< |c|$

Atunci $a+b= (q_1+ q_2)\cdot c+ r_1+r_2$

Daca $0\leq r_1+r_2<|c|$ atunci restul impartirii lui a+b la c este chiar r_1+r_2, iar daca $r_1+r_2\geq|c|$ atunci conform teoremei impartirii cu rest avem $r_1+r_2=q\cdot c+r$, cu $0\leq r < |c|$.

Deci $a+b=(q_1+q_2+q_3)\cdot c+r$ cu $0\leq r < |c|$.

Deci restul impartirii lui a+b la c este acelasi cu restul impartirii lui r_1+r_2 la c.

Avem $a\cdot b= (q_1\cdot q_2\cdot c+ q_1\cdot r_2+ q_2\cdot r_1)\cdot c+r_1\cdot r_2$.

Daca $0 \le r_1 \cdot r_2 < |c|$ atunci restul impartirii lui a·b la c este chiar $r_1 \cdot r_2$, iar daca $r_1 \cdot r_2 \ge |c|$ atunci conform teoremei impartirii cu rest avem $r_1 \cdot r_2 = q \cdot c + r$, cu $0 \le r < |c|$.

Deci restul impartirii lui a·b la c este acelasi cu restul impartirii lui $r_1 \cdot r_2$ la c.

$a \cdot b = (q_1 \cdot q_2 \cdot c + q_1 \cdot r_2 + q_2 \cdot r_1 + q) \cdot c + r$; $0 \le r < |c|$.

4. Daca n este un numar intreg, atunci n^2 este de forma 4k sau 8k+1, k intreg.

Solutie:

Deoarece n este un numar intreg avem doua cazuri:

Cazul I. Daca n=2p, p intreg atunci $n^2=4p^2=4k$

Cazul II. Daca n=2p+1, p intreg atunci $n^2=4p^2+4p+1=4p(p+1)+1$

Dar p(p+1)=2k deci $n^2=8k+1$, k intreg.

Qed

5. Daca a, b sunt intregi si 3 nu divide nici pe a, nici pe b, atunci 3 divide pe a-b sau 3 divide pe a+b.

Solutie:

Cum 3 nu divide nici pe a, nici pe b avem a=3k+1 sau a=3k+2 cu k intreg si b=3m+1 sau b=3m+2 cu m intreg.

Cazul I. Daca a=3k+1 si b=3m+1 atunci a-b=3(k-m) divizibil cu 3.

Cazul II. Daca a=3k+1 si b=3m+2 atunci a+b=3(k+m+1) divizibil cu 3.

Cazul III. Daca a=3k+2 si b=3m+1 atunci a+b=3(k+m+1) divizibil cu 3.

Cazul IV. Daca a=3k+2 si b=3m+2 atunci a-b=3(k-m) divizibil cu 3.

6. Sa se arate ca 1000^k-1 este divizibil cu 37, oricare ar fi k natural.

Solutie:

Observam ca 999 este divizibil cu 37. Atunci

$1000^k-1=(999+1)^k-1=C_k^0 999^k+C_k^1 999^{k-1}+\ldots+C_k^{k-2}999^2+C_k^{k-1}999+C_k^k-1=$

$=999(C_k^0 999^{k-1}+C_k^1 999^{k-2}+\ldots+C_k^{k-2}999+C_k^{k-1})=M_{37}$

qed

7. Sa se gaseasca toate numerele intregi n cu proprietatea n+1 divide n^2+1.

Solutie:

Avem $n^2+1=(n+1)(n-1)+2$

Cum n+1 divide n^2+1 avem n+1 divide (n+1)(n-1)+2, rezulta ca n+1 divide 2

$D_2=\{-1, 1, -2, 2\}$

Daca n+1=1 rezulta n=0

Daca n+1=2 rezulta n=1

Daca n+1=-1 rezulta n=-2

Daca n+1=-2 rezulta n=-3.

Deci $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$.

8. Sa se gaseasca prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor -810 si 315.

Solutie:

1) $810=315\cdot2+180$

2) $315=180\cdot1+135$

3) $180=135\cdot1+45$

4) $135=45\cdot3+0$

In acest sir de impartiri succesive ultimul rest nenul este 45, deci (-810, 315)=45.

9. Sa se demonstreze ca numerele 57 si 25 sunt prime intre ele.

Solutie:

Aplicam algoritmul lui Euclid.

1) $57=25\cdot2+7$

2) $25=7\cdot3+4$

3) $7=4\cdot1+3$

4) $4=3\cdot1+1$

5) $3=1\cdot3+0$

si deci (57, 25)=1 ceea ce inseamna ca cele doua numere 57 si 25 sunt prime intre ele.

10. Se dau doua numere intregi a si b nenule care au cmmdc pe 5, iar caturile impartirilor succesive din algoritmul lui Euclid sunt -1, 3, 2. Sa se afle a si b.

Solutie:

$a=b\cdot(-1)+r_1$; $0\leq r_1<|b|$.

$b= r_1\cdot3+r_2$; $0\leq r_2<|r_1|$.

$r_1=r_2\cdot2+0$.

Dar (a, b)=5 rezulta ca $r_2=5$.

$r_1=2r_2=10$.

$b= r_1\cdot3+r_2=35$

$a=b\cdot(-1)+r_1=-25$.

Cele doua numere sunt a=-25 si b=35.

11. Sa se gaseasca doua numere intregi nenule a si b care au cmmdc=3 si cmmmc=72. Este solutia unica?

Solutie:

Cum (a, b)=3 rezulta ca a=3k si b=3m, cu k si m intregi si prime intre ele.

Avem $(a, b)\cdot[a, b]=a\cdot b$.

$3\cdot72=3k\cdot3m$

$k\cdot m=24$

$24=2^3\cdot3$

Cazul I. k=1 si m=24 atunci a=3 si b=72.

Cazul II. k=8 si m=3 atunci a=24 si b=9.

Cazul III. k=3 si m=8 atunci a=9 si b=24.

Cazul IV. k=24 si m=1 atunci a=72 si b=3.etc.

Deci solutia nu este unica.

12. Sa se arate ca numerele 2k+1 si 9k+4 sunt prime intre ele, pentru orice k intreg.

Solutie:

Fie (2k+1, 9k+4)=d, cu d natural.

Cum (d divide 2k+1 si d divide 9k+4) rezulta (d divide 8k+4 si d divide 9k+4) de unde (d divide k si d divide 2k+1) apoi d divide 1, deci

(2k+1, 9k+4)=1.

13. Sa se gaseasca cmmdc a numerelor 2k-1 si 9k+4 in functie de numarul intreg k.

Solutie:

Fie d=(2k-1, 9k+4), d natural.

Cum (d divide 2k-1 si d divide 9k+4) rezulta (d divide 18k-9 si

d divide -18k-8) de unde d divide 17 si apoi d=1 sau d=17.

Daca d=17 atunci 2k-1=17p, cu p intreg.

k=(17p+1)/2 si este intreg.

Deci p=2m+1 cu m intreg.

k=17m+9.

Cazul I. Daca k=17m+9, cu m intreg avem 2k-1=34m+17=17(2m+1)

9k+4=17(9m+5)

Cum (2m+1, 9k+4)=1 avem (2k-1, 9k+4)=17.

Cazul II. Daca $k\in Z\backslash\{17m+9, m\in Z\}$ atunci (2k-1, 9k+4)=1.

14. Sa se arate ca daca a si b sunt numere intregi d=(a, b), iar k si l din Z au proprietatea ca daca ka+lb=d, atunci (k, l)=1.

Solutie:

Presupun d'=(k, l).

d'$\mid$ k si d'$\mid$ l rezulta d'$\mid$ ka+lb rezulta d'$\mid$ d.

Cum d=(a,b) rezulta a=dc si b= de cu (c, e)=1.

$ka+lb=d$

$kdc+lde=d$.

Impartim prin d nenul si obtinem $kc+le=1$.

$d' \mid k$ si $d' \mid 1$ rezulta $d' \mid kc+le$ rezulta $d' \mid 1$ rezulta $d'=1$.De aici rezulta $ke=1$.

q.e.d.

15. Sa se arate ca $(21n+4, 14n+3)=1$. pentru orice n intreg.

Solutie:

Fie $d=(21n+4, 14n+3)$, atunci

$d \mid 21n+4$ si $d \mid 14n+3$ rezulta $d \mid -2(21n+4)+3(14n+3)$

Deci $d \mid 1$, rezulta $d=1$.

16. Sa se arate ca numerele de forma $F_k=2^{2^k}+1$,(k natural) sunt prime doua cate doua.

Solutie:

Fie $F_m=2^{2^m}+1$ si $F_n=2^{2^n}+1$, unde m si n sunt nr. naturale diferite.

Presupunem ca $m>n$ si fie $m=n+k$, $k>0$.

Luam $x=2^{2^n}$ si avem

$F_m-2=2^{2^m}-1=2^{2^{n+k}}+1=x^{2^k}-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)...(x^{2^{k-1}}+1)$

Cum $F_n=2^{2^n}+1=x+1$ rezulta ca $F_n \mid F_m-2$.

Fie $d \mid F_m-2$ si $d \mid F_m$ rezulta $d \mid 2$ si cum d nu divide 2 rezulta $d \mid 1$, adica $(F_m, F_n)=1$.

17. Fie a si b doua numere intregi nenegative.

1) Aratati ca $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1$.

2) Deduceti ca $(2^a-1, 2^b-1)=1$ daca si numai daca $(a, b)=1$.

Solutie:

1) Din teorema impartirii cu rest in multimea numerelor naturale avem ca exista q si r numere naturale cu $a=bq+r$, $0\leq r< b$.

Avem

$2^a-1=2^{bq+r}-1=2^{bq}\cdot 2^r+2^r-2^r-1=(2^{bq}-1)\,2^r+2^r-1=((2^b)^q-1)\,2^r+2^r-1=$

$=(2^b-1)[(2^b)^{q-1}+(2^b)^{q-2}+(2^b)^{q-3}+...+2^b+1]\,2^r+2^r-1=(2^b-1)Q+2^r-1$, unde $Q=(2^b)^{q-1}+(2^b)^{q-2}+(2^b)^{q-3}+...+2^b+1$ si $2^r-1<2^b-1$.

Deci daca r este restul impartirii lui a prin b, atunci 2^r-1 este restul impartirii lui 2^a-1 prin 2^b-1.

In particular, daca d este ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid pentru a si b atunci 2^d-1 este ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid pentru 2^a-1 si 2^b-1, de unde

$(2^a-1, 2^b-1)= 2^d-1 =2^{(a,b)}-1$ qed

2) Daca (a, b)=1 atunci conform punctului (1) avem $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1=1$

Daca $(2^a-1, 2^b-1)=1$ si cum $(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1$, rezulta ca $2^{(a,b)}-1=1$, deci $2^{(a,b)}=2$

(a, b)=1

PROFESOR GRAD I BECHIR GHIULNAR

LICEUL TEORETIC „CALLATIS” MANGALIA, JUD. CONSTANTA