

NOTĂ MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS

Corneliu Mănescu-Avram

Revista electronică Mateinfo.ro a publicat în fiecare săptămână câte o problemă de concurs, care a beneficiat de interesul constant al cititorilor. Nota de față prezintă extinderi ale unora dintre aceste probleme.

1. Fie ABC un triunghi echilateral și P un punct ales arbitrar pe cercul înscris în triunghi. Să se demonstreze că suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ nu depinde de poziția punctului P .

(19 – 25.10.2009)

Proprietatea se păstrează într-un cadru mai general :

Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, O centrul său de simetrie și P un punct arbitrar pe un cerc cu centrul în O . Să se demonstreze că suma $PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_n^2$ nu depinde de poziția punctului P .

Folosim coordonatele complexe, alegem originea în punctul O și axa reală trecând prin punctul A_1 . Putem lua ca unitate raza cercului circumscris poligonului și atunci afixele vârfurilor poligonului sunt $z_k = \varepsilon^k$, $0 \leq k \leq n - 1$, unde ε este o rădăcină primitivă de ordinal n a unității, de exemplu $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Dacă r este raza cercului considerat, atunci ecuația cercului este $z\bar{z} = r^2$, iar $PA_k^2 = |z - z_k|^2 = (z - z_k)(\overline{z - z_k}) = r^2 - z\bar{z}_k - \bar{z}z_k + 1$. Avem $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k = 0$, deci $\sum_{k=1}^n PA_k^2 = n(r^2 + 1)$ nu depinde de poziția punctului P .

2. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC cel mult una dintre relațiile :
$$\begin{cases} b + c = a + 2r \\ c + a = b + 2r \\ a + b = c + 2r \end{cases}$$

este adevărată.

(2 – 8.11.2009, Marian Teler)

Afirmația rămâne adevărată dacă egalitățile se înlocuiesc cu inegalități, mai precis :

Într-un triunghi ABC cel mult una dintre relațiile :
$$\begin{cases} b + c \leq a + 2r \\ c + a \leq b + 2r \\ a + b \leq c + 2r \end{cases}$$
 este adevărată.

Se demonstrează că prima inegalitate este adevărată dacă și numai dacă $m(\hat{A}) \geq \frac{\pi}{2}$.

Într-adevăr, fie I centrul cercului înscris și A', B', C' punctele de contact ale acestui cerc respectiv cu laturile BC, CA, AB . Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente, deci dacă se notează $AB' = AC' = x$, atunci $CB' = CA' = b - x$, $BC' = BA' = c - x$. Din $BA' + CA' = a$, rezultă $2x = b + c - a$. În triunghiul dreptunghic AIB' este adevărată inegalitatea $r \geq x$ dacă și numai dacă $\frac{m(\hat{A})}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{m(\hat{A})}{2}$, așadar $m(\hat{A}) \geq \frac{\pi}{2}$.

Un triunghi are cel mult un unghi drept sau obtuz, deci afirmația din enunț este adevărată.

3. Fie S aria totală și V volumul unui con circular drept. Să se demonstreze inegalitatea

$$S^3 \geq 72\pi V^2.$$

(7 – 13.12.2009, Corneliu Mănescu-Avram)

Problema este un caz particular de inegalitate *izoperimetrică*. Cazul general este extrem de complicat, de aceea vom studia numai corpurile rotunde. Pentru un corp convex C cu dimensiuni variabile, notăm $q(C)$ valoarea maximă a raportului $\frac{36\pi V^2}{S^3}$, unde V este volumul și S este aria corpului. Se știe că mulțimea valorilor funcției q este intervalul $(0, 1]$. Evident, $q(\text{sferă}) = 1$, iar problema cere să se demonstreze că $q(\text{con}) = \frac{1}{2}$. Este adevărată următoarea

Propoziție. a) $q(\text{cilindru}) = \frac{2}{3}$.

b) $q(\text{trunchi de con}) = \frac{2(k^2 + k + 1)^2 [k^4 + 1 + (k^2 + 1)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}]}{(k + 1)^2 (k^2 + 1 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1})^3}$, unde R, r sunt razele bazelor și k este o constantă din intervalul $(0, 1)$ astfel încât $r = kR$.

Demonstrație : a) Aria totală și volumul unui cilindru circular drept sunt $S = 2\pi R(G + R)$, $V = \pi R^2 G$, unde R este raza bazei și G este generatoarea cilindrului. Dacă $G = xR$, cu $x \in (0, +\infty)$, atunci

$$\frac{36\pi V^2}{S^3} = \frac{36\pi(\pi R^2 G)^2}{[2\pi R(G + R)]^3} = \frac{9x^2}{2(x + 1)^3}.$$

Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^3}$. Derivata $f'(x) = \frac{x(2 - x)}{(x + 1)^4}$ este strict pozitivă pe intervalul $(0, 2)$, se anulează în punctul $x_0 = 2$ și este strict negativă pe intervalul $(2, +\infty)$. Rezultă că $x_0 = 2$ este punct de maxim pentru funcția f și deci

$$q(\text{cilindru}) = \frac{9}{2} f(2) = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{27} = \frac{2}{3}.$$

b) Aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept sunt $S = \pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$,

$$V = \frac{\pi(R^2 + Rr + r^2)\sqrt{G^2 - (R - r)^2}}{3}, \text{ unde } R, r \text{ sunt razele bazelor și } G \text{ este generatoarea}$$

trunchiului de con. Dacă $G = xR$, cu $x \in (0, +\infty)$ și $r = kR$, cu $k \in (0, 1)$ constant, atunci

$$\frac{36\pi V^2}{S^3} = \frac{4(R^2 + Rr + r^2)^2 [G^2 - (R - r)^2]}{[G(R+r) + R^2 + r^2]^3} = \frac{4(k^2 + k + 1)^2 [x^2 - (k - 1)^2]}{[(k+1)x + k^2 + 1]^3}.$$

Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - (k - 1)^2}{[(k+1)x + k^2 + 1]^3}$. Derivata

$$f'(x) = \frac{-(k+1)x^2 + 2(k^2 + 1)x + 3(k+1)(k - 1)^2}{[(k+1)x + k^2 + 1]^4} \text{ are o singură rădăcină pozitivă}$$

$x_0 = \frac{k^2 + 1 + 2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}{k+1}$, este strict pozitivă pe intervalul $(0, x_0)$ și strict negativă pe intervalul $(x_0, +\infty)$, deci funcția f are un maxim în punctul x_0 , de unde deducem

$$q(\text{trunchi de con}) = 4(k^2 + k + 1)^2 f(x_0) = \frac{2(k^2 + k + 1)^2 [k^4 + 1 + (k^2 + 1)\sqrt{k^4 - k^2 + 1}]}{(k+1)^2 (k^2 + 1 + \sqrt{k^4 - k^2 + 1})^3}.$$

4. Într-un cub se înscrie o sferă. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la un punct oarecare situat pe sferă la fețele cubului este constantă.

(14 – 20.12.2009, Anghel Valentin)

Afirmația rămâne adevărată în spațiul euclidian n -dimensional \mathbb{R}^n :

Într-un cub n – dimensional se înscrie o sferă. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la un punct oarecare situat pe sferă la fețele de dimensiune $n - 1$ ale cubului este constantă.

Demonstrația în cazul general este aceeași ca în cazul $n = 3$:

Considerăm un reper cartezian $Ox_1 \dots x_n$ cu originea în centrul de simetrie al cubului și axele de coordonate perpendiculare pe fețele de dimensiune $n - 1$ ale cubului. Dacă lungimea razei sferei înscrise în cub este r , atunci vârfurile cubului n – dimensional sunt punctele $(\pm r, \pm r, \dots, \pm r)$ (n componente), fețele de dimensiune $n - 1$ ale cubului sunt conținute în hiperplanele cu ecuațiile $x_1 = \pm r, x_2 = \pm r, \dots, x_n = \pm r$, ecuația sferei înscrise în cub este $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$,

iar distanțele de la un punct $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de pe sferă la fețele de dimensiune $n - 1$ ale cubului sunt $|a_1 \pm r|, |a_2 \pm r|, \dots, |a_n \pm r|$. Avem $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = r^2$ și suma pătratelor acestor distanțe

$$\begin{aligned} & |a_1 + r|^2 + |a_1 - r|^2 + |a_2 + r|^2 + |a_2 - r|^2 + \dots + |a_n + r|^2 + |a_n - r|^2 = \\ & = 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + nr^2) = 2(n + 1)r^2 \end{aligned}$$

nu depinde de poziția punctului P , deci este constantă.

5. Fie a, b, c lungimile laturilor și R lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 10$ și $a^4 + b^4 + c^4 = 40$, atunci $R < \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(1 – 7.02.2010, *Biro Istvan*)

Prin schimbarea constantelor se obține o afirmație mai generală :

Fie a, b, c lungimile laturilor și R lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = u$ și $a^4 + b^4 + c^4 = v$, unde u, v sunt numere reale strict pozitive

astfel încât $u^2 < 3v$, atunci $R < \frac{u}{3} \sqrt{\frac{u}{3(u^2 - 2v)}}$.

Avem $16R^2S^2 = (u^2 - 2v)R^2 = a^2b^2c^2 < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{u}{3}\right)^3$, de unde se obține inegalitatea propusă.

Se poate obține o evaluare mai bună în cazul general, dar pentru a nu complica inutil calculele, alegem v astfel încât $3v = u^2 + 2u$, în concordanță cu opțiunea autorului problemei.

Considerăm polinomul $f = X^3 - uX^2 + \frac{u(u-1)}{3}X - m \in \mathbb{R}[X]$ și determinăm valorile parametrului $m \in (0, +\infty)$ pentru care polinomul f are trei rădăcini reale strict pozitive. Derivata funcției polinomiale asociate lui f este $f'(x) = 3x^2 - 2ux + \frac{u(u-1)}{3}$ și are rădăcinile $x_1 =$

$= \frac{u - \sqrt{u}}{3}$, $x_2 = \frac{u + \sqrt{u}}{3}$. Dacă $u > 1$, atunci rădăcinile derivatei sunt strict pozitive, ceea ce vom presupune în continuare. Derivata este strict pozitivă pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și strict negativă pe (x_1, x_2) . Rezultă că funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ și strict descrescătoare pe (x_1, x_2) . Avem și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Deducem că polinomul f are

trei rădăcini reale strict pozitive dacă și numai dacă $f(x_1) \geq 0$ și $f(x_2) \leq 0$ (1). Din identitatea

$$f = X^3 - uX^2 + \frac{u(u-1)}{3}X - m = \left(\frac{1}{3}X - \frac{u}{9}\right)(3X^2 - 2uX + \frac{u(u-1)}{3}) - \frac{2u}{9}X + \frac{u^2(u-1)}{27} - m$$

obținem valorile $f(x_1)$ și $f(x_2)$, care înlocuite în (1) ne dau

$$-\frac{2u}{9}x_2 + \frac{u^2(u-1)}{27} \leq m \leq -\frac{2u}{9}x_1 + \frac{u^2(u-1)}{27}. \quad (2)$$

Dacă a^2, b^2, c^2 sunt rădăcinile lui f , atunci relațiile lui Viète se scriu

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = u \\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \frac{u(u-1)}{3}, \\ a^2b^2c^2 = m \end{cases}$$

de unde $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = u^2 - \frac{2}{3}u(u-1) = v$,

astfel că sunt îndeplinite condițiile din enunț. Avem și $16R^2S^2 = (u^2 - 2v)R^2 = \frac{u(u-4)}{3}R^2 = a^2b^2c^2 = m$ și (2) devine

$$\frac{u^2 - 3u - 2\sqrt{u}}{9(u-4)} \leq R^2 \leq \frac{u^2 - 3u + 2\sqrt{u}}{9(u-4)}$$

și în final

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{u^2 - 3u - 2\sqrt{u}}{u-4}} \leq R \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{u^2 - 3u + 2\sqrt{u}}{u-4}}.$$

6. Două laturi ale unui triunghi și raza cercului înscris au lungimile respectiv egale cu a, b, r ,

unde $r = \sqrt{\frac{(2a-b)(b-a)}{2}}$ și $a < b < 2a$. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi.

(15 – 21.02.2010, Corneliu Mănescu-Avram)

Originea acestei probleme se află în căutarea perechilor de triunghiuri heronice cu laturile de lungimi a, b, x , respectiv a, b, y , pentru care lungimea r a razei cercului înscris este aceeași.

Varianta parametrizată este următoarea :

Două laturi ale unui triunghi au lungimile egale respectiv cu $m^4 + n^4$ și $(m^2 + n^2)^2$, $m, n \in (0, \infty)$, $m > n$. Să se determine lungimea celei de-a treia laturi, știind că raza cercului înscris în triunghi are lungimea $r = mn(m^2 - n^2)$.

Se obțin soluțiile $x = 2(m^4 - m^2n^2 + n^4)$, $y = 2mn(m^2 + mn + n^2)$, prin aceeași metodă ca la problema anterioară. Alegem $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, $(m, n) = 1$ și deducem că există o infinitate de perechi de triunghiuri cu laturile de lungimi (a, b, x) , (a, b, y) , care au raza cercului înscris de aceeași lungime, toate lungimile fiind exprimate prin numere naturale. Iată câteva dintre ele :

m	n	a	b	x	y	r
2	1	17	25	26	28	6
3	1	82	100	146	78	24
3	2	97	169	122	228	30
4	1	257	289	482	168	60
4	3	337	625	386	888	84
5	1	626	676	1202	310	120

Soluția problemei inițiale este $x = 3a - b$, $y = b - a + \sqrt{2b(b - a)}$. Numerele x, y, r sunt naturale, dacă $b, 2a - b$ și $2(b - a)$ sunt pătrate perfecte. Aceste condiții sunt îndeplinite, dacă $b = u^2$, $2a - b = v^2$, $2(b - a) = u^2 - v^2 = t^2$, $u, v, t \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că o parametrizare pentru a, b, x, y, r este dată de un triplet pitagoric (t, v, u) , deci $v = m^2 - n^2$, $u = m^2 + n^2$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, de unde $a = m^4 + n^4$, $b = (m^2 + n^2)^2$, $x = 2(m^4 - m^2n^2 + n^4)$, $y = 2mn(m^2 + mn + n^2)$, $r = mn(m^2 - n^2)$.

Bibliografie

1. Problema săptămânii, mateinfo.ro
2. Sándor, J., Geometric theorems, diophantine equations and arithmetic functions, American Research Press, Rehoboth, 2002
3. Mihăileanu, N. N., Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, București, 1968
4. Dincă, M., Chiriță, M., Numere complexe în matematica de liceu, All Educational, București, 1996
5. Bradley, Ch. J., Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present, Oxford University Press, 2005

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ȘCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEȘTI

E-mail : avram050652@yahoo.com