

Rezolvarea unor subiecte date la examenul de titularizare

Concursul Național pentru ocuparea catedrelor vacante s-a desfășurat în data de 15 iulie 2009 . Noutatea în desfășurarea acestui concursului a fost faptul că fiecare județ a propus propriile subiecte , un pas important în direcția deșcentralizării . Unele județe au tratat cu maximă importanță acest examen propunând subiecte adecvate , însă au fost cazuri când subiectele propuse mai fuseseră date și în alți ani.

Am selecționat cu ajutorul site-ului www.mateinfo.ro câteva subiecte pe care le-am și rezolvat . Le doresc succes tuturor candidaților din anul acesta și sper ca rezolvarea acestor subiecte să le fie de real folos.

Vom prezenta în continuare subiecte date în diferite județe.

1)(Satu Mare)Se consideră mulțimile $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}; a, b, c \in N \right\}$ și

$$K = \{n \in N / n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc; a, b, c \in N\}$$

a) Calculați $\det(A), A \in M$;

b) Arătați că există o funcție $f : M \rightarrow K$ astfel încât $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$;

c) Dacă $m, n \in K$, atunci $m \cdot n \in K$;

d) Arătați că există $E \in M$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + bE + cE^2, \forall a, b, c \in N$,

unde I_3 este matricea unitate de ordin 3 ;

e) Dacă $n \in N$ și

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$$

$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$$

$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$$

Să se arate că $a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = 2^n$

2)(Satu Mare)Fie triunghiul ABC oarecare , A', B', C' mijloacele laturilor $(BC), (AC)$ și $(AB), D, E, F$ picioarele înălțimilor duse din vârfurile A, B, C ale triunghiului , H ortocentrul triunghiului și A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $(AH), (BH)$ și (CH) .

Arătați că :

a) Punctele A', B', C', D' sunt conciclice .

b) Patrulaterul $A'B'A_1D$ este inscriptibil .

c) Punctele $A', B', C', D, E, F, A_1, B_1, C_1$ sunt situate pe un cerc ; determinați centrul și raza acestuia .

Rezolvări:

1.

a) $\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Punctul a) ne sugerează să considerăm funcția $f : M \rightarrow K, f(A) = \det(A)$.
 $f(A \cdot B) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = f(A) \cdot f(B)$.

c) Fie $m, n \in K, m = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ și $n = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$

Conform punctului b) există $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \in M$ și $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} \in M$ astfel încât

$m = f(A), n = f(B)$ și $f(AB) = f(A) \cdot f(B) = m \cdot n$.

d) Fie $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și se verifică imediat egalitatea cerută.

e) Fie $A(1,1,0) = I + E$, unde $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Atunci

$A^n(1,1,0) = (I + E)^n = C_n^0 + C_n^1 E + C_n^2 E^2 + \dots + C_n^n E^n = (C_n^0 + C_n^3 + \dots)I + (C_n^1 + C_n^4 + \dots)E + (C_n^2 + C_n^5 + \dots)E^2 = A(a_n, b_n, c_n)$.

$\det A^n(1,1,0) = [\det A(1,1,0)]^n = 2^n$.

$\det A^n(1,1,0) = \det A(a_n, b_n, c_n) = a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n$.

2.

a) $A'B' \parallel AB$ ($A'B'$ linie mijlocie). Analog $B'C' \parallel A'D$.

Avem $A'B' = \frac{AB}{2}$, în triunghiul ADB dreptunghic în D $D'C = \frac{AB}{2}$. Deci $A'B'C'D$ trapez

isoscel.

b) A_1B' linie mijlocie în triunghiul

$AHC \Rightarrow HC \parallel A_1B'$. $m(\angle A_1DEA') = 90^\circ, m(\angle A_1B'A') = m(\angle(HC, AB)) = 90^\circ$, deci patrulaterul $A'B'A_1D$ are unghiurile opuse suplementare.

c) Centrul cercului este mijlocul segmentului $[A_1A']$.

3.(Caraș-Severin) Fie $ABCD$ un patrulater convex oarecare și notăm cu α unghiul dintre laturile opuse AD și BC .

a) Demonstrați egalitatea $\cos \alpha = \frac{AC^2 + BD^2 - AB^2 - DC^2}{2AD \cdot BC}$.

b) Dacă β este unghiul ascuțit al diagonalelor demonstrați că

$$\cos \beta = \frac{|AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2|}{2AD \cdot BD}$$

c) Demonstrați că dacă laturile opuse AD și BC sunt perpendiculare atunci

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2.$$

d) Demonstrați că diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare dacă și numai dacă suma pătratelor laturilor opuse este constantă.

Soluție:

a) Se știe că $\cos \alpha = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{BC}}{AD \cdot BC}$ (1). Calculăm produsul scalar $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$:

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB},$$

$$DC^2 = \vec{DC} \cdot \vec{DC} = (\vec{AC} - \vec{AD})^2 = AC^2 + AD^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD}, \text{ de unde rezultă că}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2}. \text{ Analog, } \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2}.$$

Înlocuind în relația (1) obținem $\cos \alpha = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2 - AB^2 - AD^2 + BD^2}{2AD \cdot BC}$

b) $\cos \beta = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{AC \cdot BD},$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2} - \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} =$$

$$= \frac{AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2}{2}$$

$\cos \beta = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{AC \cdot BD} = \frac{|AD^2 + BC^2 - CD^2 - AB^2|}{2AC \cdot AD}$, luăm modul deoarece cosinusul unui unghi ascuțit este pozitiv.

- c) AD și BC sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$, adică $\cos \alpha = 0$, aplicăm punctul a) și obținem $AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$.
- d) AC și BD sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0 \Rightarrow \cos \beta = 0$ și aplicând b) obținem relația cerută.

4)(Brăila) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

- a) Să se calculeze A^2, A^3, A^4 .
- b) Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $A^n = I_3$ dacă și numai dacă 4 divide n .
- c) Fie $G = \{A^n / n \in \mathbb{N}^*\}$. Să se arate că G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup comutativ cu 4 elemente.
- d) Demonstrați că $(G, \cdot) \approx (\mathbb{Z}_4, +)$.
- e) Să se calculeze $\det(A + A^2 + \dots + A^{2009})$.

Soluție :

a) Se obține $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

b) Rezultă din a).

c) Din a) se obține $G = \{I_3, A, A^2, A^3\}$.

Alcătuiim tabla operației :

•	I_3	A	A^2	A^3
I_3	I_3	A	A^2	A^3
A	A	A^2	A^3	I_3
A^2	A^2	A^3	I_3	A
A^3	A^3	I_3	A	A^2

Din tabla operației rezultă că (G, \cdot) este grup comutativ.

d) Alcătuiim tabla lui $(\mathbb{Z}_4, +)$:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Din tablele operațiilor se observă ca cele două grupuri sunt izomorfe.

$$e) A + A^2 + \dots + A^{2009} = 502(I_3 + A + A^2 + A^3) + A$$

$$\text{Se obține } \det(A + A^2 + \dots + A^{2009}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2009 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2009$$

5.(Bihor) Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ și $(A, +, \cdot)$ un corp cu patru elemente și funcția $f: A \rightarrow A, f(x) = 1 + x$.

a) Calculați $\sum_{x \in A} f(x)$.

b) Arătați că $1 + 1 = 0$.

c) Arătați că ecuația $1 + x = x^2, x \in A$ are soluții .

Soluție:

a) Deoarece $(A, +)$ este un grup finit cu patru elemente ,ordinul fiecarui element este 4.În particular $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.Atunci

$$\sum_{x \in A} f(x) = f(0) + f(1) + f(a) + f(b) = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + a + 1 + b = 1 + a + b.$$

Sau, o altă metodă : Este evident că funcția f este injectivă ,iar codomeniul fiind o mulțime finită

ea este și surjectivă ,deci bijectivă . $\sum_{x \in A} f(x) = 0 + 1 + a + b = 1 + a + b$.

b) Fie p caracteristica corpului $(A, +, \cdot)$.Deoarece caracteristica unui corp este 0 sau un numar prim (în cazul nostru nu poate fi 0 deoarece corpul este finit)și caracteristica divide ordinul obținem că $p|4$,adică $p = 2$.Din definiție,rezultă că $1 + 1 = 0$.

c) Deoarece (A^*, \cdot) este grup de ordin 3 rezultă $x^3 = 1, \forall x \in A^*, x \neq 1$.Deoarece

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ și $x + 1 \neq 0$ rezultă obligatoriu $x^2 + x + 1 = 0$ și ținând cont de faptul că $1 = -1$ se obține că ecuația dată are soluții .

6)(Caraș-Severin)Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de legea $f(x) = x + \cos x - 1$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin(\pi x) dx .$$

a) Determinați numărul de rădăcini ale funcției f .

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton.

c) Arătați că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit .

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Soluție:

a)Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^*$ dată de $f(x) = x + \cos x - 1$.

$f'(x) = 1 - \sin x > 0 \Rightarrow f$ e strict crescătoare ,deci injectivă și astfel ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică. Se observă că $x = 0$ este soluție a ecuației date .

Dacă $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$ înlocuind în ecuație se obține $(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 = 0$ sau echivalent

$(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi = 1$,absurd deoarece în stânga avem un număr irațional iar în dreapta unul

natural. Așadar ecuația nu are soluția $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$b) a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \pi a_n.$$

Demonstrăm că $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Dacă $a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 0$, contradicție.
- Dacă $a_n < 0 \Rightarrow |a_{n+1}| \leq a_n < 0$, contradicție .

Așadar , $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + \cos x$.

$g'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \Rightarrow g$ crescătoare $\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0 \Rightarrow x + \cos x \geq 1 \Rightarrow \cos x \geq 1 - x$
și $-\cos \pi a_n \leq \pi a_n - 1$.

$a_{n+1} \leq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} (\pi a_n - 1) = a_n$, de unde rezultă că (a_n) este descrescător.

c) (a_n) fiind descrescător avem $a_n \leq a_0 = 1$. Pe de altă parte $a_n > 0$, deci sirul este mărginit .

d) Se știe că orice șir descrescător mărginit inferior este convergent și anume la marginea inferioară , deci limita cerută este egală cu 0.

Sau , folosind o altă metodă : Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

$a_{n+1} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \pi a_n$ trecând la limită în această relație de recurență se obține

$l = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \pi l \Leftrightarrow \pi l = 1 - \cos \pi l \Leftrightarrow \pi l + \cos \pi l - 1 = 0$ ecuație care conform punctului a)

are soluție unică pe $l = 0$.

7)(Maramureș) Să se demonstreze că într-un triunghi ABC : $\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6$.

Soluție: Fie D intersecția bisectoarei din A cu $[BC]$ și $BM \perp AD$.

Aplicăm teorema bisectoarei și obținem : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b+c}$ de unde rezultă că

$BD = \frac{ac}{b+c}$ (1). În triunghiul BMA dreptunghic în M avem $\sin \frac{A}{2} = \frac{BM}{c}$ dar $BM < BD$ și

ținând cont de relația (1) obținem $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{ac}{(b+c)c} \leq \frac{a}{b+c}$. Analog, obținem și următoarele

relații : $\sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{a+c}$ și $\sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{a+b}$.

$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2+2+2.$$

8)(Suceava) Fie pătratul $ABCD$ de latură a și un punct variabil $M \in (BC)$. Notăm cu E intersecția dintre dreptele DM și BC , iar cu F intersecția dintre dreptele AM și CD .

a) Demonstrați că $\frac{BE}{EA} + \frac{CF}{FD} = 1$.

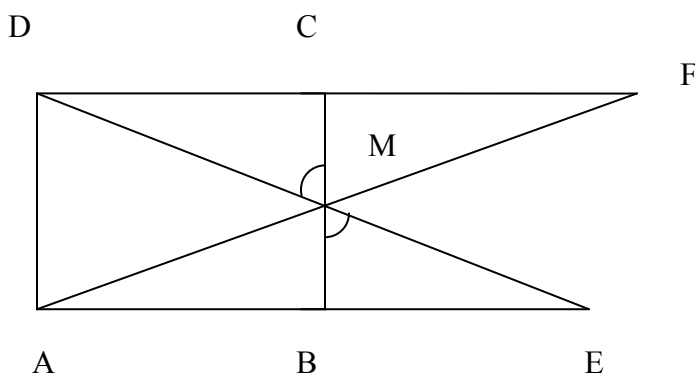
b) Demonstrați că media geometrică a lungimii bazelor trapezului $BEFC$ este egală cu lungimea laturii pătratulului $ABCD$.

c) Arătați că $S_{BEFC} \geq S_{ABCD}$.

d) Determinați poziția punctului $M \in (BC)$ astfel încât S_{BEFC} să fie maximă.

e) Dacă M este mijlocul segmentului (BC) determinați raza cercului circumscris patrulaterului $AEFD$.

Soluție:



a) Deoarece $BE \parallel DC \Rightarrow \Delta BMA \sim \Delta CMD$ și avem :

$$\frac{BE}{DC} = \frac{BM}{MC} \Leftrightarrow \frac{BE}{DC + BE} = \frac{BM}{MC + BM} \Leftrightarrow \frac{BE}{EA} = \frac{BM}{BC}.$$

Analog, $FC \parallel BA \Rightarrow \Delta CMF \sim \Delta BMA$ și rezultă $\frac{CF}{FD} = \frac{CM}{BC}$.

$x_n \leq x_0$. Arătăm că $x_n \geq 1$: dacă $x_n > 1 \Rightarrow f(x_n) > f(1) = 1$.

Fie $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, înlocuind în relația de recurență se obține ecuația $l(l+2) = 2l+1$ de unde se

obține $l = 1$.

c) $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow (y_n)_n$ crescător.

Avem $y_n > y_0 = x_0 = 2$ și $y_n \leq x_0 + \sum_{i=1}^n |x_i - 1| \leq 2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} < 3$, deci $(y_n)_n$ e convergent.

10. (Satu-Mare) Se consideră polinomul $f = x^4 - 10x^2 + 1$, numărul $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f .

a) Determinați $f(a), f(-a)$.

b) Arătați că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Dacă $g \in \mathbb{Q}[X]$ și $g(a) = 0$, arătați că restul împărțirii lui g la f este egal cu zero.

d) Se consideră polinomul $h = \frac{x^2 - 5}{2}$. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $h(x) = \sqrt{6}$.

e) Arătați că nu există nici un polinom $w \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că $w(a) = \sqrt{6}$.

Soluție :

a) Se verifică ușor faptul că $f(a) = f(-a) = 0$.

b) Presupunem prin reducere la absurd că f are o rădăcină rațională, $(\exists) \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ rezultă că $p, q \mid 1$. Se verifică faptul că ± 1 nu sunt rădăcini ale polinomului f .

Rădăcinile polinomului f sunt $a, -a, -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{3}$, deci polinomul are numai rădăcini iraționale. Dacă f ar fi reductibil în $\mathbb{Q}[X]$ ar rezulta că există $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ cu $f = g \cdot h$ cu $\text{grad}(g) = \text{grad}(h) = 2$ sau $\text{grad}(g) = 1, \text{grad}(h) = 3$ (sau celelalte relații). Dacă $\text{grad}(g) = 1$, f are o rădăcină rațională – contradicție. Dacă $\text{grad}(g) = 2$ rezultă

$f = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + u)$, prin identificarea coeficienților rezultă un sistem ce nu are soluții.

c) Fie c, r câtul și respectiv restul împărțirii lui g la f , $\text{grad}(r) < 4$ și $g = c \cdot f + r$. Din $f(a) = g(a) = 0$ rezultă $r(a) = 0$, așadar f și r au o rădăcină comună. Fie $d = (f, g)$.

$\left. \begin{array}{l} d \mid f \\ f \text{ ireductibil în } \mathbb{Q}[X] \end{array} \right\} \Rightarrow d \text{ este polinom constant (contradicție) sau } d = f.$

Dacă $d = f \Rightarrow f \mid r$, $\text{grad}(r) < \text{grad}(f) \Rightarrow r$ este polinomul nul.

$$d) h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{6} + 5 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = -a$$

e) Presupunem prin reducere la absurd că există un polinom $w \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că $w(a) = \sqrt{6}$.

$$w = c \cdot f + r \text{ cu } \text{grad}(r) < 4, w(a) = c(a)f(a) + r(a) \Rightarrow r(a) = \sqrt{6}.$$

Dacă $r = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, din $r(a) = \sqrt{6}$ obținem ecuația

$$a_0 + 5a_2 + \sqrt{2}(a_1 + 11a_3) + \sqrt{3}(a_1 + 9a_3) + \sqrt{6}(2a_2 - 1) = 0 \text{ de unde ținând cont că}$$

$a_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{0,3}$ rezultă cu necesitate :

$$\begin{cases} a_0 + 5a_2 = 0 \\ a_1 + 11a_3 = 0 \\ a_1 + 9a_3 = 0 \\ 2a_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație obținem $a_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, contradicție.

BIBLIOGRAFIE:

www.mateinfo.ro