ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI DIEUDONNÉ

Corneliu Mănescu-Avram

În lucrarea [1] Jean Dieudonné a propus următoarea problemă :

Fie u_0 arbitrar în $(0, \pi)$ şi $u_{n+1} = \sin u_n$, pentru $n = 0, 1, 2, \dots$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u_n$.

Soluţia acestei probleme este prezentată în lucrarea [2] (pag. 487). Aceeaşi metodă ne permite să obţinem următoarea generalizare :

Fie $a > 0$ şi funcţia $f : [0. a) \to [0, a)$ cu următoarele proprietăţi :

a) f este indefinit derivabilă.

b) $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'''(0) < 0$.

c) $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (0, a)$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} u_n$, unde $u_{n+1} = f(u_n)$ şi $u_0 \in (0, a)$ este arbitrar.

Se consideră cunoscută următoarea proprietate a şirurilor numerice : convergenţa îin sensul lui Cauchy implică şi convergenţa în sensul lui Cesaro către aceeaşi limită, adică

$$\text{dacă } \lim_{n\to\infty} a_n = l, \text{ atunci } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = l.$$

Şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, $0 < u_n < a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Şirul este descrescător, deoarece $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Conform teoremei lui *Weierstrass*, şirul este convergent către o limită l, astfel încât $l = f(l)$. Condiţiile din ipoteză implică $l = 0$. Aceasta este o condiţie necesară pentru ca $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} u_n$ să fie finită.

Se aplică proprietatea de convergenţă pentru şirul $a_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ şi rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n u_n^2}. \tag{1}$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{f^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right). \tag{2}$$

Pentru calculul ultimei limite folosim regula lui *l'Hospital* :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f^2(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2 = 1, \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+f'(x)\right) = 1 + f'(0) = 2, \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-f'''(x)}{6} = \frac{-f'''(0)}{6}. \qquad (5)$$

Din egalităţile (1) – (5) se deduce

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}u_n = \sqrt{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-6}{f'''(0)}} = \sqrt{\frac{-3}{f'''(0)}}.$$

Note : 1) Limita (2) pentru funcţia sinus este calculată în lucratea [2] folosind dezvoltarea în serie *Taylor* într-o vecinătate a originii.

2) Dacă $f(0) = f''(0) = 0$, o limită asemănătoare cu (5) este

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{3} = \frac{f'''(0)}{3}.$$

Pentru $f(x) = \sin x$, această limită se află în [2], pag. 398.

3) Dacă $f'(0) \neq 0$, $f''(0) = 0$ şi $f(x) < xf'(0) + f(0)$, atunci funcţia f poate fi înlocuită prin funcţia g, definită prin $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{f'(0)}$.

Bibliografie

1. Dieudonné, J., Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1962

2. (coordonator) Teodorescu, N., Probleme din *Gazeta matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com