

Radacina patrata dintr-un polinom cu coeficienti reali

ABSTRACT. Vom prezenta un amplu material , ce prezinta un algoritm de extragere a radicalului dintr-un polinom dat , ceea ce poate constitui si o generalizare a algoritmului de extragere a radicalului dintr-un numar pozitiv dat .

Materialul se adreseaza elevilor de clasa a XII a , precum si tuturor pasionatilor de matematica.

Autori : Marcu Daniela si Marcu Stefan Florin , profesori Calarasi

Fie $A \in \mathbf{R}[X]$. Cautam un polinom $B \in \mathbf{R}[X]$ astfel incat $B^2 = A$. Daca acesta exista il vom numi radacina patrata a lui A si vom spune ca A este patrat perfect.

Operatia o vom numi extragerea radacinii patrata a lui A .

Extragerea poate fi facuta dupa puterile crescatoare sau descrescatoare ale lui X din A .

Apar 2 cazuri:

I) Extragerea radacinii dupa puterile descrescatoare ale lui X :

Fie $A = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n$.

Cautam un polinom $B \in \mathbf{R}[X]$ astfel incat $B^2 = A$ de forma:

$B = a + b + c + \dots + k + l$, unde a, b, c, \dots reprezinta termenii consecutivi ai lui B avand gradele descrescatoare ($\text{gr } a > \text{gr } b > \text{gr } c > \dots$)

Avem $(a + b + c + \dots + k + l)^2 = A$

Notam $b + c + \dots + k + l = y \Rightarrow \text{gr } y = \text{gr } b < \text{gr } a$

Deci $(a + y)^2 = A \Leftrightarrow a^2 + 2ay + y^2 = A = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_n$.

Termenii de grad maxim din cele doua polinoame trebuie sa fie identici. Deci $a^2 = A_0 X^n$.

Luam $a = a_0 X^p \Rightarrow a^2 X^{2p} = A_0 X^n \Rightarrow a^2 = A_0$ și $2p = n$. Deci, în mod necesar gradul lui A este un număr par și gradul rădăcinii B va fi $p = \frac{n}{2}$

Dacă $A_0 < 0$, problema nu are soluții.

Dacă $A_0 > 0$, atunci $a_0 = \pm \sqrt{A_0}$. În acest caz vom avea soluții ale problemei două polinoame egale și de semne contrare B și $-B$. Evident, dacă există $B \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $B^2 = A$, atunci există și $-B \in \mathbf{R}[X]$ cu $B^2 = A$.

Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate continuă în felul următor :

-Considerăm primul rest parțial $R_1 = A - a^2 = 2ay + y^2 = y(2a + y)$, $\text{gr } R_1 < \text{gr } A$.

Deoarece $\text{gr } a > \text{gr } y$, termenul de grad maxim din $2ay + y^2$ este $2ab$ și va fi identic cu termenul de grad maxim din R_1 .

-Al doilea termen al rădăcinii pătrate se va obține împărțind termenul de grad maxim din R_1 la dublul primului termen găsit al rădăcinii pătrate $2a$.

-în continuare, presupunem că am găsit un număr oarecare de termeni ai rădăcinii pătrate B și fie $u = a + b + \dots$ suma acestor termeni. Vom nota cu v suma restului de termeni ai rădăcinii pătrate ce trebuie determinați.

Avem $A = (u + v)^2$ și vom nota cu $R_k = A - u^2$. Vrem să aflăm primul termen al sumei necunoscute v . Știm că $R_k = (u + v)^2 - u^2 = 2uv + v^2 = v(2u + v)$, $\text{gr } u > \text{gr } v$.

Termenul din membrul al doilea al egalității de mai sus care conține cea mai mare putere a lui X este provenit din $2uv$ și se obține prin înmulțirea cu $2a$ a primului termen necunoscut din v (care este de grad maxim în v). Dacă notăm cu g primul termen din v , atunci termenul căutat este $2ag$ și el este egal cu primul termen din R_k . Deci termenul necunoscut g se obține prin împărțirea primului termen din restul parțial R_k la $2a$ (dublul primului termen al rădăcinii).

-Cand se incheie acest algoritm ? Dupa ce am gasit termenul g , consideram urmatorul rest partial , fie acesta $R_k = A - (u+g)^2$ (deoarece suma termenilor cunoscuti este acum $u + g$) .

$$\text{Avem } R_k = R_h + u^2 - (u+g)^2 = R_h - g(2u + g)$$

Cel mai mare termen din polinomul $g(2u + g)$ este $2ag$ si se va reduce cu primul termen din R_h , deci $\text{gr } R_k < \text{gr } R_h$. Deci gradele resturilor scad succesiv , iar algoritmul se va incheia atunci cand vom ajunge la un rest partial avand gradul $< p = \frac{n}{2}$ (deoarece nu se mai poate efectua impartirea la $2a$ pentru ca $\text{gr } 2a = \text{gr}$

$a = p$)

Algoritmul general de extragere a „radicalului” dintr-un polinom cu coeficienti reali poate fi exprimat in felul urmator :

- 1) Extragem radacina patrata din primul termen al radacinii patrata B (care poate fi luat cu $+$ sau $-$)
- 2) Scadem din A patratur acestui prim termen (care este de fapt primul termen din A) si impartim primul termen al acestuia la dublul primului termen din B , obtinand al doilea termen al lui B .
- 3) Calculam suma primilor doi termeni astfel gasiti la patrat si o scadem din A , obtinand astfel un nou rest , si impartim din nou primului termen al acestui rest la dublul primului termen al radacinii B .
- 4) Daca am gasit un numar oarecare de termeni ai radacinii , atunci pentru a afla urmatorul termen scadem din A patratur sumei termenilor cunoscuti si impartim primul termen al acestei diferente la $2a$.
- 5) Algoritmul se va incheia atunci cand fie obtinem restul egal cu 0 (si in acest caz polinomul A este patrat perfect) , fie restul are gradul $< p$ (care este gradul radacinii radacinii B) si scriem $A = B^2 + R$ cu $\text{gr } A = 2p$, $\text{gr } B = p$, $\text{gr } R < p$.

Observatie : algoritmul poate fi exprimat si in alt mod :in momentul cand am obtinut un rest oarecare , daca notam cu u suma termenilor deja cunoscuti si cu g primul termen nou aflat (prin impartire...), atunci pentru a afla urmatorul rest partial scadem din vechiul rest produsul $g(2u+g)$.

Unicitatea radacinii patrata

Fiind dat un polinom $A \in \mathbf{R}[X]$ de grad $2p$, exista doua polinoame B si $-B$ de grad p astfel incat diferenta $A - B^2$ sa fie un polinom de grad mai mic decat p . Existenta a fost dovedita prin algoritmul prezentat anterior . Prin reducere la absurd, sa presupunem ca ar exista doua polinoame B si C cu proprietatile de mai sus.

Fie $A = B^2 + R$ si $A = C^2 + S$, unde $\text{gr } B = \text{gr } C = p$ si $\text{gr } S, \text{gr } R < p$. Atunci avem $B^2 - C^2 = S - R \Leftrightarrow (B-C)(B+C) = S - R$

Fie a si a' primii termeni din polinoamele B respectiv C (avand grad maxim) $\Rightarrow a^2 = (a')^2 =$ primul termen al lui $A \Rightarrow a = \pm a' \Rightarrow$ primii termeni din B si C sunt egali sau de semne contrare si in acest caz putem schimba C cu $-C$ fara a restrange generalitatea problemei. Avem $\text{gr}(B-C) < p$ si $\text{gr}(B+C) = p \Rightarrow \text{gr}(B-C)(B+C) \geq p$, iar $\text{gr}(S-R) < p$. Contradictie. Deci $B=C$ sau $B = -C$.

Aplicatie

- Sa se stabileasca daca polinomul $A = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ este patrat perfect.
- Sa se gaseasca conditiile pentru care un polinom de gradul 4 , $A \in \mathbf{R}[X]$ de forma

$A = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ sa fie patrat perfect.

Solutie

- Vom extrage radacina patrata din A .

1) Scoatem radacina din primul termen al lui A si obtinem primul termen al radacinii patrate care va fi X^2 .

$$2) R_1 = A - (X^2)^2 = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

3) impartim primul termen din R_1 la dublul primului termen gasit care este $2X^2$ si obtinem al doilea termen al radacinii care va fi X .

$$4) R_2 = A - (X^2 + X)^2 = 2X^2 + 2X + 1$$

5) Impartim $2X^2$ la $2X^2$ si obtinem al treilea termen al radacinii patrate care va fi 1

$$6) R_3 = A - (X^2 + X + 1)^2 = 0$$

In acest moment algoritmul este incheiat si $A = (X^2 + X + 1)^2$.

b) evident avem $a > 0$ si extragem radacina patrata.

1) Primul termen este $\sqrt{a} X^2$

$$2) R_1 = A - aX^4 = bX^3 + cX^2 + dX + e$$

3) impartim bX^3 la $2\sqrt{a} X^2$ si obtinem al doilea termen egal cu $\frac{b}{2\sqrt{a}} X$

$$4) R_2 = A - \left(\sqrt{a} X^2 + \frac{b}{2\sqrt{a}} X\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a} X^2 + dx + e \text{ si notam } \Delta = 4ac - b^2$$

5) impartim $\frac{\Delta}{4a} X^2$ la $2\sqrt{a} X^2$ si obtinem al treilea termen egal cu $\frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}$

$$6) R_3 = R_2 - \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}} \left(2\sqrt{a} X^2 + \frac{b}{\sqrt{a}} X + \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\right) = \left(d - \frac{b\Delta}{8a^2}\right) X + \left(e - \frac{\Delta^2}{64a^3}\right) \Rightarrow$$

Conditile care trebuie indeplinite pentru a avea un patrat perfect sunt :

$$d = \frac{b\Delta}{8a^2} \text{ si } e = \frac{\Delta^2}{64a^3} \quad (*)$$

In aceste conditii avem : $A = \left(\sqrt{a} X^2 + \frac{b}{2\sqrt{a}} X + \frac{\Delta}{8a\sqrt{a}}\right)^2$

Observatie : Se putea lucra doar in cazul real si atunci se impun doar conditiile

(*)

Problema este interesanta in sensul urmator :

Fiind dat polinomul $aX^4 + bX^3 + cX^2$, sa se completeze la un patrat perfect.
Putem construi diverse patrute perfecte cunoscand doar primii trei coeficienti.
Pentru $a=1$, $b=2$, $c=3$ avem $d=2$ si $e=1$, obtinand polinomul de la punctul a).

II) Extragerea radacinii dupa puterile crescatoare ale lui X

Consideram polinomul :

$A = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$ si vom presupune $a_0 > 0$ (pentru ca problema sa aiba solutii), iar $\text{gr } A = 2p$ numar par.

Observatie : In aceste conditii polinomul A nu este divizibil cu X . Cautam polinomul

$B = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots \in \mathbf{R}[X]$ astfel incat $B^2 = A$. Evident $b_0^2 = a_0 \Rightarrow b_0 = \pm \sqrt{a_0}$.

Deci problema poate avea doua solutii .

Cautam $R_1 = A - (b_0)^2 \Rightarrow R_1$ este divizibil cu X , deci poate fi scris sub forma

$R_1 = XS_1$, unde $S_1 \in \mathbf{R}[X]$, $\text{gr } S_1 = 2p-1$

Notam cu y partea necunoscuta a radacinii . Atunci $B = b_0 + y$ si y este un polinom divizibil cu X .

Avem $A = (b_0 + y)^2$ si $R_1 = (b_0 + y)^2 - (b_0)^2 = 2b_0y + y^2$

Termenul de grad cel mai mic din membrul al doilea este provenit din $2b_0y$ si este egal cu $2b_0b_1X$. Deci termenul al doilea al radacinii se va obtine impartind primul termen din R_1 la $2b_0 \Rightarrow R_2 = X^2S_2$, $\text{gr } S_2 = 2p-2$

Rationand ca in primul caz, daca se cunoaste un numar oarecare de termeni ai radacinii , calculam suma lor , dupa care scadem din polinomul dat A patratul acestei sume si obtinem un rest partial , dupa care impartim primul termen al acestui rest la $2b_0$ si gasim urmatorul termen al radacinii.

$R_{k+1} = A - (b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_kX^k)^2$ si $R_{k+1} = X^{k+1}S_{k+1}$, unde $S_{k+1} \in \mathbf{R}[X]$, $\text{gr } S_{k+1} = 2p-h-1$

Deci polinomul A poate fi scris sub forma :

$$A = (b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k)^2 + X^{k+1} S_{k+1}$$

Observatie

Daca A este patrat perfect atunci vom obtine un rest nul. Daca luam gr $A=2p$ atunci pentru ca A sa fie patrat perfect trebuie ca $R_{p+1}=0$ si atunci $A=($

$$b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_p X^p)^2 .$$

In caz contrar operatia este imposibila si poate continua indefinit (gr $S_{p+1}=p-1$)

Denumim polinomul $B_k = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k$ ca radacina patrata aproximativa sau exacta a lui A dupa cum restul R_{k+1} este nenul sau nul.

Unicitatea radacinii patrate

Fiind dat un polinom $A \in \mathbf{R}[X]$ se pot gasi doua polinoame egale si de semne contrare B si $-B$ de grad k astfel incat diferenta $A-B^2$ sa fie divizibila cu X^{k+1} .

Solutie

Existenta a fost deja demonstrata , mai ramane sa aratam unicitatea. Fie B si C doua polinoame de grad k astfel incat: $A = B^2 + X^{k+1} S$ si $A = C^2 + X^{k+1} T$

Datorita identitatilor de mai sus patratele termenilor liberi din cele doua polinoame B si C

trebuie sa fie egali. Sa presupunem fara a restrange generakitatea ca termenii liberi sunt egali (altfel inlocuim C cu $-C$). Obtinem ca $(B-C)(B+C) = X^{k+1} (T-S)$

(*)

Avem ca B-C este divizibil cu X , dar B-C nu este divizibil cu X^{k+1} deoarece aceasta diferenta are gradul cel mult k. Daca consideram $B =$

$$b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k \quad \text{si}$$

$$C = b_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_k X^k \quad \text{si presupunand ca } b_1 \neq c_1 \Rightarrow B-C = X[(b_1 - c_1) + \dots]$$

Inlocuind in (*) si simplificand cu X obtinem : $[(b_1 - c_1) + \dots](B+C) = X^k (T-S)$.

Pentru $X=0 \Rightarrow b_1 - c_1=0$, deci $b_1 = c_1$, altfel avem o contradicție. Continuând acest procedeu obținem ca $B=C$.

Exemplul 1

Fie $A = 1 + 6X + 11X^2 + 6X^3 + X^4$.

Dorim să vedem dacă A este pătratul unui polinom de gradul 2 și să aflăm rădăcina pătrată. Evident, primul termen al rădăcinii va fi ± 1 (să-l considerăm egal cu $+1$)

$$R_1 = A - 1 = 6X + 11X^2 + 6X^3 + X^4$$

Împărțind $6X$ la 2 obținem al doilea termen al rădăcinii egal cu $3X$.

$$R_2 = A - (1 + 3X)^2 = 2X^2 + 6X^3 + X^4$$

Împărțind $2X^2$ la 2 obținem al treilea termen al rădăcinii egal cu X^2 .

$$R_3 = A - (1 + 3X + X^2)^2 = 0 \text{ și algoritmul este încheiat, iar } A \text{ este pătrat perfect.}$$

Exemplul 2

Fie $A = 1 + 2X + 4X^2 + 3X^3 + X^4$

Avem $\text{gr } A = 2p \Rightarrow p=2$, deci algoritmul se poate opri când calculăm $R_{p+1} = R_3$

1) Primul termen al rădăcinii va fi $+1$ sau -1

$$2) R_1 = A - 1 = 2X + 4X^2 + 3X^3 + X^4$$

3) $2X$: $2=X$ va fi al doilea termen al rădăcinii

$$4) R_2 = A - (1 + X)^2 = 3X^2 + 3X^3 + X^4$$

5) $3X^2 : 2 = \frac{3}{2} X^2$ va fi al treilea termen al rădăcinii și practic ultimul termen.

6) $R_3 = A - (1 + X + \frac{3}{2} X^2)^2 = -\frac{5}{4} X^4 \neq 0$ și, iar A nu poate fi pătrat perfect.

Observație

Daca consideram un polinom A patrat perfect si calculam radacina sa patrata conform algoritmului anterior prezentat, notata simbolic cu \sqrt{A} , atunci pentru diferite valori numerice date lui x se va obtine radicalul „aritmetic” dintr-un numar real.

Exemplu: Luam $A = 1 + 2X + 3X^2 + 2X^3 + X^4$ si calculam $\sqrt{A} = 1 + X + X^2$.

Daca atasam acestor polinoame functiile polinomiale corespunzatoare si luam de exemplu $x=10$, atunci $A(10)=12321$ si $\sqrt{A}(10)=111$

Aplicatii

1) In ce conditii polinomul de doua variabile cu coeficienti reali

$$A = aX^2 + 2bXY + cY^2 \text{ este patrat perfect ?}$$

Se impun conditiile evidente $a, c > 0$

Folosind algoritmul de extragere a radacini patrute (privind polinomul in nedeterminata X cu parametrul Y) si impunand conditia ca ultimul rest partial sa fie 0 obtinem conditia $b^2 = ac$ sau $b = \pm \sqrt{ac}$ si $A = (\sqrt{a}X \pm \sqrt{c}Y)^2$

2) In ce conditii polinomul de forma $A = aX^2 + 2bXY + cY^2 - S(X^2 + Y^2)$ este patrat perfect ?

Observatie : Daca $S=0$ obtinem 1)

Ordonand polinomul A dupa puterile descrescatoare ale lui X avem

$$A = (a-S)X^2 + 2bxy + (c-S)Y^2$$

Conform cu 1) avem $a-S > 0$, $c-S > 0 \Rightarrow S < \min(a, c)$

Deasemeni, S va fi solutia ecuatiei $b^2 = (a-S)(c-S) \Leftrightarrow S^2 - (a+c)S + ac - b^2 = 0$

Avem $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$, deci vom avea doua valori reale distincte ale lui S care indeplinesc conditia ceruta. Fie ele S_1 si S_2 ($S_1 < S_2$)

Daca notam $f(S) = S^2 - (a+c)S + ac - b^2$ si observam ca $f(a) = -b^2 < 0$ si $f(c) = -b^2 < 0$, iar $f(S) < 0$ pe intervalul $(S_1, S_2) \Rightarrow a, c \in (S_1, S_2)$, iar valoarea buna pentru S este S_1 deoarece este mai mica decat $\min(a, c)$.

Daca notam cu $R(X,Y)$ radacina patrata obtinuta in conditiile de mai sus , atunci avem scrierea :

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = S(X^2 + Y^2) + R^2(X,Y) (*)$$

$$\text{Practic , } R(X,Y) = \sqrt{a-S} X + \sqrt{c-S} Y$$

Un caz special este atunci cand $a=c$. In acest caz obtinem $S=a \pm b$.

Daca luam $S= a+b$, atunci este obligatoriu ca $b < 0$ si obtinem $A=-b(X-Y)^2$ si

$$R(X,Y) = \sqrt{-b} (X+Y)$$

Daca luam $S= a-b$, atunci $b > 0$, $A=-b(X+Y)^2$ si $R(X,Y) = \sqrt{b} (X+Y)$

Observatie :

Practic scrierea (*) reprezinta un mod de a scrie un polinom omogen de gradul 2 cu doua necunoscute ca sume sau diferente de patrute de polinoame si poate fi utila in demonstrarea unor inegalitati sau in probleme de maxim si minim.

Exemplu:

Fie polinomul $2X^2 + 3XY + 2Y^2$.Dorim sa-l scriem sub forma (*)

Avem $a=c=2$ si $b=\frac{3}{2} \Rightarrow S=\frac{7}{2}$ sau $S=\frac{1}{2}$, iar solutia buna este a doua, $S=\frac{1}{2}$.

Atunci $R(X,Y) = \sqrt{\frac{3}{2}} (X+Y)$ si

$$2X^2 + 3XY + 2Y^2 = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) + \frac{3}{2} (X+Y)^2 \text{ sau}$$

$$2X^2 + 3XY + 2Y^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} X\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} Y\right)^2 + \left[\sqrt{\frac{3}{2}} (X+Y)\right]^2$$

Observatie:

Acest tip de probleme poate fi extins la polinoame omogene de grad 2 cu 3 nedeterminate de forma : $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eXZ + 2fYZ$

Se poate arata ca daca $a, b, c > 0$, atunci polinomul de mai sus este un patrat perfect daca coeficientii d, e, f reprezinta mediile geometrice ale lui (a,b) , (a,c) , respectiv (b,c) .

Bibliografie : Cours D'Algebre , Paris 1924 .

Par B. Niewenglowski .