PROBLEME PENTRU CONCURSURI (II)

Corneliu Mănescu-Avram

1. Să se arate că pentru orice număr raţional x există cel puţin un număr raţional y astfel încât să fie adevărată egalitatea

$$6(x^5 + y^5) - 15(x^4 + y^4) + 10(x^3 + y^3) - 1 = 0.$$

Soluţie : Verificăm că perechea $(x, 1 - x)$, $x \in \mathbb{Q}$, satisface egalitatea dată. Într-adevăr, fie $p =$

$= xy$. Din $x + y = 1$, deducem $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2p$, $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) =$
$= 1 - 3p$, $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (1 - 2p)^2 - 2p^2 = 1 - 4p + 2p^2$, $x^5 + y^5 =$
$= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = (1 - 2p)(1 - 3p) - p^2 = 1 - 5p + 5p^2$. Rezultă identitatea

$$6(1 - 5p + 5p^2) - 15(1 - 4p + 2p^2) + 10(1 - 3p) - 1 = 0.$$

2. Să se găsească bazele sistemelor de numeraţie în care

a) numărul 671 se divide cu 176 ;

b) numărul 781 se divide cu 187.

Soluţie : a) Fie x baza sistemului se numeraţie căutat. Avem că $6x^2 + 7x + 1 = (x + 1)(6x + 1)$ se divide cu $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$, deci $6x + 1$ se divide cu $x + 6$. Orice divizor comun al numerelor $6x + 1$ şi $x + 6$ este divizor şi al numărului $6(x + 6) - (6x + 1) = 35 = 5 \cdot 7$. Evident însă $x > 1$, deci singura soluţie convenabilă se obţine din $x + 6 = 35$, deci $x = 29$.

b) Asemănător, $7x^2 + 8x + 1 = (x + 1)(7x + 1)$ se divide cu $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$, deci $7x + 1$ se divide cu $x + 7$. Dar $7(x + 7) - (7x + 1) = 48 = 2^4 \cdot 3$ şi mulţimea divizorilor lui 48 este $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Rezultă $x + 7 \in D_{48}$, cu soluţiile convenabile $x \in \{9, 17, 41\}$.

3. Să se demonstreze că orice număr compus n, care nu este pătratul unui număr prim, are cel puţin un divizor prim $p \leq \sqrt{n+1} - 1$.

Soluţie : Dacă numărul n este compus şi nu este pătratul unui număr prim, atunci el are cel puţin doi divizori primi distincţi p, q, $p < q$ şi $p(p + 2) \leq pq \leq n$, deci $p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2 \leq n + 1$, de unde $p + 1 \leq \sqrt{n+1}$ şi se obţine inegalitatea din enunţ.

4. Fie $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$, $n, k \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească toate valorile lui k pentru care este adevărată următoarea identitate : $2S_{2k+1} + (k - 1)S_{2k-1} = (k + 1)S_k^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie : Pentru $n = 1$ obţinem $2 + k - 1 = k + 1$.

Pentru $n = 2$ obţinem

$$2(1 + 2^{2k+1}) + (k - 1)(1 + 2^{2k-1}) = (k + 1)(1 + 2^k)^2,$$

care este echivalentă cu $2^{k-2}(5 - k) = k + 1$, deci $k \in \{1, 2, 3\}$ este o condiţie necesară.

Această condiţie este şi suficientă :

$$S_3 = S_1^2,\ 2S_5 + S_3 = 3S_2^2,\ S_7 + S_5 = 2S_3^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Egalităţile de mai sus pot fi demonstrate prin inducţie sau se pot folosi identităţile :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},\ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,\ S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_7 = \frac{n^2(n+1)^2\left[3n^2(n+1)^2-2(2n^2+2n-1)\right]}{24}.$$

5. Să se arate că polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-3}X^3 + a_n$, unde $n \geq 4$ şi $a_n \neq 0$, nu are numai rădăcini reale.

Soluţie : Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ rădăcinile lui f, care sunt nenule, deoarece $a_n \neq 0$. Polinomul $g(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right)$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$. Dar $g(X) = a_nX^n + a_{n-3}X^{n-3} + ... + 1$, deci

$$\frac{1}{x_1^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} = \left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}x_n}\right) = 0.$$

Suma pătratelor unor numere reale nenule este un număr real strict pozitiv, deci rădăcinile lui f nu sunt toate reale.

6. Să se găsească rădăcinile reale ale polinomului

$$f = (X^2 - X + 1)^4 + (X^2 - X + 2)^4 - (X^2 + X + 2)^4 - \left(\frac{1}{2}X^2 - X - 1\right)^4.$$

Soluţie : Următoarele egalităţi sunt adevărate

$$X^2 - X + 1 - \frac{1}{2}X^2 + X + 1 = \frac{1}{2}X^2 + 2,$$

$$X^2 - X + 1 + \frac{1}{2}X^2 - X - 1 = \frac{3}{2}X^2 - 2X,$$

$(X^2 - X + 1)^2 + (\frac{1}{2}X^2 - X - 1)^2 = \frac{5}{4}X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 2,$

$X^2 - X + 2 - X^2 - X - 2 = -2X,$

$X^2 - X + 2 + X^2 + X + 2 = 2(X^2 + 2),$

$(X^2 - X + 2)^2 + (X^2 + X + 2)^2 = 2(X^2 + 1)(X^2 + 4).$

Rezultă descompunerea

$f = X(X^2 + 4)[\frac{1}{4}(3X - 4)(\frac{5}{4}X^4 - 3X^3 + 3X^2 + 2) - 8(X^4 + 3X^2 + 2)] =$

$= \frac{1}{16}X(X^2 + 4)(X - 12)[14X^4 + (X^2 - 2)^2 + 32X^2 + 24]$

Deducem că singurele rădăcini reale ale lui f sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 12$.

Comentariu. Din $f(12) = 0$ se obţine egalitatea $133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{103}$ ecuaţia $x^4 + x^2 + \hat{1} = \hat{0}$.

Soluţie : Folosim descompunerea

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Fie x o rădăcină în $\mathbb{Z}_{103}$ a polinomului $X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_{103}[X]$. Celelalte soluţii ale ecuaţiei date sunt $\hat{1} + x$, $-x$, $-\hat{1} - x$. Acestea sunt toate soluţiile, deoarece 103 este număr prim, deci $\mathbb{Z}_{103}$ este corp, astfel că ecuaţia dată, fiind de gradul 4, are cel mult 4 soluţii. Dar $103 = 10^2 + 3$ şi $x^2 + x + \hat{1} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_{103}$, deci $(\hat{2}x + \hat{1})^2 + \hat{3} = \hat{0}$, de unde $\hat{2}x + \hat{1} = \widehat{10}$, aşadar $x = \widehat{56}$ (am folosit faptul că inversul lui $\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_p$ este $\widehat{\frac{p+1}{2}}$). Soluţiile ecuaţiei date sunt $\{\widehat{46}, \widehat{47}, \widehat{56}, \widehat{57}\}$.

Comentariu. Metoda se aplică modulo orice număr prim p astfel încât $p - 3$ este pătrat perfect. Dacă $p = n^2 + 3$ (n par), atunci soluţiile în $\mathbb{Z}_p$ ale ecuaţiei date sunt

$$\widehat{\frac{n(n-1)}{2} + 1},\ \widehat{\frac{n(n-1)}{2} + 2},\ \widehat{\frac{n(n+1)}{2} + 1},\ \widehat{\frac{n(n+1)}{2} + 2}.$$

8. Fie P = X(X + 1)(X + 2) ... (X + 15) şi $S_k = X^k + (X+1)^k + (X+2)^k + \ldots + (X+15)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $P + (12S_4 - 1700S_2 + 416704)^2$ este pătratul unui polinom cu coeficienţi întregi.

Soluţie : Avem

$S_2 = 16X^2 + 240X + 1240$,

$S_4 = 16X^4 + 480X^3 + 7440X^2 + 57600X + 178312$.

Considerăm polinoamele

$u = (X + 1)(X + 2)(X + 4)(X + 7)(X + 8)(X + 11)(X + 13)(X + 14)$,

$v = X(X + 3)(X + 5)(X + 6)(X + 9)(X + 10)(X + 12)(X + 15)$.

Este adevărată egalitatea $P = uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$, deci este suficient să arătăm că

$$\frac{u-v}{2} = 12S_4 - 1700s_2 + 416704. \qquad (1)$$

Cu notaţia $Y = X^2 + 15X$, grupând factorii egal depărtaţi de extreme, se obţine

$u = (Y + 14)(Y + 26)(Y + 44)(Y + 56) = Y^4 + 140Y^3 + 6828Y^2 + 134960Y + 896896$,

$v = Y(Y + 36)(Y + 50)(Y + 54) = Y^4 + 140Y^3 + 6444Y^2 + 97200Y$,

de unde

$$\frac{u-v}{2} = 192Y^2 + 18880Y + 448448 = 192X^2(X + 15)^2 + 18880X(X + 15) + 448448 =$$

$$= 192X^4 + 5760X^3 + 62080X^2 + 283200X + 448448. \qquad (2)$$

Avem şi

$12S_4 - 1700S_2 + 416704 = 12(16X^4 + 480X^3 + 7440X^2 + 57600X + 178312) -$
$-1700(16X^2 + 240X + 1240) + 416704 = 192X^4 + 5760X^3 + 62080X^2 + 283200X + 448448$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă (1). Se observă că

$$\frac{u+v}{2} = Y^4 + 140Y^3 + 6636Y^2 + 116080Y + 448448 =$$

$$= (X^2 + 15X)^4 + 140(X^2 + 15X)^3 + 6636(X^2 + 15X)^2 + 116080(X^2 + 15X) + 448448$$

are coeficienţi întregi, ceea ce încheie demonstraţia.

9. Care este valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin 2x - \sin x|$?

Soluţie : Funcţia este periodică cu perioada 2π, deci este suficient s-o studiem pe intervalul $[0, 2\pi]$. Pe de altă parte, $f(2\pi - x) = f(x)$, deci ne putem restrânge la intervalul $[0, \pi]$. Pe acest interval $\sin x \geq 0$, deci $f(x) = \sin x\,|2\cos x - 1|$, aşadar

$$f(x) = \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1), & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ \sin x(-2\cos x + 1), & \text{dacă } x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], \end{cases}$$

de unde

$$f'(x) = \begin{cases} 4\cos^2 x - \cos x - 2, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ -4\cos^2 x + \cos x + 2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right). \end{cases}$$

Derivata se anulează pentru $\cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$.

Pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ avem $\cos x \geq \frac{1}{2}$, deci $\cos x_0 = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, unde x_0 este un punct de maxim.

Valoarea maximă corespunzătoare este $\dfrac{5\sqrt{3}}{16}\sqrt{\dfrac{15-\sqrt{33}}{7+\sqrt{33}}}$.

Pe intervalul $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, avem $\cos x \leq \frac{1}{2}$, deci $\cos x_1 = \dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$ şi x_1 este de asemenea un punct de maxim. Valoarea maximă corespunzătoare este $\dfrac{5\sqrt{3}}{16}\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{33}}{7-\sqrt{33}}}$ şi ea este mai mare decât cea precedentă, deci aceasta este valoarea maximă absolută.

10. Să se aproximeze cu o eroare de 10^{-3} numărul $\sqrt[4]{n^4 + n^3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 94$.

Soluţie : Vom demonstra inegalităţile

$$\frac{249}{1000} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 94.$$

Adunăm n şi ridicăm la puterea a patra. A doua inegalitate este evidentă, după reducerea termenilor asemenea.

Pentru a demonstra prima inegalitate, arătăm că funcţia $f : [4, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^3} - x$ este crescătoare şi verificăm prin calcul că $f(94) > 0{,}249$. Într-adevăr,

$$f'(x) = \frac{4x+3}{4\sqrt[4]{x(x+1)^3}} - 1$$

şi vom arăta că ea este pozitivă pe intervalul $[4, \infty)$. După eliminarea radicalului şi reducerea termenilor asemenea, obţinem inegalitatea $96x^2 - 336x - 175 > 0$, care este adevărată pentru $x \geq 4$.

Rezultă că $\sqrt[4]{n^4+n^3} = n + 0{,}249...$, dacă $n \geq 94$.

11. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, polinomul $f = X^n - nX + 1$ are două rădăcini pozitive x_n, y_n astfel încât $0 < x_n < 1 < y_n$ şi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} nx_n$ şi $\lim_{n\to\infty} n(y_n - 1)$.

Soluţie : Din $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 2 - n < 0$, ţinând cont de faptul că funcţia polinomială asociată lui f este continuă, rezultă că există $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_n) = f(y_n) = 0$ şi $0 < x_n < 1 < y_n$.

Avem

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} > 0,\ f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)^n} - \frac{1}{n-1} < 0$$

şi $f'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$ pe $(0, 1)$, deci f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$, astfel că x_n este unic, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$, prin urmare $(x_n)_{n\geq 3}$ este un şir convergent şi $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Pe de altă parte, $f(\sqrt[n]{n}) = n - n\sqrt[n]{n} + 1 < 0$, deoarece $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, pentru orice $n \geq 3$. Rezultă că $y_n > \sqrt[n]{n}$ şi y_n este unic, deoarece f' este strict pozitivă pe intervalul $(1, \infty)$, astfel că f este strict crescătoare pe acest interval. Avem şi $\lim_{n\to\infty} n(y_n - 1) \geq \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) =$ $= \lim_{x\to 0, x>0} \frac{x^{-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} x^{-x}(-\ln x - 1) = \infty$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} n(y_n - 1) = \infty$.

Pentru calculul limitelor de mai sus am folosit regula lui *l'Hospital*.

12. Să se determine a minim şi b maxim astfel ca inegalitatea

$$\frac{x}{ax+1} \leq \ln(1+x) \leq \frac{x}{bx+1}$$

să fie adevărată pentru orice $x \geq 0$.

Soluţie : Se studiază funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$ şi în mod evident a şi b sunt respectiv marginea superioară şi marginea inferioară a mulţimii valorilor funcţiei.

Avem

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} < 0, \ \forall x > 0. \tag{1}$$

Într-adevăr, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\ln x \le \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), \ \forall x \ge 1, \tag{2}$$

inegalitate care se obţine din cea precedentă prin transformări elementare, extragerea rădăcinii pătrate şi substituţia $x + 1 \to x^2$. Funcţia $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, este derivabilă pe intervalul $[1, \infty)$ şi derivata ei este negativă, $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{2x^2} \le 0, \ \forall x \ge 1$,

deci g este descrescătoare, $g(x) \le g(1) = 0$, astfel că (2) este adevărată, deci şi (1) este adevărată.

Funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, deci

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) \le f(x) \le \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = a.$$

Avem evident $b = 0$ şi

$$a = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \lim_{x\to 0, x>0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2x} = \frac{1}{2},$$

unde cea de-a doua limită a fost calculată cu regula lui *l'Hospital*.

În concluzie,

$$\frac{x}{\frac{1}{2}x+1} \le \ln(1 + x) \le x, \ \forall x \ge 0.$$

13. Să se găsească limita şirului cu termenul general

$$a_n = n - \frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1}.$$

Soluţie : Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ are derivate de orice ordin. Dacă există $\lim_{x\to 0} f(x)$, atunci există şi $\lim_{n\to\infty} a_n$, deoarece $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$. Aplicăm de două ori regula lui *l'Hospital* :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{2},$$

aşadar $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Comentarii. a) Asemănător putem demonstra că $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln a} - \frac{1}{\sqrt[n]{a} - 1}\right) = \frac{1}{2}$, pentru orice $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

b) Egalitatea din enunţ poate fi scrisă sub forma $e = \left(1 + \frac{1}{n - a_n}\right)^n$, de unde rezultă $a_n > 0$ şi $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

c) Mai general, dacă f este o funcţie reală de două ori derivabilă şi $f'(0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{xf'(0)} - \frac{1}{f(x) - f(0)}\right) = \frac{f''(0)}{2[f'(0)]^2}.$$

14. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia : $\sin\frac{\pi x}{12} = \frac{\sqrt{x-1}}{2}$.

Soluţie : Avem evident $x - 1 \geq 0$, deci $x \geq 1$ şi $\frac{\sqrt{x-1}}{2} \leq 1$, de unde $x \leq 5$. Vom studia funcţia $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin\frac{\pi x}{12} - \frac{\sqrt{x-1}}{2}$. Funcţia are derivate de orice ordin pe intervalul $(1, 5)$ şi se anulează pentru $x \in \{2, 3, 4\}$. Vom arăta că funcţia f nu mai are alte zerouri pe $[1, 5]$. Se verifică simplu că 1 şi 5 nu sunt zerouri pentru funcţia f, deci rămâne să căutăm zerourile pe $(1, 5)$. Dacă funcţia f are cel puţin patru zerouri pe intervalul $(1, 5)$, atunci, conf orm teoremei lui *Rolle*, f' are cel puţin trei zerouri, f'' are cel puţin două zerouri şi f''' are cel puţin un zero. Dar

$$f'''(x) = -\left(\frac{\pi}{12}\right)^3 \cos\frac{\pi x}{12} - \frac{3}{16\sqrt{(x-1)^5}} < 0,$$

$\forall x \in (1, 5)$, contradicţie. Rezultă că ecuaţia dată are numai soluţiile $x \in \{2, 3, 4\}$.

15. Să se determine funcţiile polinomiale cu proprietatea că

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'\left(\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}\right), \forall a, b \in \mathbb{R}_+ .$$

Soluţie : Dacă f este o funcţie polinomială de grad cel mult 3, $f = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, cu $a_1 = 0$, atunci $f(b) - f(a) = (b - a)[a_0(a^2 + ab + b^2) + a_2]$ şi $f'(x) = 3a_0x^2 + a_2$, deci

$$f'\left(\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}\right) = a_0(a^2 + ab + b^2) + a_2 ,$$

astfel că egalitatea din enunţ este adevărată.

Reciproc, dacă egalitatea din enunţ este adevărată pentru o funcţie polinomială de grad $n \geq 3$, $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + .. + a_{n-1} , x > 0,$$

$$f'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = na_0\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} + (n-1)a_1\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} + ... + a_{n-1} , x \geq 0$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, se obţine $3^{n-1} = n^2$, astfel că $n = 3$. În acest caz avem şi $a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} a_1$, deci $a_1 = 0$.

Rezultă că o funcţie polinomială asociată unui polinom cu coeficienţi reali are proprietatea respectivă dacă şi numai dacă grad $f \leq 3$ şi $f''(0) = 0$.

16. Să se demonstreze că dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, atunci

$$\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Soluţie : Se integrează prin părţi :

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)dx .$$

Rezultă

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{f(1)-f(0)}{2} - \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)dx .$$

Din inegalitatea lui *Cauchy* obţinem

$$\left(\int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right)^2 \le \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx \cdot \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Prima integrală din dreapta este egală cu $\frac{1}{12}$, deci se obţine inegalitatea din enunţ.

Observaţie. Există funcţii pentru care are loc egalitatea, de exemplu $f(x) = x^2 - x$.

17. Să se găsească polinoamele $P \in \mathbb{Z}[X]$ pentru care

$$\int_0^1 \frac{P(x)+P(-x)}{x^2+1} dx \in \mathbb{Q}.$$

Soluţie : Fie $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$. Restul împărţirii lui P la $X^2 + 1$ este un polinom de grad cel mult 1

$$P = (X^2 + 1)Q + pX + q,\ Q \in \mathbb{Z}[X],\ \ p, q \in \mathbb{Z}.$$

Avem $P(i) + P(-i) = 2q$ şi $P(X) + P(-X) = (X^2 + 1)[Q(X) + Q(-X)] + 2q$.

Integrala definită pe intervalul [0, 1] a unei funcţii polinomiale cu coeficienţi întregi este un număr raţional. Avem şi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

care este un număr transcendent, deci iraţional. Rezultă că integrala dată este un număr raţional dacă şi numai dacă $q = 0$, prin urmare

$$P(i) + P(-i) = 2(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ...) = 0,$$

unde suma se extinde asupra tuturor coeficienţilor de rang par ai lui f.

Am obţinut astfel următorul rezultat : integral a dată este un număr raţional dacă şi numai dacă suma coeficienţilor cu indicele multiplu de 4 ai polinomului este egală cu suma coeficienţilor cu indicele multiplu de 4 plus 2.

18. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^n + ax$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că egalitatea

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx}$$

este adevărată dacă şi numai dacă $n = 2$ şi $a = -1$.

Soluţie : Avem

$$\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{2},$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \left(\frac{n^2x^{2n-1}}{2n-1} + 2ax^n + a^2x\right)\Big|_0^1 = \frac{n^2}{2n-1} + 2a + a^2.$$

Se obţine

$$\frac{n-1}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{1}{12}\left[\frac{(n-1)^2}{2n-1} + (a+1)^2\right]}$$

care este o egalitate de numere pozitive, deci este echivalentă cu

$$(a+1)^2 + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{(2n-1)(n+1)^2} = 0.$$

Această sumă de numere pozitive este nulă dacă şi numai dacă fiecare termen este nul. Cum $n \geq 2$, se obţine $n = 2$ şi $a = -1$.

CATEDRA DE MATEMATICĂ, GRUPUL ŞCOLAR DE TRANSPORTURI – PLOIEŞTI

E-mail : avram050652@yahoo.com