

## MULTIFUNC II K2M. EXEMPLE

de Adriana (Pelea) Brânda

### 1. No iuni fundamentale

#### 1.1 Defini ii

O mul ime nevid E se nume te *spa iu vectorial real* dac pe E sunt definite dou opera ii algebrice:

- una intern  $(x, y) \rightarrow x + y$ , numit *adunare*;
- una extern  $(\beta, x) \rightarrow \beta x$ , numit *înmul ire cu scalar i*.

Opera ii care satisfac urm toarele propriet i:

1.  $(E, +)$  este grup comutativ (sau abelian);
2.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ,  $(\forall) \alpha \in \mathbf{R}$  i  $(\forall) x \in E$ ;
3.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ,  $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbf{R}$  i  $(\forall) x \in E$ ;
4.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ,  $(\forall) \alpha \in \mathbf{R}$  i  $(\forall) x \in E$ ;
5.  $1x = x$ ,  $(\forall) x \in E, 1 \in \mathbf{R}$ .

Elementele unui spa iu vectorial se numesc *vectori* sau *puncte*.

Fie  $n+1$  vectori  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  dintr-un spa iu vectorial real. Ei se numesc *liniar independen i* dac pentru orice numere reale  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  cu proprietatea:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{are loc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Fie  $n+1$  vectori  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  dintr-un spa iu vectorial real. Ei se numesc *afin independen i* dac pentru oricare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  numere reale cu propriet ile:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = 0 \quad \text{are loc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Dac E este un spa iu vectorial, o func ie,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , care asociaz pentru dou elemente ale spa iului un num r real, se nume te *produs scalar* pentru spa iul vectorial E dac satisface condi iile:

- 1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ , pentru oricare  $x, y \in V$ .
- 2)  $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ , pentru oricare  $x, x', y \in V$ .
- 3)  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ , pentru oricare  $x \in V$  i oricare  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

4)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , atunci  $\langle x, x \rangle = 0$  dac și numai dac  $x=0$ , oricare ar fi  $x \in V$ .

Un spațiu vectorial pe care s-a definit un astfel de produs scalar se numește *spațiu vectorial euclidian*.

Fie  $X \neq \emptyset$  o mulțime abstractă. O *topologie* pe  $X$  este o familie de părți ale lui  $X$ ,  $\mathfrak{T}$ , cu proprietățile:

- (i) dac  $A, B \in \mathfrak{T}$  atunci  $A \cap B \in \mathfrak{T}$ .
- (ii) dac  $A_i \in \mathfrak{T}$  atunci  $\cup A_i \in \mathfrak{T}$ , unde  $i \in I$ .
- (iii)  $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$

$(X, \mathfrak{T})$  se numește *spațiu topologic*.

Fie  $X$  un spațiu topologic. O familie  $\mathfrak{R}$  de submulțimi ale lui  $X$  se numește *acoperire* a lui  $X$  dac  $\cup \mathfrak{R} = X$ .

O acoperire  $\mathfrak{R}$  a lui  $X$  se numește *deschis* dac fiecare mulțime  $R \in \mathfrak{R}$  este o mulțime deschisă.

O acoperire  $\mathfrak{R}$  a lui  $X$  se numește *local finit* dac fiecare  $x \in X$  are o vecinătate care intersectează doar un număr finit de mulțimi  $R \in \mathfrak{R}$ .

Fie  $\mathfrak{R}$  și  $\mathfrak{R}'$  două acoperiri ale lui  $X$ . Spunem că  $\mathfrak{R}'$  este o *subacoperire* a lui  $\mathfrak{R}$  dac  $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ .

O acoperire  $\mathfrak{R}'$  este *mai fină* decât  $\mathfrak{R}$  dac pentru orice  $R' \in \mathfrak{R}'$  există  $R \in \mathfrak{R}$  astfel încât  $R' \subset R$ .

Un spațiu topologic  $X$  se numește *compact* dac din orice acoperire deschisă a sa se extrage o subacoperire finită.

Un spațiu topologic  $X$  se numește *separat (Hausdorff)* dac pentru orice  $x$  și  $y$  din  $X$ ,  $x \neq y$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x$  și o vecinătate  $U$  a lui  $y$  astfel încât  $U \cap V = \emptyset$ .

Un spațiu topologic  $X$  se numește *paracompact* dac este separat (Hausdorff) și pentru orice acoperire deschisă  $\mathfrak{R}$  a lui  $X$  există o acoperire deschisă local finită a lui  $X$  mai fină decât  $\mathfrak{R}$ .

*Diametrul* unei mulțimi  $Y$  în spațiul real  $n$ -dimensional este notat și definit astfel:

$$\delta(Y) = \{ \|x - y\| : x, y \in R^n \}.$$

Un element  $x$  al lui  $X$  se numește *punct fix* pentru o aplicație  $f : X \rightarrow X$  dac  $f(x) = x$ .

Fie  $X$  o mulțime convexă într-un spațiu vectorial real. O funcție  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  se numește *cvasiconvex* dac  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$  mulțimea  $\{x \in X : f(x) < \lambda\}$  este convexă. Funcția  $f$  se numește *cvasiconcav* dac  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$  mulțimea  $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$  este convexă.

## 1.2 Simplexe și baricentre

**Propoziția 1.2.1** Vectorii  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  sunt afin independenți dac și numai dac vectorii  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{n+1} - v_1$  sunt liniar independenți.

**Consecința 1.2.2** Numărul maxim de vectori afin independenți în spațiul euclidian  $\mathbf{R}^n$  este  $n+1$ .

Fiind dați  $n+1$  vectori afin independenți din spațiul vectorial real  $E$ , mulțimea notată și definită :

$$[v_1 v_2 \dots v_{n+1}] = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

se nume te *simplex n-dimensional* sau *n-simplex*, iar  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  se numesc *vârfulurile simplexului*.

Simplexul n-dimensional  $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  este învelitoarea convex a vectorilor  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  deci:

$$[v_1 v_2 \dots v_{n+1}] = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}.$$

Cel mai simplu exemplu de simplex este *simplexul standard n-dimensional*  $= [e_1 e_2 \dots e_{n+1}]$ , unde  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  sunt vectori din  $\mathbf{R}^{n+1}$   $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .

**Propozi ia 1.2.3** Orice punct  $x$  al unui simplex  $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  se scrie în mod unic sub forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Penru orice  $x$  din simplexul  $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  se asociaz un singur sistem de scalari nenegativi

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$  cu  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ , pentru care  $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i$ .

Scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  astfel defini i i nota i uneori cu  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$  se numesc *coordonatele baricentrice* ale lui  $x$  în simplexul  $[v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$ .

Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un n-simplex  $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  i  $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\} \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$ . Punctele  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n+1}}$  sunt afin independente deci exist simplexul k-dimensional  $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n+1}}]$  numit fa *k-dimensional* sau *k-fa*. Fe ele 0-dimensionale sunt cele n+1 vârfuluri ale simplexului S.

**Observa ie 1.2.1** Un punct  $x \in S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  apar ine unei k-fe e  $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n+1}}]$  a lui S dac i numai dac pentru scrierea lui  $x$

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

avem  $\lambda_i(x) = 0$  oricare ar fi  $i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$ .

Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un n-simplex punctul notat  $b$  i definit cu

$$b(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_i$$

se nume te *baricentrul* lui S. Baricentrul  $b(S)$  apar ine simplexului S i nu apar ine nici unei fe e k-dimensionale ale lui S, unde  $k \leq n-1$ .

**Propozi ia 1.2.4** Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un n-simplex i  $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots \subset \tau_{n+1} = S$  un ir ascendent de n+1 fe e distincte ale lui S. Atunci baricentrele  $b(\tau_1), b(\tau_2), \dots, b(\tau_{n+1})$  ale acestor fe e sunt afin independente.

Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un  $n$ -simplex și  $i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$  un ir de  $n+1$  fe e distincte ale lui  $S$   $i_1 \subset i_2 \subset \dots \subset i_{n+1}$ . Deoarece baricentrele acestor fe e sunt afin independente (conform Propoziției 1.2.4) se poate vorbi despre un simplex  $n$ -dimensional format din baricentrele acestor fe e  $[b(i_1) b(i_2) \dots b(i_{n+1})]$ . Familia  $\mathfrak{B}_1(S)$  formată din toate aceste simplexe

$$\mathfrak{B}_1(S) = \{ [b(i_1) b(i_2) \dots b(i_{n+1})] : i_1 \subset i_2 \subset \dots \subset i_{n+1} \text{ fe e distincte} \}$$

se numește *diviziune baricentrică de ordinul 1* a lui  $S$ .

**Propoziția 1.2.5** Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un simplex. Atunci  $S$  este egal cu diviziunea sa baricentrică de ordinul 1, adică  $S = \mathfrak{B}_1(S)$ .

Diviziunile baricentrice de orice ordin se definesc prin inducție matematică admitând că s-au definit diviziunile baricentrice  $\mathfrak{B}_1(S), \dots, \mathfrak{B}_l(S)$ , cu  $l \geq 1$ , ale unui simplex  $n$ -dimensional  $S$ . Pentru fiecare simplex  $B \in \mathfrak{B}_l(S)$  se formează diviziunea baricentrică  $\mathfrak{B}_1(B)$  de ordinul 1 a lui  $B$  iar familia de  $n$ -simplexe:

$$\mathfrak{B}_{l+1}(S) = \cup \{ \mathfrak{B}_1(B) : B \in \mathfrak{B}_l(S) \}$$

se numește *diviziune baricentrică de ordinul  $l+1$*  a lui  $S$ . Convenim ca familia  $\mathfrak{B}_0(S) = \{S\}$  să fie numită *diviziune baricentrică de ordinul  $l=0$*  a lui  $S$ .

**Propoziția 1.2.6** Diametrul unui simplex  $n$ -dimensional  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  este egal cu diametrul mulțimii formate din vârfurile acelui simplex  $\delta(S) = \delta(\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\})$ .

Dacă  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  este un simplex,  $\mathfrak{B}_l(S)$  diviziunea baricentrică a lui  $S$  de ordinul  $l$  compusă din simplexele  $B_1, B_2, \dots, B_m$ . Prin *norma diviziunii* se înțelege numărul definit și notat astfel:

$$\|\beta_l(S)\| = \sup \{ \delta(B_k) : 1 \leq k \leq m \}.$$

**Propoziția 1.2.7** Dacă  $S$  este un  $n$ -simplex în spațiul real  $n$ -dimensional atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_l(S)\| = 0$ .

## 2. Multifuncții K2M

### 2.1 Multifuncții

Fie  $X$  și  $Y$  două mulțimi. O *multifuncție*  $T: X \rightarrow Y$  este o funcție definită pe mulțimea  $X$  cu valori în mulțimea părților ilor lui  $Y$ . Pentru orice  $x$ , element al lui  $X$ , mulțimea  $Tx$  care se numește valoarea multifuncției  $T$  pe punctul  $x$ .

Noțiunile care caracterizează o multifuncție sunt:

- 1) *Domeniul efectiv*, notat cu  $\text{Dom } T = \{x \in X, Tx \neq \emptyset\}$ .
- 2) *Graficul lui  $T$* , notat cu  $\text{graf } T = \{(x, y) : y \in Tx\}$ .
- 3) *Imaginea unei mulțimi  $X' \subset X$  prin multifuncția  $T$* , notată cu  $T(X') = \cup \{Tx : x \in X'\}$ .

4) *Imaginea multifunc* *iei*  $T$ , notat cu  $\text{Im } T = T(X)$ .

5) *Contraimagea inferioar* *a unei mulimi*  $Y' \subset Y$  *prin*  $T$ , notat cu  $T^{-1} = \{x \in X: T x \cap Y' \neq \emptyset\}$ .

6) *Contraimagea superioar* *a unei mulimi*  $Y' \subset Y$  *prin*  $T$ , notat cu  $T^{+1} = \{x \in X: T x \subset Y'\}$ .

7) *Inversa multifunc* *iei*  $T$ , notat  $T^{-1}: Y \rightarrow X$  *este definit* *astfel*  $T^{-1}y = \{x \in X: y \in T x\}$ . *Mulimile*  $T^{-1}y$  *se numesc* *fibrela* *multifunc* *iei*  $T$ .

8) *Duala multifunc* *iei*  $T$ , notat  $T^*: Y \rightarrow X$  *este definit* *prin*  $T^*y = \{x \in X: T x \subset Y'\}$ . *Mulimile*  $T^*y$  *se numesc* *cofibrela* *multifunc* *iei*  $T$ .

O multifuncie  $T: X \rightarrow Y$  *este* *cu valori* *nevide, conexe, deschise, compacte, etc., dac* *pentru* *orice* *element*  $x$  *al mulimii*  $X$ , *mulimea*  $Tx$  *este o mulime* *nevid*, *conex*, *deschis*, *compact*, *etc.*

O multifuncie  $T: X \rightarrow Y$  *este* *cu fibre* *conexe, deschise, compacte, etc., dac* *pentru* *orice* *element*  $x$  *al mulimii*  $X$ , *mulimea*  $T^{-1}y$  *este o mulime* *conex*, *deschis*, *compact*, *etc.*

Se nume te *politop* *învelitoarea* *convex* *a unui num r* *finit de puncte* *dintr-un spa* *iu* *vectorial*.

O funcie *continuu*  $f: X \rightarrow Y$  *se nume te* *selec ie* *continuu* *pentru o multifuncie*  $T: X \rightarrow Y$  *dac*  $f(x) \in Tx$  *pentru* *fiecare*  $x \in X$ .

**Propozi ia 2.1.1** *Fie*  $X$  *un spa* *iu* *paracompact* *i*  $Y$  *o mulime* *nevid*, *convex* *într-un spa* *iu* *vectorial* *topologic* *Hausdorff*. *Dac*  $T: X \rightarrow Y$  *este o multifuncie* *valori* *nevide, conexe* *i* *cu* *fibrela*  $T^{-1}y$  *deschise, atunci*  $T$  *admite o selec ie* *continuu* *f*. *Dac*  $X$  *un spa* *iu* *compact* *Hausdorff* *atunci* *exist* *un* *politop*  $P \subset Y$  *astfel* *ca*  $f(P) \subset P$ .

Dac  $Y$  *este un spa* *iu* *topologic* *vom* *spune* *c* *o multifuncie*  $T: X \rightarrow Y$  *este* *compact* *dac*  $T(X)$  *este inclus* *într-o submulime* *compact* *a lui*  $Y$  *(altfel* *spus, dac*  $\overline{T(X)}$  *este o submulime* *compact* *a lui*  $Y$ ). *Dac*  $X$  *i*  $Y$  *sunt spa* *ii* *topologice* *vom* *spune* *c* *o multifuncie*  $T: X \rightarrow Y$  *este* *închis* *dac* *graficul* *su* *este o submulime* *închis* *a lui*  $X \times Y$ .

Fie  $X, Y, Z$  *trei mulimi* *i*  $T: X \rightarrow Y, S: Y \rightarrow Z$  *dou* *multifuncii*. *Multifuncia* *notat*  $S \circ T: X \rightarrow Z$  *este definit* *prin*

$$(S \circ T)x = S(Tx), x \in X$$

*se nume te* *compunerea* *lui*  $S$  *cu*  $T$ .

Un punct  $x \in X$  *se nume te* *punct* *fix* *pentru o multifuncie*  $T: X \rightarrow Y$  *dac*  $x \in Tx$ . *Un punct*  $x \in X$  *se nume te* *punct de coinciden* *pentru dou* *multifuncii*  $T, S: X \rightarrow Y$  *dac*  $Tx \cap Sx \neq \emptyset$ .

## 2.2 Multifunc ii semicontinue superior

Fie  $X$  i  $Y$  dou spa ii topologice. O multifunc ie  $T : X \multimap Y$  este *semicontinu superior* într-un punct  $x_0 \in X$  dac pentru orice mul ime deschis  $G \subset Y$  astfel încât  $Tx_0 \subset G$  exist o vecin tate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât  $Tx \subset G, \forall x \in V$ .

$T$  se nume te *semicontinu superior* (pe  $X$ ) dac este semicontinu superior în fiecare punct  $x \in X$ .

**Observa ie:** Dac  $x_0 \in X$  i  $Tx_0 = \emptyset$  atunci  $T$  este semicontinu superior în  $x_0$  dac i numai dac exist o vecin tate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât  $T(V) = \emptyset$ .

**Propozi ia 2.2.1:** Fie  $X$  i  $Y$  dou spa ii topologice i  $T : X \multimap Y$ . Urm toarele afirma ii sunt echivalente:

- (i)  $T$  este semicontinu superior.
- (ii)  $\forall G \subset Y$  deschis ,  $T^{-1}(G)$  este deschis .
- (iii)  $\forall F \subset Y$  închis ,  $T^{-1}(F)$  este închis .

**Propozi ia 2.2.2:** Fie  $X, Y, Z$  spa ii topologice i  $T : X \multimap Y$ ,  $S : Y \multimap Z$  dou multifunc ii semicontinue superior. Atunci  $S \circ T$  este o multifunc ie semicontinu superior. În particular dac  $s : Y \rightarrow Z$  este o func ie continu , atunci  $s \circ T$  este o multifunc ie semicontinu superior.

**Demonstra ie:** Trebuie sa demonstr m c pentru orice mul ime  $C \subset Z$  are loc

$$(S \circ T)^{-1}(C) = T^{-1}(S^{-1}(C)).$$

Avem succesiv

$$x \in (S \circ T)^{-1}(C) \Leftrightarrow \forall y \in Tx, Sy \subset C \Leftrightarrow Tx \subset S^{-1}(C) \Leftrightarrow$$

$$x \in T^{-1}(S^{-1}(C)). \blacksquare$$

**Propozi ia 2.2.3:** Fie  $X, Y$  dou spa ii topologice Hausdorff compacte i  $T : X \multimap Y$  o multifunc ie cu valori închise. Urm toarele afirma ii sunt echivalente:

- (i)  $T$  este semicontinu superior
- (ii) graf  $T$  este mul ime închis în  $X \times Y$
- (iii) Dac  $(x_i), (y_i)$  sunt dou iruri generalizate în  $X$ , respectiv în  $Y$ , din  $x_i \rightarrow x, y_i \in Tx_i, y_i \rightarrow y$  rezult  $y \in Tx$ .

Strâns legate de conceptul de multifunc ie semicontinu superior sunt no iunile de multifunc ie demicontinu superior, respectiv multifunc ie hemicontinu superior.

Fie  $E$  un spațiu vectorial topologic Hausdorff real,  $E'$  dualul său algebrico-topologic (adic spațiul vectorial al tuturor funcțiilor liniare și continue) și  $X$  un spațiu topologic. Spunem că o multifuncție  $T: X \rightarrow E$  este *demicontinu superior* dacă  $\forall x_0 \in X$ ,  $w \in E'$  și  $\lambda \in \mathbf{R}$  astfel încât  $Tx_0 \subset \{x \in X : w(x) < \lambda\} \exists V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât  $T(V) \subset \{x \in X : w(x) < \lambda\}$ .

În ipotezele de mai sus, spunem că o multifuncție  $T: X \rightarrow E$  este *hemicontinu superior* dacă pentru fiecare  $w \in E'$  și  $\lambda \in \mathbf{R}$ , mulțimea  $\left\{x \in X : \sup_{u \in Tx} w(u) < \lambda\right\}$  este deschisă în  $X$ .

**Observație:** Este evident că orice multifuncție semicontinu superior este demicontinu superior.

**Propoziția 1.4.4:** Fie  $X$  un spațiu topologic,  $E$  un spațiu vectorial topologic Hausdorff real și  $T: X \rightarrow E$  o multifuncție cu valori nevide. Dacă  $T$  este demicontinu superior atunci  $T$  este hemicontinu superior.

**Observație:** Dacă  $T$  este o multifuncție cu valori compacte, conceptele de hemicontinuitate superioară și cel de demicontinuitate superioară coincid. Vom arăta că în anumite condiții, conceptele de semicontinuitate superioară, demicontinuitate superioară și hemicontinuitate superioară coincid.

**Propoziția 1.4.5:** Fie  $X$  un spațiu topologic,  $Y$  o submulțime nevidă compactă a unui spațiu local convex Hausdorff real  $E$  și  $T: X \rightarrow Y$  o multifuncție cu valori nevide convexe. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i)  $T$  este semicontinu superior.
- (ii)  $T$  este demicontinu superior.
- (iii)  $T$  este hemicontinu superior.

### 2.3 Teorema lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

În acest paragraf vom da teorema Knaster – Kuratowski – Mazurkiewicz sau lema celor trei polonezi. Acest teoremă este echivalentă cu lema lui Sperner și teorema de punct fix a lui Brouwer.

O remarcabilă teoremă de punct fix este obținută de Brouwer în anul 1910 și publicată în anul 1912. Demonstrația lui Brouwer folosea tehnica aproximării simpliciale și noțiuni de teoria gradului topologic. Într-o scrisoare datată 4 ianuarie 1910 Brouwer comunică lui Hadamard rezultatul său, fără demonstrație. Hadamard prezintă acest rezultat cu numele „Teorema de punct fix a lui Brouwer” și o altă demonstrație.

Lema lui Sperner este publicat în anul 1928. Sperner o aplica pentru obținerea unor teoreme de invarianță a dimensiunii în a domeniilor.

Knaster sesizează legătura dintre lema lui Sperner și teorema de punct fix a lui Brouwer. Mazurkewicz și o demonstrează teoremei lui Brouwer, demonstrând corectat de Kuratowski. În 1929 este publicată teorema lui Knaster – Kuratowski – Mazurkewicz cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de teorema K2M sau *lema celor trei polonezi*. Această teoremă apare ca o consecință a lemei lui Sperner, dar pe de altă parte și o demonstrează mai simplu teoremei de punct fix a lui Brouwer.

**Teorema Knaster-Kuratowski-Mazurkewicz - teorema K2M:** Fie  $S = [v_1 v_2 \dots v_{n+1}]$  un simplex în spațiul  $\mathbf{R}^n$  și  $\{F_i : 1 \leq i \leq n+1\}$  o familie de  $n+1$  submulțimi închise ale lui  $S$ . Dacă incluziunea

$$[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}] \subset \bigcup \{F_{i_j} : 1 \leq j \leq k\}$$

are loc pentru fiecare față  $[v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}]$  a lui  $S$ , atunci  $\bigcap \{F_i : 1 \leq i \leq n+1\} \neq \emptyset$ .

## 2.4 Multifuncții K2M

Motivații de teorema lui Knaster-Kuratowski-Mazurkewicz, Dugundji și Granas introduc noțiunea de multifuncție K2M, iar Granas și Lassonde pe cea de multifuncție tare K2M.

**Definiție:** Fie  $X$  o mulțime într-un spațiu vectorial și  $D$  o submulțime nevidă a lui  $X$ . O multifuncție  $T : D \rightarrow X$  se numește:

(i) multifuncție K2M dacă  $\forall A \subset D$ , finită și nevidă avem

$$\text{conv}A \subset T(A);$$

(ii) multifuncție tare K2M dacă

$$x \in Tx, \forall x \in D$$

și

$$T^*y = D \setminus T^{-1}y \text{ este mulțime convexă (eventual vidă), } \forall y \in X.$$

Teoria K2M, concept introdus de S.Park este studiul multifuncțiilor K2M și ale aplicațiilor acestora.

**Propoziția 2.4.1:** Dacă  $D$  este o submulțime convexă a lui  $X$  și  $T : D \rightarrow X$  este o multifuncție tare K2M, atunci  $T$  este o multifuncție K2M.

**Demonstrație:** Fie  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset D$  și  $y_0 \in \text{conv}A$ . Avem de arătat că  $y_0 \in \bigcup \{Tx_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Deoarece  $y_0 \in Ty_0$  deducem că  $y_0 \notin T^*y_0$  și deci  $\text{conv}A$  nu este

inclus în  $T^*y_0$ . Întrucât mulțimea  $T^*y_0$  este convexă, cel puțin în un punct  $x_i \in A$  nu aparține lui  $T^*y_0$ , adică  $y_0 \in Tx_i$ . ■

Vom da în continuare câteva exemple de multifuncții  $K^2M$ . Exemplele 2 și 3 sunt cazuri particulare ale exemplului 4. În primele 5 exemple domeniul de definiție este convex, deci este suficient să arătăm că multifuncția este tare  $K^2M$ . Nu se va întâmpla la fel și în exemplul 6.

**Exemplul 1:** Fie  $E$  un spațiu vectorial,  $D$  o submulțime convexă a lui  $E$  și  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție cvasiconvexă. Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow E$  definită prin

$$Tx = \{y \in D : f(y) \leq f(x)\} \quad x \in D,$$

este tare convexă; într-adevăr  $x \in Tx$ ,  $\forall x \in D$  și deoarece  $f$  este cvasiconvexă se obține ușor că  $T^*y = \{x \in D : f(x) < f(y)\}$

este mulțime convexă.

**Exemplul 2:** Fie  $E$  un spațiu vectorial și  $D$  o submulțime convexă a lui  $E$ . Fie  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcțional biliniar și  $l : E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcțional liniar. Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow D$  definită prin

$$Tx = \{y \in D : \varphi(y, y - x) \leq l(y - x)\}, \quad x \in D$$

este tare  $K^2M$ ; într-adevăr  $x \in Tx$  și cofibrele lui  $T$

$$T^*y = \{x \in D : \varphi(y, y - x) > l(y - x)\}$$

sunt mulțimi convexe.

**Exemplul 3:** Fie  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un spațiu prehilbertian,  $D$  o submulțime convexă a lui  $H$  și  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție oarecare. Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow H$  definită prin

$$Tx = \{y \in H : \langle f(y), y - x \rangle \leq 0\}, \quad x \in D,$$

este tare  $K^2M$ ; într-adevăr  $x \in Tx$  și cofibrele

$$T^*y = \{x \in D : \langle f(y), y - x \rangle > 0\}$$

sunt mulțimi convexe.

**Exemplul 4:** Fie  $D$  o submulțime convexă a unui spațiu vectorial  $E$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$  și  $\varphi : D \times D \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție cu proprietățile:

(a)  $\varphi(x, x) \leq \alpha, \forall x \in D$

(b) Funcția  $\varphi(\cdot, y) : D \rightarrow \mathbf{R}$  definită prin  $\varphi(\cdot, y)(x) = \varphi(x, y)$  este cvasiconcavă pe  $D$ ,  $\forall y \in D$ .

Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow D$  definită prin:

$$Tx = \{y \in D : \varphi(x, y) \leq \alpha\}, \quad x \in D,$$

este tare  $K^2M$ . Într-adevăr, din (a) rezultă că  $x \in Tx$ ,  $\forall x \in D$ , iar din (b) deducem că cofibrele

$$T^*y = \{x \in D : \varphi(x, y) > \alpha\}$$

sunt mulțimi convexe.

**Exemplul 5:** Fie  $D$  o submulțime convexă a unui spațiu vectorial  $E$ ,  $p : E \rightarrow \mathbf{R}$  o seminormă și  $f : D \rightarrow E$  o funcție arbitrară. Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow D$  definită prin

$$Tx = \{y \in D : p(f(y) - y) \leq p(f(y) - x)\}, \quad x \in D,$$

este tare  $K^2M$ . Pentru a demonstra această afirmație este suficient să arătăm că dac

$$x_1, x_2 \in T^*y = \{x \in D : p(f(y) - x) < p(f(y) - y)\}$$

și  $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , atunci  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in T^*y$ . Înțind cont de relațiile  $p(f(y) - x_i) < p(f(y) - y)$ ,  $i = 1, 2$  vom avea

$$\begin{aligned} p(f(y) - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) &\leq \lambda_1 p(f(y) - x_1) + \lambda_2 p(f(y) - x_2) \leq \\ &\leq \lambda_1 p(f(y) - y) + \lambda_2 p(f(y) - y) = p(f(y) - y). \end{aligned}$$

**Exemplul 6:** Fie  $Y$  o submulțime convexă a unui spațiu vectorial  $E$ ,  $D \subset Y$  o mulțime arbitrară și  $\varphi : D \times Y \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție cu proprietățile:

$$(a) \varphi(x, y) + \varphi(y, x) \leq 0, \forall (x, y) \in D \times D.$$

$$(b) \text{Funcția } \varphi(x, \cdot) : Y \rightarrow \mathbf{R}, \varphi(x, \cdot)(y) = \varphi(x, y) \text{ este convexă pe } Y, \forall x \in D.$$

Atunci multifuncția  $T : D \rightarrow Y$  definită prin

$$Tx = \{y \in Y : \varphi(x, y) \leq 0\} \quad x \in D,$$

este  $K^2M$ .

Pentru a demonstra această afirmație fie  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset D$  și fie  $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  și  $\lambda_i \geq 0$ ,

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Din (a) rezultă că

$$\varphi(x_i, x_j) + \varphi(x_j, x_i) \leq 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Înmulțind relația de mai sus cu  $\lambda_i$  și însumând după  $i$  găsim

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_j, x_i) \leq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

De aici i din (b) rezult

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_j) + \varphi(x_j, y_0) \leq 0.$$

Folosind înc o dat convexitatea func iei  $\varphi(x, \cdot)$  deducem c

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i, y_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(x_j, y_0) \leq 0.$$

Rezult c pentru cel pu in un punct  $x_i$  are loc  $\varphi(x_i, y_0) \leq 0$ . Aceasta înseamn c  $y_0 \in \bigcup \{Tx_i : 1 \leq i \leq n+1\}$  deci  $T$  este o multifunc ie K2M.

**Propozi ia 2.4.2:** Fie  $X$  o mul ime convex într-un spa iu vectorial topologic,  $D$  o submul ime nevid finit a lui  $X$  i  $A$  o familie de submul imi nevide ale lui  $D$ . Dac  $G : D \rightarrow X$  este o multifunc ie cu valori deschise în  $X$  care satisface condi ia

$$\text{conv}A \subset G(A), \forall A \in A,$$

atunci exist o multifunc ie  $F : D \rightarrow X$  cu valori închise în  $X$  cu propriet ile:

$$(i) Fx \subset Gx, \forall x \in D;$$

$$(ii) \text{conv}A \subset F(A), \forall A \in A.$$

**Demonstra ie:** Pentru fiecare  $y \in G(D)$  fie

$$(2.1) H_y = \bigcap \{Gx : y \in Gx\}.$$

$H_y$  este o mul ime deschis în  $X$  i  $y \in H_y$ . Deoarece spa iile vectoriale topologice sunt spa ii regulate, exist o mul ime  $U_y$ , deschis în  $X$ , astfel încât

$$(2.2) y \in U_y \subset \overline{U_y} \subset H_y.$$

Evident,  $\forall A \in A$  avem  $G(A) \subset \bigcup \{U_y : y \in G(A)\}$ .

De aici i din (ii) rezult c familia  $\{U_y : y \in G(A)\}$  este o acoperire deschis a mul imii  $\text{conv}A$ . Cum  $\text{conv}A$  este compact, exist o submul ime finit  $V_A$  a lui  $G(A)$  astfel încât

$$(2.3) \quad \text{conv}A \subset \bigcup \{U_y : y \in V_A\}.$$

Punem  $V = \bigcup \{V_A : A \in \mathcal{A}\}$ . Definim multifuncia  $F : D \multimap X$  prin

$$Fx = \bigcup \{\bar{U} : y \in V, U_y \subset Gx\}, \quad x \in D.$$

Pentru fiecare  $x \in D$ ,  $Fx$  este o mulime închisă în  $X$ . Dacă  $Fx = \emptyset$ , atunci (i) are loc în mod trivial. În caz contrar,  $\forall y \in V$  cu  $U_y \subset Gx$ , din (2.1) și (2.2) rezultă  $\bar{U}_y \subset H_y \subset Gx$ , deci  $Fx \subset Gx$ .

Rămâne să arătăm că  $F$  satisface și (ii). Fie  $A \in \mathcal{A}$  și  $z \in \text{conv}A$ . Din (2.3) rezultă că  $\exists y \in V_A$  astfel ca  $z \in U_y$ . Deoarece  $y \in Gx$ , pentru un  $x \in A$  rezultă că  $U_y \subset H_y \subset Gx$  și prin urmare  $z \in Gx \subset G(A)$ . Deci  $\text{conv}A \subset G(A)$ . ■

**Consecința 2.4.3:** Fie  $X$  o submulțime convexă a unui spațiu vectorial topologic și  $D$  o submulțime nevidă, finită a sa. Dacă  $G : D \multimap X$  este multifuncție K2M cu valori deschise în  $X$ , atunci există o multifuncție K2M cu valori închise în  $X$ ,  $F : D \multimap X$  astfel încât  $Fx \subset Gx$ ,  $\forall x \in D$ .

**Consecința 2.4.4:** Fie  $X$  o submulțime convexă a unui spațiu vectorial topologic și  $D$  o submulțime nevidă, finită a sa. Dacă  $F : D \multimap X$  este o multifuncție cu valori închise în  $X$  pentru care  $\text{conv}D \cap \bigcap \{Fx : x \in D\} = \emptyset$ ,

atunci există o multifuncție  $G : D \multimap X$  cu valori deschise în  $X$  cu proprietățile:

- (i)  $Fx \subset Gx, \forall x \in D$ .
- (ii)  $\text{conv}D \cap \bigcap \{Gx : x \in D\} = \emptyset$ .

**Demonstrație:** Considerăm multifuncția  $G_1 : D \multimap \text{conv}D$  definită prin  $G_1x = \text{conv}D \setminus Fx, \quad x \in D$ .

Din ipoteză se obține imediat că  $G_1$  ia valori deschise în  $\text{conv}D$  și  $\text{conv}D = G_1(D)$ . În baza Propoziției 2.2.2 (pentru  $X = \text{conv}D$  și  $\mathcal{A} = \{D\}$ ) există o multifuncție  $F_1 : D \multimap \text{conv}D$  cu valori închise în  $\text{conv}D$ , cu următoarele proprietăți:

$$(2.4) \quad F_1x \subset G_1x, \forall x \in D$$

$$(2.5) \quad \text{conv}D = F_1(D).$$

Deoarece  $\text{conv}D$  este mulime compactă, mulțimile  $F_1x$  sunt închise în  $X$ . O multifuncție care satisface condițiile impuse este  $G : D \multimap X$ , definit prin

$$Gx = Y \setminus F_1x, \quad x \in D.$$

Într-adevăr, din (2.4) rezultă (i), iar (2.5) implică (ii). ■

**Observație:** Condiția ca mulțimea  $D$  să fie finită este esențială în Propoziția 2.4.2 și în Consecințele 2.4.3 și 2.4.4. Dacă ea este o mulțime infinită, cum avem în exemplul următor, Consecința 2.4.3 și implicit Propoziția 2.4.2 nu mai sunt adevărate.

Fie  $D$  o mulțime care nu se reduce la un punct, convexă și compactă într-un spațiu vectorial topologic și fie  $s : D \rightarrow D$  o bijecție, astfel încât  $s(x) \neq x$ ,  $\forall x \in D$ . Considerăm multifuncția  $G : D \multimap D$  definită prin

$$Gx = D \setminus \{s(x)\}, \quad x \in D.$$

Se constată imediat că  $G$  este o multifuncție K2M cu valori deschise în  $D$  și că  $\bigcap \{Gx : x \in D\} = \emptyset$ .

Să presupunem că există o multifuncție K2M,  $F : D \multimap D$  cu valori închise în  $D$ , astfel încât  $Fx \subset Gx$ ,  $\forall x \in D$ . Deoarece  $D$  este mulțime compactă valorile  $Fx$  sunt compacte. Atunci  $\bigcap \{Fx : x \in D\} \neq \emptyset$  de unde se ajunge la contradicția  $\bigcap \{Gx : x \in D\} \neq \emptyset$ .

O noțiune mai generală decât cea de multifuncție K2M este cea de multifuncție GK2M.

**Definiție:** Fie  $X$  o mulțime într-un spațiu vectorial și  $D$  o mulțime nevidă. O multifuncție  $T : D \multimap X$ , vom spune că este GK2M ("generalized K2M") dacă  $\forall A \subset D$  o mulțime nevidă finită,  $\exists \sigma : A \rightarrow X$  o funcție astfel încât

$$\text{conv} \sigma(B) \subset T(B), \quad \forall \emptyset \neq B \subset A.$$

Această definiție a fost introdusă de Chang și Zhang. Această noțiune, dar cu altă denumire, apare cu un an mai devreme în lucrarea a lui Kassay și Kolumban.

**Observație:** În general, funcțiile  $\sigma$  din definiția precedentă nu sunt injective. Este clar că orice funcție K2M este GK2M (reciproca acestei afirmații nu este întotdeauna adevărată).

### 3. Bibliografie

- [1] M. Balaj, *Introducere în teoria K2M*, Editura Universității din Oradea, 2002

- [2] **G. Kassay, I. Kolumbán**, *On the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz and Ky Fans's theoreme*, Babe -Bolyai Univ, Res. Seminars Preprint 7(1990), 87-100.